

# Mathematik für Informatiker

Prof. Dr. Thomas Streicher

2008/2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Grundlagen</b>	<b>4</b>
I.1 Logische und mengentheoretische Grundlagen . . . . .	4
I.1.1 Logische Notation und Grundbegriffe . . . . .	5
I.1.2 Die grundlegenden Axiome der Mengenlehre . . . . .	6
I.2 Die reellen und die natürlichen Zahlen . . . . .	7
I.3 Vollständige Induktion und rekursive Definitionen . . . . .	10
I.4 Funktionen . . . . .	13
I.5 Die Ebene . . . . .	16
I.5.1 Kartesische Koordinaten . . . . .	16
I.5.2 Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	16
I.5.3 Winkel und Winkelfunktionen . . . . .	17
I.5.4 Drehung eines Punktes . . . . .	18
I.6 Die komplexen Zahlen . . . . .	18
<b>II Konvergenz und Stetigkeit</b>	<b>22</b>
II.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte . . . . .	22
II.2 Relle Funktionen . . . . .	32
II.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit . . . . .	39
<b>III Differentiation</b>	<b>48</b>
III.1 Differenzierbarkeit (und Rechenregeln) . . . . .	48
III.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	54
III.3 Spezielle Differenzierbare Funktionen . . . . .	58
III.3.1 Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	58
III.3.2 Arcusfunktionen . . . . .	59
III.3.3 Potenzen mit rationalen Exponenten . . . . .	59
III.4 Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	61
<b>IV Integration</b>	<b>66</b>
IV.1 Riemann Integral . . . . .	66
IV.2 Integrationsregeln . . . . .	72
IV.3 Uneigentliche Integrale . . . . .	75
<b>V Reihen</b>	<b>77</b>
V.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele . . . . .	77
V.2 Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	78
<b>VI Funktionenfolgen und -reihen</b>	<b>84</b>
VI.1 Folgen und Reihen von Funktionen . . . . .	84
VI.2 Potenzreihen . . . . .	88
VI.3 Taylorreihen . . . . .	92
VI.4 Ein Ausblick auf Fourierreihen . . . . .	95

<b>VII Lineare Algebra</b>	<b>98</b>
VII.1 Die euklidische Ebene . . . . .	98
VII.2 Der euklidische Raum . . . . .	102
VII.3 Vektorräume und lineare Abbildungen . . . . .	106
VII.4 Matrizen . . . . .	111
VII.5 Basistransformationen . . . . .	114
VII.6 Determinanten . . . . .	114
VII.7 Elementare Umformungen von Matrizen . . . . .	117
VII.8 Matrixinversion durch Zeilenumformungen . . . . .	119
VII.9 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	120
VII.10 Eigenwerte . . . . .	123
VII.11 Orthonormalbasen . . . . .	125
VII.12 Symmetrische Matrizen und Quadratische Formen . . . . .	128
<b>VIII Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher</b>	<b>132</b>
VIII.1 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	132
VIII.2 Stetigkeit mehrstelliger reeller Funktionen . . . . .	137
VIII.3 Differenzieren mehrstelliger reeller Funktionen . . . . .	139
VIII.4 Höhere Partielle Ableitungen und Satz von Taylor . . . . .	146
VIII.5 Lokale Extrema mehrstelliger reeller Funktionen . . . . .	148
VIII.6 Satz über implizite und inverse Funktionen . . . . .	153
VIII.7 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	156
<b>IX Differentialgleichungen</b>	<b>159</b>
IX.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	163
IX.2 Elementare Lösungsmethoden . . . . .	168
IX.2.1 Trennung der Variablen . . . . .	168
IX.2.2 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	169
IX.2.3 Die Differentialgleichung $x'' = f(x)$ . . . . .	172
IX.3 Systeme linearer Differentialgleichungen . . . . .	174
IX.4 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	178
IX.5 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	180

# I Grundlagen

## I.1 Logische und mengentheoretische Grundlagen

Die moderne Mathematik wird üblicherweise in der Sprache der Mengenlehre formuliert. *Intuitiv* ist eine Menge (nach G. Cantor 1895) “eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen”. Die wesentlichen Beziehungen zwischen Mengen sind  $\in$  (Elementbeziehung) und  $=$  (Gleicheit). Wir schreiben  $x \in M$ , um auszudrücken, daß  $x$  ein Element von  $M$  ist, und  $x \notin M$  für die Negation dieser Aussage. Mengen  $A$  und  $B$  heißen gleich (Not.  $A = B$ ), wenn sie dieselben Elemente enthalten. Die *leere* Menge  $\emptyset$  ist diejenige Menge, die kein Element enthält. Mengen können auf zwei verschiedene Weisen definiert werden

- (i) durch Aufzählung, etwa  $\{3, -7, 28, 2\}$ , wobei Reihenfolge und Wiederholung irrelevant sind, etwa  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
- (ii) durch Angabe einer definierenden Eigenschaft  $\{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ .

Die zweite Methode kann im Extremfall zu Widersprüchen führen wie folgendes auf B. Russell zurückgehendes Paradoxon zeigt: sei  $R = \{x \mid x \notin x\}$ , dann gilt  $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ , was logisch widersprüchlich ist! Dieses Problem kann behoben werden, indem man (ii) folgendermaßen einschränkt: wir betrachten bloß Mengen der Gestalt  $\{x \in M \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ , wobei  $M$  eine vorher konstruierte Menge ist.

Eine Menge  $A$  ist *Teilmenge* von  $B$  (Not.  $A \subseteq B$ ), wenn für alle  $x \in A$  gilt, daß  $x \in B$ . Offenbar gilt  $A = B$  genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ . Es gilt immer  $\emptyset \subseteq M$ .

**Definition I.1.1** (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz)

Für Mengen  $A$  und  $B$  ist

- (1) ihr Durchschnitt  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- (2) ihre Vereinigung  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- (3) ihre Differenz  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

wobei  $\wedge$  für “und” und  $\vee$  für nichtauschließendes “oder” steht.

Wenn  $B \subseteq A$  (und  $A$  aus dem Kontext klar ist), schreiben wir  $B^c$  bzw.  $\complement B$  abkürzend für  $A \setminus B$ .

**Beispiel I.1.2** Sei  $A = \{3, 7, 12\}$  und  $B = \{4, 7, 20, 40\}$ , dann ist

$$A \cup B = \{3, 4, 7, 12, 20, 40\} \quad A \cap B = \{7\} \quad A \setminus B = \{3, 12\} \quad B \setminus A = \{4, 20, 40\}$$

### I.1.1 Logische Notation und Grundbegriffe

Wie oben bereits erwähnt, bezeichnet  $A \wedge B$  die **Konjunktion** der Aussagen  $A$  und  $B$ , die wahr ist, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  wahr sind. Mit  $\neg A$  bezeichnen wir die **Negation** der Aussage  $A$ , die genau dann wahr ist, wenn  $A$  falsch ist. Die **Disjunktion** von  $A$  und  $B$  ist definiert als  $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ . Also ist  $A \vee B$  genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen  $A$  und  $B$  wahr ist (wir lassen also auch zu, daß beide Aussagen wahr sind). Die **Implikation**  $A \Rightarrow B$  ist definiert als  $\neg A \vee B$  und ist somit genau dann wahr, wenn  $B$  wahr oder  $A$  falsch ist.<sup>1</sup> Anders gesagt ist  $A \Rightarrow B$  genau dann falsch, wenn  $A$  wahr und  $B$  falsch ist. Wir schreiben  $A \Leftrightarrow B$  (“ $A$  und  $B$  sind logisch äquivalent”) als Abkürzung für  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ . Offenbar ist  $A \Leftrightarrow B$  genau dann wahr, wenn  $A$  und  $B$  beide wahr oder beide falsch sind.

Aufgrund der Definition von  $\vee$  gelten die folgenden **de Morganschen Gesetze**

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{und} \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Offenbar sind auch die Aussagen  $A \Rightarrow B$  und  $\neg B \Rightarrow \neg A$  logisch äquivalent, wobei letztere **Kontraposition** der ersteren heißt. Offenbar gilt auch  $\neg A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \perp)$ , falls  $\perp$  eine falsche Aussage ist.

Um mathematische Aussagen zu formulieren, reicht es nicht Basisaussagen mithilfe obiger aussagenlogischer Verknüpfungen zusammenzusetzen, sondern man muß auch über Objekte (eines bestimmten Typs) quantifizieren. Um z.B. die Aussage “es gibt unendlich viele Primzahlen” zu formulieren, schreibt man

$$\forall n \exists p (n \leq p \wedge \text{Prim}(p))$$

wobei man das Prädikat  $\text{Prim}$  als Abkürzung für

$$\forall k ((\exists \ell (p = k \cdot \ell)) \Rightarrow k = 1 \vee k = p)$$

einführen kann. Aus diesem Beispiel sieht man, daß man zumindest folgende **Quantoren** benötigt

$\forall x$  für alle  $x$

$\exists x$  es gibt ein  $x$

welche sich auch in der Praxis der Mathematik als ausreichend erweisen. Z.B. kann man die Aussage “es gibt genau ein  $x$  mit  $A(x)$ ” folgendermaßen formulieren

$$\exists^1 x A(x) \equiv \exists x (A(x) \wedge \forall y (A(y) \Rightarrow x = y))$$

---

<sup>1</sup>Es mag am Anfang verwirrend sein, daß  $A \Rightarrow B$  automatisch wahr ist, falls  $A$  falsch ist. Jedoch erweist sich diese Auffassung als zweckmäßig in der Mathematik.

Für die Quantoren gelten die folgenden de Morganschen Gesetze

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \quad \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

Aus dem zweiten de Morganschen Gesetz ergibt sich das Prinzip  $\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$ , was wir im weiteren sehr oft implizit verwenden werden.<sup>2</sup>

### I.1.2 Die grundlegenden Axiome der Mengenlehre

Quantoren und aussagenlogische Verknüpfungen erweisen sich auch als nützlich, um mengentheoretische Beziehungen und Axiome zu formulieren. Man kann etwa  $A \subseteq B$  verstehen als Abkürzung für  $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$  und dann das sogenannte **Extensionalitätsaxiom** der Mengenlehre formulieren als

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Das sogenannte **Aussonderungsaxiom** der Mengenlehre kann man formulieren als

$$\forall y \exists z \forall x(x \in z \Leftrightarrow (x \in y \wedge A(x)))$$

wobei  $A(x)$  eine in der Sprache der Mengenlehre formulierbare Aussage ist, in der  $y$  und  $z$  nicht erwähnt werden.<sup>3</sup> Weitere Axiome, die üblicherweise postuliert werden, sind das **Paarmengenaxiom**

$$\forall x, y \exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

das **Vereinigungsaxiom**

$$\forall x \exists y \forall u(u \in y \Leftrightarrow \exists z(u \in z \wedge z \in x))$$

(für die eindeutig bestimmte Menge  $y$  schreibt man üblicherweise  $\bigcup x$ ) und das **Potenzmengenaxiom**

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \forall u(u \in z \Rightarrow u \in x))$$

John von Neumann hatte die Idee natürliche Zahlen als bestimmte Mengen aufzufassen basierend auf der Idee, daß eine natürliche Zahl  $n$  gleich der Menge  $\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$  sei. Dann ist  $0 = \emptyset$  und  $n+1 = n \cup \{n\} =: \text{Sc}(n)$ . Basierend auf dieser Idee kann man ein **Unendlichkeitsaxiom** folgendermaßen formulieren

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\text{Sc}(y) \in x))$$

---

<sup>2</sup>Es ist eine amüsante Übung(!), daraus die sogenannte “Deppenformel”  $\exists x(A(x) \Rightarrow \forall y A(y))$  herzuleiten.

<sup>3</sup>Das ursprünglich von G. Frege vorgeschlagene uneingeschränkte **Komprehensionsaxiom**

$$\exists z \forall x(x \in z \Leftrightarrow A(x))$$

wurde wie bereits erwähnt von B. Russell als widersprüchlich nachgewiesen.

was die Existenz einer Menge behauptet, die  $\emptyset$  als Element enthält und unter der Operation  $\text{Sc}$  abgeschlossen ist. Die Menge  $\mathbb{N}_0$  kann man dann als kleinste Teilmenge konstruieren, die  $\emptyset$  als Element enthält und unter der Operation  $\text{Sc}$  abgeschlossen ist. Erstaunlicherweise reichen diese Axiome aus, um 99% der heutigen Mathematik daraus herzuleiten, zumindest wenn man das sogenannte **Auswahlaxiom** dazunimmt, das besagt, daß für eine Menge  $\mathcal{M}$  nichtleerer Mengen eine (Auswahl-)Funktion  $f : \mathcal{M} \rightarrow \bigcup \mathcal{M}$  existiert, sodaß  $f(x) \in x$  für alle  $x \in \mathcal{M}$ .

## I.2 Die reellen und die natürlichen Zahlen

Die den reellen Zahlen, dem “Kontinuum”, zugrundeliegende Intuition ist die der **Zahlengeraden**, auf der zwei Punkte 0 und 1 fixiert sind (intuitiv liegt 0 links von 1). Neben der Gleichheit ist die Relation  $x < y$  grundlegend, die intuitiv besagt, daß  $x$  “links von”  $y$  liegt. Außerdem betrachten wir auf der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen die 2-stelligen Operationen  $+$  (Addition) und  $\cdot$  (Multiplikation), für die wir Infixnotation  $x + y$  und  $x \cdot y$  verwenden, wobei wir statt  $x \cdot y$  meist einfach  $xy$  schreiben.

Wir werden die reellen Zahlen nicht “konstruieren”, sondern durch Axiome beschreiben. Dabei gehen wir schrittweise vor und präsentieren vorerst die

### Körperaxiome

$$(A1) \quad a + b = b + a$$

$$(A2) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(A3) \quad \text{es gibt ein } 0 \in \mathbb{R}, \text{ sodaß } a + 0 = a \text{ für alle } a \in \mathbb{R}$$

$$(A4) \quad \text{zu jedem } a \in \mathbb{R} \text{ gibt es (genau) ein } -a \in \mathbb{R} \text{ mit } a + (-a) = 0$$

$$(A5) \quad ab = ba$$

$$(A6) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$(A7) \quad \text{es gibt ein } 1 \in \mathbb{R}, \text{ sodaß } a1 = a \text{ für alle } a \in \mathbb{R}$$

$$(A8) \quad \text{zu jedem } a \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0 \text{ gibt es (genau) ein } \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \text{ mit } a\frac{1}{a} = 1$$

$$(A9) \quad (a + b)c = ac + bc$$

(A1) und (A2) heißen Kommutativ- bzw. Assoziativgesetz für die Addition. (A3) besagt, daß es für die Addition ein neutrales Element 0 gibt. Dieses neutrale Element ist eindeutig, da wenn  $0'$  ein weiteres neutrales Element für die Addition ist, dann gilt  $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$ . (A4) besagt, daß es für die Addition zu jedem Element ein eindeutiges inverses Element (bzgl. der Addition) gibt.

(A5) und (A6) heissen Kommutativ- bzw. Assoziativgesetz für die Multiplikation.  
 (A7) behauptet die Existenz eines neutralen Elements 1 für die Multiplikation.  
 (A8) behauptet die Existenz eines multiplikativen Inversen  $\frac{1}{a}$  zu jedem von 0 verschiedenen  $a \in \mathbb{R}$ . Oft schreiben wir statt  $\frac{1}{a}$  auch  $a^{-1}$ , was sich später beim Rechnen mit Potenzen als nützlich erweisen wird. (A9) heißt Distributivgesetz.

### *Bezeichnungen für Teilmengen von $\mathbb{R}$*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  ist die kleinste Teilmenge  $N$  von  $\mathbb{R}$ , sodaß  $1 \in N$  und  $x+1 \in N$ , wann immer  $x \in N$ . Wir schreiben  $\mathbb{N}_0$  für  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Je nach Geschmack bezeichnet man  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}_0$  als Menge der *natürlichen* Zahlen. Die Menge der *ganzen* Zahlen ist  $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Die Menge der *rationalen* Zahlen ist  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\}$ .

Eine wichtige Beziehung zwischen reellen Zahlen ist die Ordungsrelation  $<$ , für die wir folgende Axiome postulieren.

### **Anordnungsaxiome**

Für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt

- (A10) genau eine der Beziehungen  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$
- (A11) aus  $a < b$  und  $b < c$  folgt  $a < c$
- (A12) aus  $a < b$  folgt  $a + c < b + c$
- (A13) aus  $a < b$  und  $0 < c$  folgt  $ac < bc$ .

Wir schreiben  $a \leq b$  als Abkürzung für  $a < b$  oder  $a = b$ . Man zeigt leicht, daß

- (i) aus  $a \leq b$  und  $x \leq y$  folgt  $a + x \leq b + y$
- (ii) aus  $a \leq b$  folgt  $-b \leq -a$
- (iii) aus  $0 < a \leq b$  folgt  $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

### *Schreibweisen für Intervalle*

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  (mit  $a \leq b$ ) heißt

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall mit Randpunkten  $a$  und  $b$ . Oft erweist es sich als nützlich auch folgende Intervalle zu betrachten

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

wobei letzteres das offene Intervall mit Randpunkten  $a$  und  $b$  heißt. Obwohl  $\infty$  (“unendlich”) definitiv kein Element aus  $\mathbb{R}$  ist, verwendet man oft dieses Symbol (aus historischen Gründen), etwa um (teilweise) unbeschränkte Intervalle zu bezeichnen wie in

$$[a, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad ]a, \infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

und analog  $]-\infty, a]$  und  $]-\infty, a[$ .

### Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

**Definition I.2.1** Eine obere Schranke einer Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  ist ein  $s \in \mathbb{R}$  mit  $\forall x \in A \ x \leq s$ , wofür wir abkürzend schreiben  $A \leq s$ . Die Menge  $A$  heißt nach oben beschränkt, wenn  $\exists s \in \mathbb{R} \ A \leq s$ .

Analog definiert man untere Schranke und nach unten beschränkt.

Beispielsweise ist  $\{r \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq [-2, 2]$  und somit nach unten und oben beschränkt.

**Definition I.2.2** Eine reelle Zahl  $s$  heißt Supremum von  $A \subseteq \mathbb{R}$ , falls  $s$  kleinste obere Schranke von  $A$  ist, d.h.  $A \leq s \wedge \forall t \in \mathbb{R} (A \leq t \Rightarrow s \leq t)$ . Das eindeutig definierte Supremum von  $A$  bezeichnen wir mit  $\sup A$  (sofern es existiert). Analog definiert man das Infimum einer Menge  $A$  als die größte untere Schranke von  $A$  und bezeichnet es mit  $\inf A$  (sofern es existiert).

**Beispiel I.2.3** Die Menge  $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$  hat kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ .

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß keine rationale Zahl  $p$  existiert mit  $p^2 = 2$ . Zum Zwecke des Widerspruchs nehmen wir an  $p = \frac{n}{m}$  mit  $p^2 = 2$ , wobei  $n$  und  $m$  teilerfremde natürliche Zahlen sind. Es gilt dann  $n^2 = 2m^2$ . Also ist  $n$  gerade (da das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist). Somit existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $n = 2k$ . Es gilt dann  $4k^2 = 2m^2$  und somit  $2k^2 = m^2$ . Also ist auch  $m$  gerade im Widerspruch zur Annahme, daß  $n$  und  $m$  teilerfremd seien.

Als nächstes zeigen wir, daß  $A$  kein größtes Element hat. Angenommen  $r \in A$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $r > 0$  (da  $1 \in A$ ). Wir suchen nun nach einer rationalen Zahl  $h$  mit  $0 < h < 1$ , sodaß  $r + h \in A$ . Es gilt

$$(r + h)^2 < 2 \Leftrightarrow r^2 + 2rh + h^2 < 2 \stackrel{0 \leq h \leq 1}{\Leftrightarrow} r^2 + 2rh + h < 2 \Leftrightarrow h < \frac{2 - r^2}{2r + 1}$$

Da  $r^2 < 2$  und  $r > 0$  gilt  $\frac{2 - r^2}{2r + 1} > 0$ . Sei  $h$  das Minimum von  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2 - r^2}{2r + 1}$  und  $\frac{1}{2}$ . Dann ist  $h$  eine rationale Zahl mit  $0 < h < 1$  und  $(r + h)^2 < 2$  und somit  $r + h \in A$  mit  $r < r + h$ .

Analog zeigt man, daß die Menge  $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r \wedge 2 < r^2\}$  kein kleinstes Element hat. Da aber jede obere Schranke von  $A$  in der Menge  $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r \wedge 2 < r^2\}$  liegt, folgt nun, daß  $A$  keine kleinste obere Schranke in  $\mathbb{Q}$  hat.  $\square$

Die obigen Argumente lassen sich so umschreiben, daß man zeigen kann, daß

- (i)  $\{x \in ]0, \infty \mid x^2 < 2\}$  kein größtes und
- (ii)  $\{x \in ]0, \infty \mid x^2 > 2\}$  kein kleinstes Element hat.

Also ist das Supremum von  $A$  in  $\mathbb{R}$  (falls es existiert) gleich  $\sqrt{2}$ .

Somit wird die Existenz von  $\sqrt{2}$  durch folgendes

### Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$

Jede nichtleere beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt in  $\mathbb{R}$  ein Supremum.

sichergestellt. Obiges Argument für die Existenz von  $\sqrt{2}$  kann man dahingehend modifizieren, daß für  $a > 0$  die Quadratwurzel  $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$ . Da auch  $0^2 = 0$ , besitzt also jede reelle Zahl  $a \geq 0$  eine eindeutig bestimmte Quadratwurzel  $\sqrt{a}$ .

Eine weitere wichtige Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms ist das sogenannte **Archimedische Prinzip**, das besagt, daß

$$\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} x < n)$$

d.h. jede positive reelle Zahl liegt unterhalb einer natürlichen Zahl.

*Beweis:* Angenommen es gäbe eine reelle Zahl  $x > 0$ , sodaß  $\forall n \in \mathbb{N} n \leq x$ . Dann besitzt aufgrund des Vollständigkeitsaxioms die Menge  $\mathbb{N}$  ein Supremum  $s$ . Dann ist aber  $s - 1$  keine obere Schranke von  $\mathbb{N}$  und somit existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $s - 1 < n$ . Für dieses  $n$  gilt dann aber  $s < n + 1 \leq s$ , was unmöglich ist.  $\square$

Man beachte, daß dieser Beweis einem nicht ermöglicht, für gegebenes  $x > 0$  eine natürliche Zahl  $n > x$  zu konstruieren, da der Beweis hochgradig indirekt ist.

Eine Konsequenz des Archimedischen Prinzips ist, daß zu jeder reellen Zahl  $a > 0$  eine natürliche Zahl  $n$  existiert mit  $\frac{1}{n} < a$ .

**Beispiel I.2.4** Die Menge  $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  hat Supremum 2 und Infimum 1, da  $\frac{1}{n} = (1 + \frac{1}{n}) - 1$  beliebig klein wird.

## I.3 Vollständige Induktion und rekursive Definitionen

Die Menge  $\mathbb{N}_0$  ist die kleinste Menge  $M$  mit  $0 \in M$  und  $\forall x \in M x+1 \in M$ . Daraus ergibt sich unmittelbar das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion**, das besagt, daß  $\forall n \in \mathbb{N}_0 A(n)$  (genau dann) gilt, wenn

$$\begin{array}{ll} \text{(Induktionsanfang)} & A(0) \\ \text{(Induktionsschritt)} & \forall x \in \mathbb{N}_0 (A(x) \Rightarrow A(x+1)) \end{array}$$

In (Induktionsschritt) heißt  $A(x)$  Induktionshypothese (IH).

Eine nützliche Variation dieses Beweisprinzips besagt, daß  $\forall n \geq n_0 A(n)$  gilt, falls

$$\begin{array}{ll} \text{(Induktionsanfang)} & A(n_0) \\ \text{(Induktionsschritt)} & \forall x \in \mathbb{N}_0 (x \geq n_0 \wedge A(x) \Rightarrow A(x+1)) \end{array}$$

Als erste Anwendung des Induktionsprinzip beweisen wir

**Satz I.3.1** (Bernoullische Ungleichung)

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall x \in ]-1, \infty[ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

*Beweis:* Offenbar gilt  $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$ , womit der Induktionsanfang bewiesen ist.

Um den Induktionsschritt zu beweisen, nehmen wir als Induktionshypothese (IH) an, daß  $(1+x)^n \geq 1 + nx$  für alle  $x \in ]-1, \infty[$ . Es gilt dann für alle  $x \in ]-1, \infty[$ , daß

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

wobei die erste Ungleichung aus IH folgt.  $\square$

Ein klassisches Beispiel eines Induktionsbeweises ist folgendes.

**Satz I.3.2**

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Beweis:* Offenbar gilt die Aussage für  $n = 0$ .

Wir nehmen als IH an, es gelte die Aussage für  $n$ . Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

womit der Induktionsschritt bewiesen ist.  $\square$

Oft ist auch folgendes abgeleitetes Induktionsprinzip von großem Nutzen.

**Satz I.3.3** Sei  $A \subseteq \mathbb{N}_0$ . Dann folgt aus  $\forall n \in \mathbb{N}_0 (\forall k < n. A(k)) \Rightarrow A(n)$ , daß  $\forall n \in \mathbb{N}_0. A(n)$ .

*Beweis:* Angenommen es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0. (\forall k < n. A(k)) \Rightarrow A(n) \quad (\dagger)$$

Wir betrachten das Prädikat  $B(n) \equiv \forall k < n. A(k)$ . Wir zeigen nun mit Induktion, daß  $\forall n. B(n)$ , woraus offensichtlich  $\forall n \in \mathbb{N}_0. A(n)$  folgt.

Es gilt  $B(0)$ , da keine natürliche Zahl  $< 0$  ist.

Nehmen wir als IH an, daß  $B(n)$ . Dann gilt wegen  $(\dagger)$ , daß  $A(n)$ . Somit gilt  $\forall k < n + 1. A(k)$ , d.h.  $B(n + 1)$ .  $\square$

## Rekursive Definitionen

Um eine Folge  $(a_n)_{n \geq n_0}$  zu definieren, genügt es  $a_{n_0}$  anzugeben und eine Vorschrift festzulegen, die angibt, wie man  $a_{n+1}$  aus  $a_{n_0}, \dots, a_n$  konstruiert. Dies ist eine in der Informatik übliche Vorgangsweise, mit der man aber auch grundlegende arithmetische Operationen definieren kann.

### Beispiel I.3.4

(1) *Summe, Produkt und Potenzen kann man wie folgt rekursiv definieren*

$$\begin{array}{ll} m + 0 = m & m + (n + 1) = (m + n) + 1 \\ m \cdot 0 = 0 & m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \\ a^0 = 1 & a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \end{array}$$

(2) *die Fakultätsfunktion definiert man wie folgt*

$$0! = 1 \quad (n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$$

(3) *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegebene Folge reeller Zahlen, dann sind (endliche) Summen und Produkte wie folgt definiert*

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=n_0}^{n_0} a_k = a_{n_0} & \sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \sum_{k=n_0}^n a_k + a_{n+1} \\ \prod_{k=n_0}^{n_0} a_k = a_{n_0} & \prod_{k=n_0}^{n+1} a_k = \prod_{k=n_0}^n a_k \cdot a_{n+1} \end{array}$$

## I.4 Funktionen

Um den Begriff einer Funktion formulieren zu können, bedarf es des Begriffs eines geordneten Paars. Für Objekte  $x$  und  $y$  bezeichnen wir mit  $(x, y)$  das geordnete Paar, dessen erste Komponente  $x$  und dessen zweite Komponente  $y$  ist. Für uns ist “geordnetes Paar” ein Grundbegriff, jedoch kann man ihn im Rahmen der Mengenlehre auf Mengen zurückführen, indem man K. Kuratowski folgend  $(x, y)$  gleich  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  setzt. Das wichtige an geordneten Paaren ist, daß man aus ihnen ihre Komponenten eindeutig ablesen kann, d.h., daß aus  $(x, y) = (x', y')$  folgt  $x = x'$  und  $y = y'$  (was nachweislich der Fall ist, wenn man die Kuratowskische Paarcodierung zugrundelegt). Insbesondere ist  $(x, y) \neq (y, x)$ , sofern  $x \neq y$ .

**Definition I.4.1** Für Mengen  $A$  und  $B$  ist ihr kartesisches Produkt definiert als

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Eine Relation von  $A$  nach  $B$  ist eine Teilmenge  $R \subseteq A \times B$ .

Beispielsweise ist  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$  eine Relation von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Wir führen nun Funktionen als spezielle Relationen ein.

**Definition I.4.2** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine Funktion von  $A$  nach  $B$  ist gegeben durch eine Menge  $G \subseteq A \times B$ , sodaß

$$\forall x \in A \exists^1 y \in B (x, y) \in G$$

Die Funktion selbst wird beschrieben durch das Tripel  $f = (A, B, G)$ , wobei wir  $D(f) = A$  als Definitionsbereich von  $f$ ,  $W(f) = B$  als Wertebereich von  $f$  und  $\text{graph}(f) = G$  als den Graph von  $f$  bezeichnen. Für  $x \in A$  bezeichnen wir mit  $f(x)$  das eindeutig bestimmte  $y \in B$  mit  $(x, y) \in \text{graph}(f)$ .

Funktionen  $f$  und  $g$  heißen gleich, wenn  $D(f) = D(g)$ ,  $W(f) = W(g)$  und  $\text{graph}(f) = \text{graph}(g)$ .

Um auszudrücken, daß  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$  ist, schreiben wir  $f : A \rightarrow B$ . Wenn  $f : A \rightarrow B$ , so ist ihr Bild definiert als  $B(f) = \{y \in B \mid \exists x \in D(f) f(x) = y\}$ . Offenbar ist  $B(f) \subseteq W(f)$  aber i.a.  $W(f) \neq B(f)$ . Für  $y \in B$  sei  $f^{-1}(y)$ , das Urbild von  $y$  bzgl.  $f$ , definiert als  $\{x \in D(f) \mid f(x) = y\}$ . Für  $X \subseteq A$  und  $Y \subseteq B$  heißt

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \quad \text{Bild von } X \text{ unter } f \text{ und}$$

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \quad \text{Urbild von } Y \text{ bzgl. } f.$$

**Beispiel I.4.3**

i)  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$  sind verschiedene Funktionen, da  $D(f) \neq D(g)$ .

$g$  heißt Erweiterung von  $f$ , wenn  $D(f) \subseteq D(g)$  und  $\forall x \in D(f) f(x) = g(x)$ . In diesem Fall heißt  $f$  auch Einschränkung von  $g$  auf  $D(f)$ .

ii) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } 0 \leq x \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

Die so definierte Funktion  $f$  heißt Betragsfunktion und wir schreiben  $|x|$  abkürzend für  $f(x)$ .

iii) Die Signums- oder Vorzeichenfunktion  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$  sei definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 < x \\ 0 & \text{wenn } 0 = x \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Folgende Eigenschaften von Funktionen sind wichtig.

**Definition I.4.4** Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt

injektiv, wenn  $\forall x_1, x_2 \in A (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

surjektiv, wenn  $\forall y \in B \exists x \in A f(x) = y$

bijektiv, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h.  $\forall y \in B \exists^1 x \in A f(x) = y$ .

Mengen  $A$  und  $B$  heißen gleichmächtig, wenn es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.<sup>4</sup>

**Beispiel I.4.5** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  ist weder injektiv noch surjektiv. Die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[ : x \mapsto x^2$  ist surjektiv, aber nicht injektiv. Die Funktion  $h : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist injektiv, wenn es zu jedem  $y \in B$  höchstens ein  $x \in A$  gibt mit  $f(x) = y$ , und  $f$  ist surjektiv, wenn es zu jedem  $y \in B$  mindestens ein  $x \in A$  gibt mit  $f(x) = y$ .

**Definition I.4.6** Sei  $f : A \rightarrow B$  injektiv, dann bezeichne  $f^{-1}$  diejenige Funktion  $g$  von  $B(f)$  nach  $A$ , sodaß  $g(y) = x$  genau dann, wenn  $f(x) = y$ .

Offenbar ist  $f^{-1} : W(f) \rightarrow A$  bijektiv!

---

<sup>4</sup>Im allgemeinen gibt es zwischen gleichmächtigen Mengen  $A$  und  $B$  viele verschiedene Bijektionen!

**Beispiel I.4.7** Sei  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ : x \mapsto x^2$ , dann ist  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

**Definition I.4.8** Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$ , dann heißt

$$g \circ f : A \rightarrow C : x \mapsto g(f(x))$$

Komposition (Verkettung, Hintereinanderausführung) von  $f$  und  $g$ .

Die Funktion von  $A$  nach  $C$ , die  $x \in A$  auf  $x$  abbildet, heißt identische Funktion oder Identität auf  $A$  und wird mit  $\text{id}_A$  bezeichnet.

Man beachte, daß  $g \circ f$  genau dann definiert ist, wenn  $W(f) = D(g)$ .

Für  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  und  $h : C \rightarrow D$  gilt offenbar

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

und auch

$$f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$$

**Beispiel I.4.9** Obwohl die Funktionskomposition assoziativ ist, ist sie im allgemeinen nicht kommutativ, wie folgendes Beispiel zeigt. Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 2x - 1$  und  $g(x) = x^2$ , dann gilt  $(g \circ f)(0) = 1 \neq -1 = (f \circ g)(0)$ .

## I.5 Die Ebene

### I.5.1 Kartesische Koordinaten

Die Ebene wird üblicherweise mit der Menge  $\mathbb{R}^2$  identifiziert, wobei man folgendermaßen vorgeht. Man wählt in der Ebene einen Ursprungspunkt  $O$  und eine orientierte Gerade, die durch  $O$  geht und als  $x$ -Achse bezeichnet wird. Die orientierte Gerade durch  $O$ , die man durch Drehung der  $x$ -Achse um einen rechten Winkel entgegen dem Urzeigersinn erhält, nennt man  $y$ -Achse. Die Koordinaten<sup>5</sup>  $(x_0, y_0)$  eines Punktes  $P_0$  der Ebene erhält man, indem man von  $P_0$  aus das Lot auf die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse fällt und den Abstand zum Ursprung mißt. Diese Identifikation der Ebene mit  $\mathbb{R}^2$  erlaubt einem

- (1) die geometrische Veranschaulichung von Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  als Teilmengen der Ebene und andererseits
- (2) die Beschreibung geometrischer Gebilde in der Ebene als Lösungsmengen von Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen.

### I.5.2 Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann man die Menge

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

betrachten. Wir nennen  $f(x, y) = 0$  eine Gleichung der Menge  $C$  und wir nennen  $C$  die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x, y) = 0$ . Analog können wir vorgehen für Ungleichungen der Gestalt  $f(x, y) \leq 0$  bzw.  $f(x, y) \geq 0$ . Wir können Teilmengen auch als Lösungsmengen von *Systemen* von Gleichungen bzw. Ungleichungen beschreiben.

Wir betrachten nun einige Beispiele.

#### Beispiel I.5.1

- (1) Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Graph von  $f$  die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x) - y = 0$ .
- (2) Die Gerade durch die verschiedenen Punkte  $A = (a_1, a_2)$  und  $B = (b_1, b_2)$  wird beschrieben als Lösungsmenge der Gleichung

$$(b_1 - a_1)(y - a_2) - (b_2 - a_2)(x - a_1) = 0$$

Wenn  $a_1 \neq b_1$ , dann ist diese Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + a_2$$

---

<sup>5</sup>diese Idee geht auf den franz. Philosophen und Mathematiker René Descartes zurück und deshalb werden die Koordinaten eines Punktes auch als *kartesische* Koordinaten bezeichnet

d.h. der üblichen Gleichung für die Gerade durch die Punkte A und B. Andernfalls, wenn  $a_1 = b_1$ , erhält man die Gleichung  $x = a_1$ , welche in diesem Fall auch die Gerade durch A und B beschreibt.

- (3) Der Kreis um den Mittelpunkt  $A = (a_1, a_2)$  mit Radius  $r > 0$  wird beschrieben durch die Gleichung

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - r^2 = 0$$

Die Lösungsmenge  $C_{A,r}$  dieser Gleichung ist kein Funktionsgraph, da für  $|x| < r$  es zwei verschieden  $y_1$  und  $y_2$  gibt, sodaß  $(x, y_1), (x, y_2) \in C_{A,r}$ .

Für  $r = 1$  nennen wir die Lösungsmenge Einheitskreis um den Punkt A.

- (4) Wir betrachten die Funktion  $f(x, y) = (b_1 - a_1)(y - a_2) - (b_2 - a_2)(x - a_1)$ . Für die Lösungsmenge C der Ungleichung  $f(x, y) \geq 0$  gilt im Falle  $a_1 \leq b_1$ , daß für alle  $z \geq 0$

$$\begin{aligned} (x, y) \in C &\implies (x, y + z) \in C \\ (x, y) \notin C &\implies (x, y - z) \notin C \end{aligned}$$

d.h. C besteht aus den Punkten oberhalb der durch  $f(x, y) = 0$  beschriebenen Geraden. Wenn  $b_1 < a_1$ , besteht C aus der Menge der Punkte unterhalb der durch  $f(x, y) = 0$  beschriebenen Geraden.

Mengen dieser Art nennt man Halbebenen. Durch Schnitte mehrerer Halbebenen erhält man n-Ecke (Polygone), Kegel, Streifen etc.

### I.5.3 Winkel und Winkelfunktionen

Ein Winkel  $\alpha \in \mathbb{R}$  entsteht durch Drehung eines Zeigers (der Länge 1) um seinen Ursprung, wobei  $|\alpha|$  die Länge des zugehörigen Einheitsbogens<sup>6</sup> und das Vorzeichen den Drehsinn angibt ( $\geq 0$  heißt entgegen dem Urzeigersinn).

Wenn man den Punkt  $(1, 0)$  um den Winkel  $\alpha$  entgegen dem Urzeigersinn dreht, erhält man einen Punkt mit den Koordinaten  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Die entsprechenden Funktionen  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißen Cosinus- bzw. Sinusfunktion. Offenbar ist  $B(\cos) = [-1, 1] = B(\sin)$ . Mit  $\pi$  bezeichnen wir die kleinste Zahl  $\alpha > 0$  mit  $\sin \alpha = 0$ . Es gilt  $\cos \pi = -1$ . Es gilt  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  und  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Es gilt  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$ . Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

---

<sup>6</sup>Es ist in der Mathematik üblich, die Größe eines Winkels nicht in Grad, sondern durch die Länge des entsprechenden Bogens am Einheitskreis anzugeben. Einem Winkel von  $a$  Grad entspricht die Bogenlänge  $\alpha = \pi \cdot \frac{a}{180}$ .

und außerdem

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Aufgrund des Satzes von Pythagoras gilt

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Außerdem gelten folgende Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

die wir jedoch erst später begründen werden.

#### I.5.4 Drehung eines Punktes

Gegeben sei ein Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Die Koordinaten des Punktes  $(x'_0, y'_0)$ , den man erhält, indem man  $P_0$  um den Winkel  $\beta$  entgegen dem Urzeigersinn um den Ursprung  $O = (0, 0)$  dreht, berechnet man folgendermaßen

$$x'_0 = r \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad y'_0 = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

wobei  $\alpha \in [0, 2\pi]$  mit  $x_0 = r \cdot \cos \alpha$  und  $y_0 = r \cdot \sin \alpha$  (“Polarendarstellung” des Punktes  $P_0$ ). Mithilfe der Additionstheoreme kann man leicht nachrechnen, daß

$$x'_0 = x_0 \cdot \cos \beta - y_0 \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad y'_0 = x_0 \cdot \sin \beta + y_0 \cdot \cos \beta$$

### I.6 Die komplexen Zahlen

Aus den Anordnungsaxiomen für  $\mathbb{R}$  sieht man, daß die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  keine Lösung in  $\mathbb{R}$  hat. Deshalb ist es nützlich einen minimalen Körper  $\mathbb{C}$  zu konstruieren, der den Körper  $\mathbb{R}$  als Teilkörper enthält und außerdem eine Zahl  $i \in \mathbb{C}$  mit  $i^2 = -1$ . Dies läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen.

**Definition I.6.1** Wir definieren  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (die sogenannte Gaußsche Zahleebene). Für  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  heißt  $x$  Realteil (Not.  $\Re(z)$ ) und  $y$  Imaginärteil (Not.  $\Im(z)$ ) von  $z$ . Die Zahl  $(0, 1) \in \mathbb{C}$  heißt imaginäre Einheit und wird mit  $i$  bezeichnet.

Auf  $\mathbb{C}$  seien Addition und Multiplikation wie folgt definiert: für  $z_1 = (x_1, y_1)$  und  $z_2 = (x_2, y_2)$  sei

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Man kann nachrechnen, daß die so definierten Operationen  $+$  und  $\cdot$  auf  $\mathbb{C}$  die Körperaxiome erfüllen. Außerdem gilt  $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$  und  $(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0)$ . Aus diesem Grund werden wir im weiteren  $x \in \mathbb{R}$  mit  $(x, 0) \in \mathbb{C}$  identifizieren. Unter Verwendung dieser Konvention gilt für  $z = (x, y)$ , daß  $z = x + iy$  (wie man leicht nachrechnet) und somit

$$z = \Re(z) + i \cdot \Im(z)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Man rechnet leicht nach, daß  $i^2 = -1$ .

Da komplexe Zahlen als Punkte in der (Gaußschen) Zahlenebene aufgefaßt werden können (und sollen!) kann man Addition und Multiplikation in  $\mathbb{C}$  auch geometrisch interpretieren. Offenbar entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition. Mithilfe der Additionstheoreme aus dem vorigen Unterabschnitt kann man leicht nachrechnen, daß

$$(r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha) \cdot (s \cdot \cos \beta, s \cdot \sin \beta) = (rs \cdot \cos(\alpha + \beta), rs \cdot \sin(\alpha + \beta))$$

d.h. man *multipliziert* komplexe Zahlen, indem man *ihre Längen multipliziert* und *ihre Winkel addiert*. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß die Lösungsmenge der Gleichung  $z^2 + 1 = 0$  gleich  $\{i, -i\}$  ist.

**Definition I.6.2** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Der Betrag von  $z$  ist definiert als  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .<sup>7</sup> Die konjugiert komplexe Zahl zu  $z$  ist definiert als  $\bar{z} = x - iy$ .<sup>8</sup>

Offenbar gilt  $\bar{\bar{z}} = z$  und  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$ . Außerdem kann man die Real- und Imaginärteile einer komplexen Zahl durch folgende Formeln berechnen

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \Im(z) = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

Folgende Rechenregeln für komplexe Zahlen sind sehr nützlich.

**Satz I.6.3** Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt

- i)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- (ii)  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$
- (iii)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{bekannt als "Dreiecksungleichung"}$
- (iv)  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

---

<sup>7</sup>d.h. die Länge des Vektors  $(x, y)$  im Sinne des Euklidischen Abstands begriffs, wie er aus der Schule vertraut ist

<sup>8</sup>somit entspricht das Konjugieren einer komplexen Zahl der Spiegelung an der  $x$ -Achse

*Beweis:* Seien  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Behauptung (i) ist klar. Behauptung (ii) sieht man wie folgt

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1z_2}$$

Behauptung (iv) beweist man, indem man nachrechnet, daß  $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$ . Am aufwendigsten ist der Nachweis von (iii). Zuerst beobachten wir, daß  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  äquivalent ist zu

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2$$

Also genügt es zu zeigen, daß

$$(1) \quad x_1x_2 + y_1y_2 \leq |z_1|\cdot|z_2|$$

wofür es ausreicht zu zeigen, daß

$$(2) \quad (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq |z_1|^2|z_2|^2$$

Man rechnet nun leicht nach, daß

$$(3) \quad (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$$

$$(4) \quad |z_1|^2|z_2|^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

Also reicht es zu zeigen, daß

$$(5) \quad 2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

Es gilt aber

$$0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2$$

woraus unmittelbar (5) folgt.  $\square$

Für eine komplexe Zahl  $z \neq 0$  ist  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . Also gilt für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $z_2 \neq 0$ , daß  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ .

#### Beispiel I.6.4

$$\frac{2+4i}{1-3i} = \frac{1}{1^2+3^2}(2+4i)(1+3i) = \frac{1}{10}(-10+10i) = -1+i$$

Wie für die reellen Zahlen kann man auch für komplexe Zahlen ganzzahlige Potenzen wie folgt definieren. Für  $z \in \mathbb{C}$  sei  $z^0 = 1$  und  $z^{n+1} = z^n \cdot z$  ( $n \geq 0$ ). Falls  $z \neq 0$  und  $n > 1$  sei  $z^{-n} = (\frac{1}{z})^n$ .

Wir diskutieren nun für  $n \in \mathbb{N}$  die Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$  in  $\mathbb{C}$ . Da  $|z^n| = |z|^n$ , folgt aus  $z^n = 1$ , daß  $|z| = 1$ . Deshalb nennt man die Lösungen von  $z^n = 1$  auch  $n$ -te Einheitswurzeln. Aufgrund der geometrischen Interpretation der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  gilt die sogenannte **de Moivresche Formel**

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^k = \cos k\alpha + i \sin k\alpha$$

woraus wir erschließen, daß es genau  $n$   $n$ -te Einheitswurzeln gibt, nämlich

$$z_k = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2k\pi}{n} \right)$$

für  $k = 0, \dots, n - 1$ .

Wichtig in diesem Zusammenhang ist die **Eulersche Formel**

$$\exp(i\phi) = \cos \phi + i \sin \phi \quad (\phi \in \mathbb{R})$$

wobei  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diejenige stetige Funktion ist, für die gilt

$$\exp(0) = 1 \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

Der Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit dieser Exponentialfunktion im Komplexen übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Sie stimmt jedoch für reelle Argumente mit der später definierten Exponentialfunktion überein. Es ist eine leichte Übung, aus der Eulerschen Formel die Additionstheoreme für Winkelfunktionen herzuleiten.

## II Konvergenz und Stetigkeit

In diesem Abschnitt behandeln wir die grundlegenden Begriffe der Analysis, nämlich Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen und darauf basierend die Stetigkeit von Funktionen, die (Teilmengen) reelle(r) Zahlen auf reelle Zahlen abbilden.

### II.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Intuitiv ist eine Folge reeller Zahlen “etwas” der Gestalt

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

wobei die  $a_i$  reelle Zahlen sind. Rein mathematisch kann man dies aber wie folgt auf den Funktionsbegriff zurückführen.

**Definition II.1.1** Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion

$$a : \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n_0 \leq n \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

wobei  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ . Wir schreiben üblicherweise  $a_n$  für  $a(n)$  und oft  $(a_n)_{n_0 \leq n}$  oder einfach nur  $(a_n)$  für die Folge  $a$ .

Wir betrachten nun einige Beispiele von Folgen reeller Zahlen.

**Beispiel II.1.2** Wir betrachten zuerst explizit definierte Folgen

- (i)  $a_n = c \in \mathbb{R}$  für  $n \geq 0$  (**konstante Folge mit Wert c**)
- (ii)  $b_n = (-1)^n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$  ( $n \geq 1$ )
- (iii)  $c_n = c_0 q^n$  ( $n \geq 0$ ) für  $c_0, q \in \mathbb{R}$  (**geometrische Folge**)
- (iv)  $d_n = (-1)^n$  ( $n \geq 0$ )

Es gibt aber auch rekursiv definierte Folgen

- (v)  $e_0 = 1$  und  $e_{n+1} = (n + 1) \cdot e_n$
- (vi)  $f_0 = f_1 = 1$  und  $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$  heißt **Fibonacci Folge**.

**Definition II.1.3** Eine Folge  $a = (a_n)_{n_0 \leq n}$  heißt nach unten/oben beschränkt, falls die Menge  $\{a_n \mid n_0 \leq n\}$  nach unten/oben beschränkt ist. Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach unten und oben beschränkt ist.

Von den Folgen aus Beispiel II.1.2 sind (i), (ii), (iv) beschränkt, (v) und (vi) unbeschränkt und bei (iii) hängt es von der Wahl der Parameter  $c_0$  und  $q$  ab (Übung!).

**Definition II.1.4** (Folgenkonvergenz)

Eine Folge  $a = (a_n)_{n_0 \leq n}$  konvergiert gegen eine reelle Zahl  $b$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq n_0 \forall n \geq N |a_n - b| < \varepsilon$$

gilt, d.h. für jede (noch so kleine) reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  liegen "fast alle", d.h. alle bis auf endlich viele, Folgenglieder in der  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(b) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - b| < \varepsilon\}$  von  $b$ . Wir nennen so ein  $b$  auch Grenzwert der Folge  $a$ .

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , um auszudrücken, daß  $b$  ein Grenzwert von  $a$  ist. Folgen mit Grenzwert 0 nennt man oft auch Nullfolgen.

**Satz II.1.5**

- (1) Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.
- (2) Eine konvergente Folge ist immer beschränkt.

*Beweis:* (1) : Angenommen  $b_1$  und  $b_2$  seien Grenzwerte der Folge  $a$ . Für  $\varepsilon > 0$  gibt es  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$ , sodaß

$$\forall n \geq N_i |a_n - b| < \varepsilon$$

für  $i = 1, 2$ . Für  $n = \max(N_1, N_2)$  gilt dann, daß

$$|b_1 - b_2| \leq |b_1 - a_n| + |a_n - b_2| < 2\varepsilon$$

Also haben wir gezeigt, daß  $\forall \varepsilon > 0 |b_1 - b_2| < \varepsilon$ , woraus folgt, daß  $b_1 = b_2$  wie behauptet.

(2) Sei  $a$  eine Folge mit Grenzwert  $b$ . Es gibt dann ein  $N \in \mathbb{N}_0$  mit  $\forall n \geq N |a_n - b| < 1$ , also  $\forall n \geq N a_n < b + 1$ . Somit ist die Folge  $a$  nach oben beschränkt durch  $\max(a_0, \dots, a_{N-1}, b + 1)$ . Analog zeigt man, daß  $a$  nach unten beschränkt ist.  $\square$

Aus der ersten Behauptung von diesem Satz folgt, daß die Notation  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  sinnvoll ist, da es ja höchstens ein  $b \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ .

Als nächstes diskutieren wir die Konvergenz der meisten in Beispiel II.1.2 betrachteten Folgen.

**Beispiel II.1.6**

- (1) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge mit  $a_n = c$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , da für  $\varepsilon > 0$  man  $N = 0$  wählen kann, denn für alle  $n \geq 0$  gilt  $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ .

- (2) Sei  $b_n = (-1)^n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir müssen ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  finden, sodaß für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt  $|b_n| = |b_n - 0| < \varepsilon$ . Da  $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , genügt es ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  zu finden, sodaß  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Es ist aber  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  äquivalent zu  $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$ . Somit reicht es für  $n_\varepsilon$  eine Zahl natürliche Zahl  $n$  zu wählen mit  $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$ . Dies ist aber aufgrund des archimedischen Prinzips möglich.
- (3) Sei  $d_n = (-1)^n$ . Wir zeigen, daß die Folge  $(d_n)$  keinen Grenzwert hat. Angenommen  $b$  sei ein Grenzwert von  $(d_n)$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für alle  $n \geq n_0$  gilt  $|d_n - b| < \frac{1}{2}$ . Also gilt für alle  $n, m \geq n_0$ , daß  $|d_n - d_m| \leq |d_n - b| + |b - d_m| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Aber für  $n = n_0$  und  $m = n_0 + 1$  gilt  $2 = |d_n - d_m| < 1$ , was nicht möglich ist.
- (4) Die in (v) und (vi) von Beispiel II.1.2 betrachteten Folgen sind nicht beschränkt und konvergieren somit nicht.

**Definition II.1.7** Eine Folge  $(a_n)$  divergiert gegen den uneigentlichen Grenzwert  $\infty$  bzw.  $-\infty$ , wenn

$$\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 a_n > K$$

bzw. wenn

$$\forall K < 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 a_n < K$$

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , wenn die Folge  $(a_n)$  gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  divergiert.

**Beispiel II.1.8** Die Folge  $d_n = (-1)^n$  divergiert, d.h. konvergiert nicht, aber sie divergiert auch nicht uneigentlich gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ . Die Folgen  $(e_n)$  und  $(f_n)$  aus Beispiel II.1.2 divergieren uneigentlich gegen  $\infty$ , da man durch Induktion nachweisen kann, daß  $e_n \geq n$  bzw.  $f_{n+1} \geq n$ .

Als nächstes beweisen wir einige nützliche Rechenregeln für konvergente Folgen.

**Satz II.1.9** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , dann gilt

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$
- (3) wenn  $b \neq 0$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

(5) wenn  $a > 0$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .<sup>9</sup>

*Beweis:* (1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , sodaß

$$(1) \forall n \geq n_1 |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und}$$

$$(2) \forall n \geq n_2 |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Setze  $n_0 = \max(n_1, n_2)$ . Es gilt dann für  $n \geq n_0$ , daß

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wie zu zeigen war.

(2) Da konvergente Folgen beschränkt sind, gibt es ein  $K > 0$  mit  $|b_n| < K$  für alle  $n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt dann  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ , sodaß

$$(1) \forall n \geq n_1 |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ und}$$

$$(2) \forall n \geq n_2 |b_n - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für  $n \geq \max(n_1, n_2)$  gilt dann

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = \\ &= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

(3) Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$  folgt die Existenz eines  $m_0 \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für alle  $n \geq m_0$  gilt, daß  $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ . Weil  $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2} < |b_n|$  für  $n \geq m_0$ . Also ist  $\frac{a_n}{b_n}$  definiert für  $n \geq m_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 \geq m_0$ , sodaß für alle  $n \geq n_0$  gilt  $|b_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}$ . Dann gilt für  $n \geq n_0$  aber auch

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon}{2} \frac{|b|^2}{|b|} \frac{1}{|b|} \frac{2}{|b|} = \varepsilon$$

wie zu zeigen war. Wegen der bereits bewiesenen Behauptung (2) des Satzes folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

(4) Folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , da  $\|a_n - a\| \leq |a_n - a|$  für alle  $n$  gilt.

(5) Da  $a > 0$  gibt es ein  $m_0$ , sodaß  $a_n > 0$  für alle  $n \geq m_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_0 (\geq m_0)$ , sodaß  $|a_n - a| < \varepsilon \sqrt{a}$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gilt für  $n \geq n_0$ , daß

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

wie zu zeigen war. □

Als Anwendung dieses Satzes zeigen wir, wie man mit seiner Hilfe Grenzwerte komplizierterer Folgen berechnet.

---

<sup>9</sup>Die Schreibweise  $\frac{1}{a_n}$  ist etwas unpräzise, da nicht alle  $a_n \geq 0$  sein müssen. Da aber der Grenzwert von  $(a_n)$  vorraussetzungsgemäß echt größer 0 ist, muß es ein  $m_0$  geben, sodaß  $a_n \geq 0$  für alle  $n \geq m_0$ . Mit  $\sqrt{a_n}$  meinen wir dann die Folge  $(\sqrt{a_n})_{m_0 \leq n}$ .

### Beispiel II.1.10

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 + 1 = 1$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{6n^4 + 3n^2 - 12}{7n^4 + 12n^3 + 6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{6 + \frac{3}{n^2} - \frac{12}{n^4}}{7 + \frac{12}{n} + \frac{6}{n^4}}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

**Satz II.1.11** (Einschließungskriterium) Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  und  $(c_n)$  Folgen mit  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für genügend große  $n$ . Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = d$ .

*Beweis:* Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt dann ein  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für alle  $n \geq N$   $|a_n - d| < \varepsilon$  und  $|b_n - d| < \varepsilon$ . Es gilt dann für  $n \geq N$ , daß

$$-\varepsilon < a_n - d < \varepsilon \quad \text{und} \quad -\varepsilon < b_n - d < \varepsilon$$

und somit, da  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , auch, daß

$$-\varepsilon < a_n - d \leq c_n - d \leq b_n - d < \varepsilon$$

d.h.  $|c_n - d| < \varepsilon$ . Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = d$ .  $\square$

**Beispiel II.1.12** Eine Folge  $(a_n)$  ist eine Nullfolge genau dann, wenn  $(|a_n|)$  eine Nullfolge ist.

*Beweis:* Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , dann gilt wegen Satz II.1.9 (4) auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |0| = 0$ .

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} -|a_n| = 0$  und somit wegen des Einschließungskriteriums auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\square$

**Satz II.1.13** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit  $a_n \leq b_n$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Beweis:* Wir schreiben  $a$  bzw.  $b$  für den Grenzwert von  $(a_n)$  bzw.  $(b_n)$ . Um zu zeigen, daß  $a \leq b$ , argumentieren wir mit Widerspruch. Angenommen  $b < a$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon := \frac{a-b}{4} > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für  $n \geq N$  gilt  $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$ . Dann gilt für  $n \geq N$ , daß  $a - b + b_n - a_n \geq a - b = 4\varepsilon$  und somit

$$4\varepsilon \leq |a - b + b_n - a_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

was unmöglich ist.  $\square$

Wir betrachten nun das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge.

**Satz II.1.14** Für  $q \in \mathbb{R}$  betrachten wir die geometrische Folge  $c_n = q^n$ . Es gilt

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  wenn  $|q| < 1$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$  wenn  $q = 1$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$  wenn  $q > 1$
- (4) für  $q \leq -1$  konvergiert  $(c_n)$  nicht und divergiert auch nicht uneigentlich gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ .

*Beweis:* (1) : Sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ . Wenn  $q = 0$ , ist klarerweise der Grenzwert 0, da  $0^n = 0$  für  $n \geq 1$ . Nehmen wir also an, daß  $|q| > 1$ . Dann ist  $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ . Wegen der Bernoullischen Ungleichung gilt dann für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , daß

$$0 \leq |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{nh}$$

und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$ , da ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = 0$ .

(2) : klar!

(3) : Sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q > 1$ . Setze  $h = q - 1 > 0$ . Wegen der Bernoullischen Ungleichung gilt  $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + nh = \infty$ , gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ .

(4) : Für  $q = -1$  ist die Folge  $q^n$  beschränkt und konvergiert nicht. Für  $q < -1$  wird  $|q|^n$  beliebig groß, woraus folgt, daß die Folge nicht konvergiert, und sie divergiert weder gegen  $\infty$  noch gegen  $-\infty$ , da die Vorzeichen der Folgenglieder alternieren.  $\square$

Als nächstes betrachten wir das Konvergenzverhalten monotoner Folgen.

**Definition II.1.15** Eine Folge  $(a_n)$  heißt monoton fallend bzw. monoton wachsend, wenn für alle  $n$  gilt, daß  $a_n \leq a_{n+1}$  bzw.  $a_n \geq a_{n+1}$ .

Obwohl beschränkte Folgen nicht notwendigerweise konvergieren, ist dies der Fall für beschränkte monotone Folgen.

**Satz II.1.16** Eine monoton wachsende bzw. fallende beschränkte Folge  $(a_n)_{n_0 \leq n}$  konvergiert gegen  $\sup_{n_0 \leq n} a_n$  bzw.  $\inf_{n_0 \leq n} a_n$ .

*Beweis:* Wir betrachten den Fall einer monoton wachsenden beschränkten Folge  $(a_n)$ . Der monoton fallende Fall ist analog zu zeigen.

Aufgrund des Vollständigkeitaxioms hat die beschränkte nichtleere Menge  $M := \{a_n \mid n_0 \leq n\}$  ein Supremum  $b$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $b$  die kleinste obere Schranke von  $M$  ist, gibt es ein  $N$  mit  $b - \varepsilon < a_N$ . Da  $(a_n)$  monoton wachsend ist, gilt auch für  $n \geq N$ , daß  $b - \varepsilon < a_n \leq b$ . Also gilt für  $n \geq N$ , daß  $a_n \in ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ . Somit konvergiert  $(a_n)$  gegen  $b$  wie behauptet.  $\square$

Dieser Satz ist unter anderem hilfreich, um die **Exponentialfunktion** à la L. Euler zu definieren.

### Satz II.1.17

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Folge  $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$  und ihr Grenzwert wird mit  $\exp(x)$  bezeichnet. Die so definierte Funktion auf  $\mathbb{R}$  heißt **Exponentialfunktion**. Alle Werte von  $\exp$  sind  $> 0$  und es gilt  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .

*Beweis:* Offenbar gilt  $\exp(0) = 1$ , da in diesem Fall alle  $a_n = 1$ .

Als nächstes zeigen wir, daß für beliebige  $x < 0$  die Folge  $(a_n)$  beschränkt ist und für genügend große  $n$  monoton wächst. Sei  $n_0$  so groß gewählt, daß  $n_0 > |x| + 1$ . Sei  $n \geq n_0$ . Für solche  $n$  gilt offenbar  $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1$ , da ja  $-1 < \frac{x}{n} < 0$ . Offenbar ist dann  $(1 + \frac{x}{n}) \leq 1^n = 1$ . Wir zeigen nun, daß  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  und somit  $a_n \leq a_{n+1}$ . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^{n+1} (1 + \frac{x}{n}) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \left( 1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} (1 + \frac{x}{n}) \geq \\ &\stackrel{(2)}{\geq} \left( 1 - (n+1) \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right) (1 + \frac{x}{n}) \stackrel{(3)}{=} 1 \end{aligned}$$

wobei wir die Schritte (1)-(3) folgendermaßen begründen.

$$ad \ (1) : \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{1 + \frac{x}{n} - (\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1})}{1 + \frac{x}{n}} = 1 - \frac{\frac{x(n+1)-xn}{n(n+1)}}{\frac{x+n}{n}} = 1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}$$

ad (2) : Da  $n+1 \geq |x|$ , gilt  $\left| \frac{x}{n+1} \right| \leq 1$  und  $n+x \geq 1$ , woraus folgt, daß  $\left| \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right| \leq 1$  und somit die Bernoullische Ungleichung anwendbar ist, die Behauptung (2) zur Folge hat.

ad (3) :

$$\begin{aligned} \left( 1 - (n+1) \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right) (1 + \frac{x}{n}) &= \left( 1 - \frac{x}{n+x} \right) (1 + \frac{x}{n}) = \\ &= 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n+x} - \frac{x^2}{n(n+x)} = \\ &= 1 + \frac{x(n+x)-nx-x^2}{n(n+x)} = 1 + 0 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist ab  $n_0$  die Folge  $(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Da ab  $n_0$  alle Folgenglieder  $> 0$  sind und die Folge monoton wachsend ist, ist der Grenzwert auch  $> 0$ .

Für  $x > 0$  betrachten wir zuzüglich zur Folge  $a_n$  auch die Folge  $b_n = (1 - \frac{x}{n})^n$ , die wegen obiger Betrachtung gegen einen Grenzwert  $c > 0$  konvergiert, da  $-x < 0$ . Es gilt außerdem  $a_n b_n = \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n$ . Für  $n > x$  gilt dann  $1 \geq a_n b_n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$ , wobei die zweite Ungleichung sich aus der Bernoullischen Ungleichung ergibt. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{x^2}{n} = 1$  folgt mithilfe des Einschließungskriteriums, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 1 \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} > 0$ . Also nimmt  $\exp$  nur echt positive Werte an. Daß  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ , ergibt sich aus dem oben gezeigten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ .  $\square$

Wir nennen  $e := \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  die **Eulersche Zahl**.

**Bemerkung** Um die Zahl  $e$  zu berechnen, können wir versuchen, den Beweis von Satz II.1.17 nutzbar zu machen. Wir betrachten die Folgen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

die gegen  $e$  bzw.  $\frac{1}{e}$  konvergieren. Da die Folge  $(b_n)$  für genügend große  $n$  monoton wachsend ist (tatsächlich ab 3 wie man aus dem Beweis von Satz II.1.17 ersieht), ist die Folge  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  für genügend große  $n$  monoton fallend.

Wir zeigen nun, daß die Folge  $a_n$  monoton wächst. Für  $n \geq 1$  gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{n+1-n-1}{n(n+1)} = 1 + 0 = \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Also ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton und durch  $e$  beschränkt (da sie gegen  $e$  konvergiert). Also gilt für  $n \geq 3$ , daß

$$a_n \leq e \leq \frac{1}{b_n}$$

Somit befindet sich für  $n \geq 3$  die Eulersche Zahl  $e$  im Intervall  $[a_n, \frac{1}{b_n}]$ . Folgende Beispiele zeigen, daß dieses Approximationsverfahren **sehr langsam** konvergiert:

- $[a_{10}, \frac{1}{b_{10}}] = [2.593742460100002, 2.86797199079244]$
- $[a_{1000}, \frac{1}{b_{1000}}] = [2.7169239322355208, 2.719642216442829]$
- $[a_{100000}, \frac{1}{b_{100000}}] = [2.7182682371975284, 2.718295419978943]$

Ein viel schnelleres Verfahren ergibt sich aus der Reihendarstellung  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Als nächstes charakterisieren wir die Konvergenz einer Folge ohne Bezugnahme auf ihren Grenzwert.

**Satz II.1.18** Eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n, m \geq N |a_n - a_m| < \varepsilon$$

*Beweis:* Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für alle  $n \geq N$  gilt  $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sei  $n, m \geq N$ . Dann gilt

$$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq |a_n - b| + |a_m - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also ist  $(a_n)$  eine Cauchyfolge.

Für die Rückrichtung nehmen wir an,  $(a_n)$  sei einen Cauchyfolge. Dann ist die Menge  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  beschränkt (warum?). Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist dann die Menge  $\{a_m \mid n \leq m\}$  auch nicht leer und beschränkt und hat somit aufgrund des Vollständigkeitsaxioms ein Supremum  $b_n$ . Offenbar ist die Folge  $(b_n)$  beschränkt und monoton fallend und besitzt somit einen Grenzwert  $c$ . Wir zeigen nun, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$  gibt es in  $N_1 \in \mathbb{N}_0$  mit  $|b_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_1$ . Da  $(a_n)$  Cauchy ist, gibt es ein  $N_2 \in \mathbb{N}_0$ , sodaß  $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$  für alle  $n, m \geq N_2$ . Also ist auch  $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  (warum?) für  $n \geq N_2$ . Für  $n \geq N := \max(N_1, N_2)$  gilt nun

$$|a_n - c| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wie zu zeigen war.  $\square$

### Bemerkung

Wegen des archimedischen Prinzips ist offenbar  $(a_n)$  genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt

$$\forall k > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n, m > N |a_n - a_m| < \frac{1}{k}$$

Somit kann man Cauchyfolgen in  $\mathbb{Q}$  formulieren, ohne auf  $\mathbb{R}$  bezug zu nehmen. Dies erlaubt es einem das Kontinuum  $\mathbb{R}$  wie folgt zu konstruieren: eine reelle Zahl ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{Q}$ , wobei solche Folgen  $(r_n)$  und  $(q_n)$  als gleich angesehen werden, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall m \geq n |r_m - q_m| < \frac{1}{k}$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium erweist sich als nützlich bei folgenden Konvergenzbetrachtungen.

### Beispiel II.1.19

- (1) Die Folge  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ist keine Cauchyfolge und konvergiert deshalb nicht.<sup>10</sup>
- (2) Die Folge  $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k}$  ist eine Cauchyfolge und konvergiert deshalb.<sup>11</sup>

*Beweis:* (1) Für  $n \geq 1$  gilt

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

woraus folgt, daß  $(a_n)$  keine Cauchyfolge ist und somit (gegen  $\infty$ ) divergiert.

---

<sup>10</sup>Diese Folge wird ‘harmonische Reihe’ genannt und geschrieben als  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

<sup>11</sup>Diese Folge wird ‘alternierende harmonische Reihe’ genannt und geschrieben als  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ .

(2) Wir zeigen zuerst, daß für  $m \geq n$  gilt  $|b_m - b_n| \leq \frac{1}{n+1}$ . Offenbar gilt

$$b_m - b_n = (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right)$$

Wenn nun  $m - n$  ungerade ist, dann gilt

$$|b_m - b_n| = \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{n+1}$$

da die in Klammern stehenden Ausdrücke alle  $\geq 0$  sind. Ähnlich zeigt man die Abschätzung, wenn  $m - n$  gerade ist.

Nun können wir zeigen, daß  $(b_n)$  eine Cauchyfolge ist. Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}_0$  mit  $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Es gilt dann für  $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a_N| + |a_N - a_m| < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wie zu beweisen war.  $\square$

Eine weitere Anwendung von Satz II.1.16 ist die Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$ .

**Satz II.1.20** *Es gibt keine Folge  $(f_n)$  mit  $\mathbb{R} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ .*

*Beweis:* Angenommen  $(f_n)$  sei eine Folge reeller Zahlen, die alle reellen Zahlen aufzählt. Wir konstruieren eine Folge von Intervallen  $I_n = [a_n, b_n]$ , sodaß für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(1) \quad |I_n| = b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$$

$$(2) \quad I_{n+1} \subseteq I_n$$

$$(3) \quad \{f_k \mid k \leq n\} \cap I_n = \emptyset.$$

Als  $I_0$  wähle ein Intervall der Länge 1 mit  $f_0 \notin I_0$ . Angenommen wir haben  $I_0, I_1, \dots, I_n$  so konstruiert, daß sie die Bedingungen erfüllen. Wir unterteilen nun  $I_n$  in drei gleich lange Intervalle, die sich nur an den Randpunkten berühren. Da  $f_{n+1}$  nur in zwei dieser Intervalle liegen kann, wählen wir als  $I_{n+1}$  eines der drei Intervalle, in dem  $f_{n+1}$  nicht liegt.

Die Folgen  $(a_n)$  ist beschränkt und monoton wachsend und die Folge  $(b_n)$  ist beschränkt und monoton fallend. Also haben die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  aufgrund von Satz II.1.16 Grenzwerte  $c$  bzw.  $d$ . Für alle  $n$  gilt  $a_n \leq c \leq d \leq b_n$  und somit  $|d - c| \leq |b_n - a_n| = \frac{1}{3^n}$ . Also ist  $c = d$  und es gilt  $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$ . Da  $c \in I_n$  und  $f_n \notin I_n$  gilt  $c \neq f_n$ . Also ist  $c$  eine reelle Zahl, die von allen  $f_n$  verschieden ist.  $\square$

## II.2 Relle Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen nach  $\mathbb{R}$ , die auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert sind. Wir betrachten zuerst einige Beispiele.

### Beispiel II.2.1

- (1) Für Parameter  $a, b, c \in \mathbb{R}$  betrachten wir die “quadratische” Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ . Im Falle  $a = 0$  sprechen wir von einer affinen Funktion und, wenn überdies  $b = 0$ , dann ist die Funktion  $f$  konstant mit Wert  $c$ .
- (2)  $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (3)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
- (4)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$  hat einen von  $\mathbb{R}$  verschiedenen Definitionsbereich
- (5)  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$  hat ebenfalls einen von  $\mathbb{R}$  verschiedenen Definitionsbereich.

Man kann auf reellwertigen Funktionen die üblichen arithmetischen Operationen punktweise ausführen.

**Definition II.2.2** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann kann man durch punktweise Addition die Funktion

$$f + g : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$$

und durch punktweise Multiplikation die Funktion

$$f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

definieren. Wenn außerdem  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , kann man auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

vermittels punktweiser Division definieren.

### Beispiel II.2.3

- (1) Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2 - 2$  und  $g(x) = \cos(\pi x)$ , dann ist

$$\left( \frac{1}{2}f + 4g \right)(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + 4\cos(\pi x)$$

- (2) Sei  $D = [0, \infty[$  und seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $g(x) = x^2 - 1$ . Dann kann man die Funktion  $\frac{f}{g} : D \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$  definieren, wobei man allerdings den ursprünglichen Definitionsbereich  $D$  auf diejenigen Elemente einschränken muß, die nicht Nullstellen von  $g$  sind.
- (3) Die Tangensfunktion  $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$  ist definiert auf  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  und die Cotangensfunktion  $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$  ist definiert auf  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Als nächstes definieren wir einige wichtige Eigenschaften reeller Funktionen.

**Definition II.2.4** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn  $\forall x, y \in D (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$  bzw.  $\forall x, y \in D (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$  und sie heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, wenn  $\forall x, y \in D (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$  bzw.  $\forall x, y \in D (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$ .

Wenn außerdem  $-x \in D$  für alle  $x \in D$ , dann heißt  $f$  gerade bzw. ungerade, wenn für alle  $x \in D$  gilt  $f(-x) = f(x)$  bzw.  $f(-x) = -f(x)$ .

Die Sinusfunktion ist also ungerade, wohingegen die Cosinusfunktion gerade ist.

**Definition II.2.5** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $D_0 \subseteq D$  dann sei die Einschränkung von  $f$  auf  $D_0$  definiert als

$$f|_{D_0} : D_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$$

### Beispiel II.2.6

- (i) Wir analysieren, für welche Werte  $a, b, c \in \mathbb{R}$  die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

gerade bzw. ungerade ist. Offenbar ist  $f$  genau dann gerade, wenn  $b = 0$ , und  $f$  ist genau dann ungerade, wenn  $ax^2 + c = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d.h. wenn  $a = c = 0$ .

Nehmen wir an, es sei  $a > 0$ . Da dann

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

kann  $f$  nicht monoton sein, jedoch ist  $f$  auf dem Intervall  $]-\infty, -\frac{b}{2a}[$  streng monoton fallend und auf dem Intervall  $]-\frac{b}{2a}, \infty[$  streng monoton wachsend. Also nimmt  $f$  an der Stelle  $-\frac{b}{2a}$  den kleinsten Wert an.

- (ii) Die Funktion  $\sin$  ist ungerade und im Intervall  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  streng monoton wachsend.

Die Funktion  $\cos$  hingegen ist gerade, im Intervall  $]0, \pi[$  streng monoton fallend und im Intervall  $]-\pi, 0[$  streng monoton wachsend.

Ein sehr wichtige Klasse von Funktionen auf  $\mathbb{R}$  sind die sogenannten *Polynome*.

**Definition II.2.7** Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

mit  $a_k \in \mathbb{R}$  heißt Polynom  $n$ -ten Grades, sofern  $a_n \neq 0$ . Die  $a_k$  heißen Koeffizienten des Polynoms. Die Funktion  $f(x) = 0$  heißt Nullpolynom und ihm wird der Grad  $-1$  zugeschrieben.

Die Berechnung von  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  erfordert  $n$  Additionen und  $2n - 1$  Multiplikationen. Es erhebt sich die Frage, ob man mit weniger Rechenoperationen auskommt. Betrachten wir vorerst als Motivation das Polynom  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 1$ , zu dessen (naiver) Berechnung man 3 Additionen und 5 Multiplikationen braucht. Allerdings kann man dieses Polynom folgendermaßen umschreiben

$$3x^3 - 7x^2 + x - 1 = (3x^2 - 7x + 1)x - 1 = ((3x - 7)x + 1)x - 1$$

und wir beobachten, daß man die rechte Seite mit 3 Additionen und 3 Multiplikationen – also kostengünstiger – berechnen kann.

Diese Idee wird in folgendem Satz verallgemeinert.

**Satz II.2.8** Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  mit  $a_n \neq 0$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} c_n &= a_n && \text{und} \\ c_i &= c_{i+1} \cdot x_0 + a_i && \text{für } i = n-1, \dots, 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^n c_i x^{i-1} + c_0$$

und insbesondere  $f(x_0) = c_0$ .

*Beweis:* Wir rechnen wie folgt

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^n c_i x^{i-1} + c_0 &= \sum_{i=1}^n c_i x^i - x_0 \cdot \sum_{i=1}^n c_i x^{i-1} + c_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i x^i - \sum_{i=1}^n x_0 c_i x^{i-1} + c_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_0 c_{i+1} x^i + c_0 = \\ &= c_n x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - x_0 c_{i+1}) x^i - x_0 c_1 + c_0 = \\ &= a_n x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i + a_0 = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{aligned}$$

unter Verwendung der rekursiven Definition der  $c_i$ .  $\square$

Man beachte, daß man zur Berechnung von  $c_0 = f(x_0)$  nur  $n$  Additionen und  $n$  Multiplikationen benötigt. Den rekursiven Algorithmus zur Berechnung von  $f(x_0)$  nennt man *Hornerschema*, das man folgendermaßen veranschaulichen kann

$$\begin{array}{ccccccccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_{i+1} & a_i & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & x_0 \cdot c_n & \dots & x_0 \cdot c_{i+2} & x_0 \cdot c_{i+1} & \dots & x_0 \cdot c_2 & x_0 \cdot c_1 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_{i+1} & c_i & \dots & c_1 & c_0 \end{array}$$

wobei sich die dritte Zeile als Summe der ersten und zweiten Zeile ergibt.

**Beispiel II.2.9** Die Auswertung des Polynoms  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 1$  an der Stelle  $x_0 = 2$  mittels des Hornerschemas sieht dann wie folgt aus

$$\begin{array}{cccc} 3 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{array}$$

d.h.  $f(2) = -3$ .

Wenn  $x_0$  eine Nullstelle des Polynoms  $f(x)$  ist, d.h.  $c_0 = f(x_0) = 0$ , dann folgt aus Satz II.2.8, daß

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}$$

Natürlich kann man diesen Zerlegungsprozeß auch iterieren wie in folgendem

**Beispiel II.2.10** Wir betrachten das Polynom  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ . Offenbar ist  $f(1) = 0$ . Mit dem Hornerschema erhalten wir

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

und somit  $(x - 1)(x^2 + x - 2)$ . Das Polynom  $g(x) = x^2 + x - 2$  hat wiederum die Nullstelle 1. Mit dem Hornerschema erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

und somit  $g(x) = (x - 1)(x + 2)$ . Also haben wir insgesamt

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

Somit hat das Polynom  $f$  die Nullstellen 1 und  $-2$ , wobei aber die erste in gewissem Sinne doppelt vorkommt.

Eine weitere Konsequenz von Satz II.2.8 ist folgender

**Satz II.2.11** *Ein Polynom vom Grad  $n \geq 0$  hat höchstens  $n$  Nullstellen.*

*Beweis:* Ein Polynom vom Grad 0 hat keine Nullstellen.

Angenommen  $f$  sei ein Polynom vom Grad  $n + 1$ . Wenn  $f$  keine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  hat, dann ist die Behauptung klar. Wenn  $f(x_0) = 0$ , dann gibt es nach Satz II.2.8 ein Polynom  $g$  vom Grad  $n$  mit  $f(x) = (x - x_0)g(x)$ . Eine Nullstelle von  $f$  ist also eine Nullstelle von  $g$  oder gleich  $x_0$ . Da  $g$  nach Induktionshypothese höchstens  $n$  Nullstellen hat, hat somit  $f$  höchstens  $n + 1$  Nullstellen.  $\square$

Daraus ergibt sich folgende Eindeutigkeitsaussage.

**Satz II.2.12** (Koeffizientenvergleich)

*Seien  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  Polynome, sodaß  $f(x) = g(x)$  für unendlich viele  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Dann ist  $n = m$  und  $a_k = b_k$  für  $k = 0, \dots, n$ .*

*Insbesondere sind also Polynome genau dann gleich, wenn sie dieselben Koeffizienten haben.<sup>12</sup>*

*Beweis:* Das Polynom  $f - g$  hat unendlich viele Nullstellen. Also ist das Polynom  $f - g$  aufgrund von Satz II.2.11 vom Grad  $\leq -1$ , woraus folgt, daß  $a_k = b_k$  für alle in Frage kommenden  $k$ .  $\square$

Für Polynome vom Grad  $\geq 0$  gilt deshalb folgende *Kürzungsregel*: wenn  $pq_1 = pq_2$ , dann  $q_1 = q_2$ . (Wenn nämlich  $pq_1$  und  $pq_2$  gleich sind, dann stimmen  $q_1$  und  $q_2$  für unendlich viele Argumente überein.)

**Lemma II.2.13** *Sei  $f$  ein Polynom mit Grad  $\geq 1$  und  $x_0$  eine Nullstelle von  $f$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , die sogenannte Vielfachheit der Nullstelle  $x_0$ , sodaß  $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$  für ein Polynom  $g$  mit  $g(x_0) \neq 0$ .*

*Beweis:* Durch iterierte Anwendung von Satz II.2.8 weist man die Existenz eines solchen  $k$  nach. Die Eindeutigkeit sieht man wie folgt. Angenommen  $(x - x_0)^k g(x) = f(x) = (x - x_0)^\ell h(x)$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $g(x_0)$  und  $h(x_0)$  sind beide von 0 verschieden. O.B.d.A. sei  $k \leq \ell$ . Dann gilt  $g(x) = (x - x_0)^{\ell-k} h(x)$  für alle von  $x_0$  verschiedenen  $x \in \mathbb{R}$ . Aufgrund der Kürzungsregel gilt dann  $g(x) = (x - x_0)^{\ell-k} h(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also gilt insbesondere  $g(x_0) = (x_0 - x_0)^{\ell-k} h(x_0)$ . Da aber sowohl  $g(x_0)$  als auch  $h(x_0)$  von 0 verschieden sind, folgt  $1 = (x_0 - x_0)^{\ell-k} = 0^{\ell-k}$  und somit  $k = \ell$ .  $\square$

---

<sup>12</sup>Dies gilt nicht Polynome über endlichen Körpern wie z.B.  $\mathbb{Z}_p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist.

**Satz II.2.14** Sei  $f$  ein Polynom  $n$ -ten Grades und  $x_1, \dots, x_k$  die paarweise verschiedenen Nullstellen von  $f$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom  $g$  ohne Nullstellen in  $\mathbb{R}$  mit

$$f(x) = (x - x_1)^{\ell_1} \dots (x - x_k)^{\ell_k} g(x)$$

wobei  $\ell_i$  die Vielfachheit der Nullstelle  $x_i$  von  $f$  ist. Außerdem gilt  $\ell_1 + \dots + \ell_k \leq n$ .

*Beweis:* Die Existenz eines solchen Polynoms  $g$  ergibt sich aus der iterierten Anwendung von Lemma II.2.13. Die Eindeutigkeit von  $g$  folgt mittels der Kürzungsregel.

Das Polynom  $g$  hat Grad  $\geq 0$  und somit ist der Grad  $n$  von  $f$  größer gleich  $\ell_1 + \dots + \ell_k$ .  $\square$

Man kann Polynome nicht nur über dem Körper  $\mathbb{R}$  sondern auch über beliebigen Körpern betrachten. Sofern der Körper unendlich ist, gelten alle der oben formulierten Aussagen über Faktorisierung von Polynomen. Im Falle des Körpers  $\mathbb{C}$  gilt sogar noch mehr, nämlich

**Satz II.2.15** (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom vom Grad  $\geq 1$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  hat in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle. Somit lässt sich ein Polynom  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  mit  $a_i \in \mathbb{C}$  und  $a_n = 1$  faktorisieren als  $f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$  wobei  $x_1, \dots, x_n$  eine Liste der Nullstellen von  $f$  mit Vielfachheiten ist, die bis auf Umordnung eindeutig ist.

Der Fundamentalsatz der Algebra wurde ursprünglich von C. F. Gauß Anfang des 19. Jahrhunderts bewiesen. Inzwischen gibt es einige verschiedene Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra, die aber alle den Rahmen der gegenwärtigen Vorlesung übersteigen. Stattdessen illustrieren wir die Aussage anhand folgenden Beispiels

**Beispiel II.2.16** Das Polynom  $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 8 = (x-1)(x+2)^2(x^2+2) = (x-1)(x+2)^2(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})$ .

Wir behandeln nun die Frage, wie wir für Vorgaben  $f(x_i) = y_i$  für  $i = 0, \dots, n$ , wobei die  $x_i$  als paarweise verschieden angenommen sind, ein *interpolierendes* Polynom  $f$   $n$ -ten Grades finden können, das alle diese Vorgaben erfüllt. Für diesen Zweck erweist sich folgender Ansatz als nützlich

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Für  $x = x_0$  erhalten wir  $\alpha_0 = y_0$ . Angenommen, wir haben bereits  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$  ermittelt, dann kann man  $\alpha_k$  aus der Bedingung  $f(x_k) = y_k$  ermitteln, indem man nach  $\alpha_k$  auflöst.

Man sieht überdies leicht, daß es nur ein solches Polynom  $n$ -ten Grades geben kann. Angenommen  $p$  und  $q$  seien Polynome  $n$ -ten Grades, die beide die Vorgaben erfüllen. Dann sind  $x_0, x_1, \dots, x_n$  Nullstellen des Polynoms  $p - q$ . Da  $p - q$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$  ist, muß wegen Satz II.2.11 sein Grad gleich  $-1$  sein, da es  $n + 1$  Nullstellen hat. Also haben  $p$  und  $q$  dieselben Koeffizienten.

**Beispiel II.2.17** *Im Falle  $n = 1$  läuft das Verfahren darauf hinaus, eine Gerade durch 2 vorgegebene Punkte zu legen.*

*Illustrieren wir nun das Verfahren für  $n = 2$ . Wir suchen nach einem Polynom 2-ten Grades  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sodaß*

$$f(-1) = 1 \quad f(1) = -1 \quad f(2) = 0$$

*Wir machen den Ansatz  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x + 1) + \alpha_2(x + 1)(x - 1)$ .*

*Aus  $f(-1) = 1$  erhalten wir  $\alpha_0 = 1$ .*

*Aus  $f(1) = -1$  erhalten wir  $1 + 2\alpha_1 = -1$  und somit  $\alpha_1 = -1$ .*

*Aus  $f(2) = 0$  erhalten wir  $1 - 3 + 3\alpha_2 = 0$  und somit  $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ .*

*Also ist  $f(x) = 1 - (x + 1) + \frac{2}{3}(x^2 - 1) = \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$ .*

Schlußendlich kann man auch Funktionen betrachten, die als Quotienten von Polynomen definiert sind.

**Definition II.2.18** *Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt rational, wenn es Polynome  $p$  und  $q$  gibt, sodaß der Grad von  $q \geq 0$ ,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$  und  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  für  $x \in D$ . Wenn der Grad von  $q \geq 1$  ist, heißt die Funktion  $\frac{p}{q}$  gebrochen rational.*

Offenbar sind rationale Funktionen  $\frac{p}{q}$ , für die der Grad von  $q$  gleich 0 ist, einfach Polynome. Beispiele für echt gebrochen rationale Funktionen sind etwa folgende.

**Beispiel II.2.19**

i)  $f(x) = \frac{1}{x}$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

ii) Gegeben seien die Polynome

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$$

und

$$q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

dann ist  $\frac{p}{q}$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  definiert und es gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)} = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

woraus man ersieht, daß  $\frac{p}{q}$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  fortgesetzt werden kann.

**Definition II.2.20** Für Polynome  $p$  und  $q$  mit  $q \neq 0$  heißt  $x \in \mathbb{R}$   $k$ -facher Pol von  $\frac{p}{q}$ , wenn  $p(x) \neq 0$  und  $x$   $k$ -fache Nullstelle von  $q$  ist.

### Beispiel II.2.21

- i) Die Funktion  $\frac{1}{x}$  hat den 1-fachen Pol 0.
- ii) Die Funktion  $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$  hat den 1-fachen Pol 2 und 1 ist kein Pol dieser Funktion.
- iii) Die Funktion  $\frac{x}{(x-2)^2}$  hat den 2-fachen Pol 2.

## II.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

In Beispiel II.2.19 ii) haben eine auf  $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  definierte gebrochen rationale Funktion kennengelernt, die sich auf “natürliche” Art und Weise auf  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  fortsetzen lässt. Ein anderes Beispiel ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

die sich durch die Setzung  $f(0) = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen lässt. In beiden Fällen ist die Fortsetzung in dem Sinne “natürlich”, daß sie “stetig” ist und dann auch eindeutig als solche.

Um den Begriff der Stetigkeit definieren zu können, bedarf es allerdings einiger Vorbereitung.

**Definition II.3.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Ein Häufungspunkt von  $D$  ist ein  $y \in \mathbb{R}$ , sodaß  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$  für eine Folge  $(x_n)$ , deren Glieder alle in  $D \setminus \{y\}$  liegen. Wir bezeichnen die Menge der Häufungspunkte von  $D$  mit  $H(D)$ .

### Beispiel II.3.2

- (1) Sei  $D = ]a, b[$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ . Dann ist  $H(D) = [a, b]$ .
- (2)  $H(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ , aber  $H(\mathbb{N}_0) = \emptyset$
- (3)  $H(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) = \mathbb{R}$ .
- (4)  $H(]0, 1[ \cup \{-1\}) = [0, 1]$

Anhand von Beispiel II.3.2 (4) sieht man, daß nicht jeder Punkt einer Menge  $D$  auch in  $H(D)$  liegen muß. Die Punkte in  $D \setminus H(D)$  nennt man *isolierte* Punkte von  $D$ .

### Definition II.3.3 (Funktionsgrenzwert)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $a \in H(D)$  den Grenzwert  $b$ , wofür wir schreiben  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , wenn für alle Folgen  $(x_n)$  in  $D \setminus \{a\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ .<sup>13</sup>

Man sieht leicht, daß es für  $a \in H(D)$  höchstens ein  $b$  gibt mit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , da der Grenzwert einer Folge eindeutig ist. Man beachte, daß für  $a \notin H(D)$  der Ausdruck  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  keinen Sinn macht, da es keine Folge in  $D \setminus \{a\}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert.

### Beispiel II.3.4

i) Sei  $p(x) = (x - 1)^2(x + 1)$  und  $q(x) = (x - 1)(x - 2)$  und

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

Offenbar ist  $H(\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}) = \mathbb{R}$ .

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt leicht, daß für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Für jede Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)^2(x_n + 1)}{(x_n - 1)(x_n - 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)(x_n + 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 2} = \frac{0 \cdot 2}{-1} = 0$$

und somit  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

Wir betrachten die Folgen

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad y_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}$$

in  $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  die beide den Grenzwert 2 haben. Es gilt einerseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 2} = -\infty$$

und andererseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \frac{(y_n - 1)(y_n + 1)}{y_n - 2} = +\infty$$

also gibt es kein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = b$  und überdies gilt weder  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$  noch  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ .

ii) Für  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , da für jede Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit Grenzwert 0 gilt, daß  $-|x_n| \leq f(x_n) \leq |x_n|$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} -|x_n| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ .

---

<sup>13</sup>Dieser Begriff macht auch Sinn für  $\infty$  bzw.  $-\infty$  statt  $b$ .

iii) Betrachten wir hingegen die Funktion  $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
Betrachten wir weiters die Folgen

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$$

in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , die beide den Grenzwert 0 haben. Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$ , woraus folgt, daß  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht existiert.

iv) Für die Signumsfunktion  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (siehe Bsp. I.4.3 iii)) existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x_n)$  nicht, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(\frac{1}{n}) = 1$  wohingegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(-\frac{1}{n}) = -1$

**Satz II.3.5** (Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn  $a \in H(D)$  mit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , dann gilt

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b + c$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = bc$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b}{c}$ , sofern  $c \neq 0$ .

*Beweis:* Folgt unmittelbar aus den entsprechenden Rechenregeln für konvergente Folgen (siehe Satz II.1.9).  $\square$

### Bemerkung

Im allgemeinen gilt nicht, daß  $H(D) \subseteq H(D(\frac{f}{g}))$  (betrachte  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1$  und  $g(x) = 0$ , dann ist  $D(\frac{f}{g}) = \emptyset$  und somit auch  $H(D(\frac{f}{g})) = \emptyset \neq \mathbb{R}$ ).

Wenn aber  $f$  und  $g$  Polynome sind mit  $g$  vom Grad  $\geq 1$ , dann gilt  $H(D(\frac{f}{g}))$ , denn  $H(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = \mathbb{R}$  (wobei  $x_1, \dots, x_n$  die Nullstellen von  $g$  sind).

Als unmittelbare Konsequenz von Satz II.1.11 erhalten wir folgendes Einschließungskriterium für Funktionsgrenzwerte.

**Satz II.3.6** Seien  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Sei  $a \in H(D)$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \setminus \{a\}$ . Wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , dann gilt auch  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ .

Wir betrachten nun links- bzw. rechtsseitige Funktionsgrenzwerte.

**Definition II.3.7** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $a \in H(D \cap ]a, \infty[)$  bzw.  $a \in H(D \cap ]-\infty, a[)$ . Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $a$  den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert  $b$ , wenn

$$f|_{D \cap ]a, \infty[} \quad \text{bzw.} \quad f|_{D \cap ]-\infty, a[}$$

an der Stelle  $a$  den Grenzwert  $b$  hat, wofür wir

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

schreiben.

### Beispiel II.3.8

- i) Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ , aber  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ .
- ii) Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ , aber  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

**Definition II.3.9** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und es existiere in  $D$  eine Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ . Dann besitzt  $f$  für  $x$  gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  den Grenzwert  $b$ , wenn für alle Folgen  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ , wofür wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

schreiben.

### Beispiel II.3.10

- i) Es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  und auch  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .
- ii) Die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$  existieren beide nicht.

Nun führen wir den Begriff der Stetigkeit ein.

### Definition II.3.11 (Stetigkeit)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  heißt stetig im Punkt  $a \in D$ , wenn für alle Folgen  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Die Funktion  $f$  heißt stetig, wenn  $f$  in allen  $a \in D$  stetig ist.

### Bemerkung

- (1) Für  $a \in D \cap H(D)$  gilt

$$f \text{ stetig in } a \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- (2) Für  $a \in D \setminus H(D)$  ist  $f$  trivialerweise in  $a$  stetig.

- (3)  $f$  ist genau dann in  $a \in D$  unstetig, d.h. nicht stetig in  $a$ , wenn es eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  gibt, sodaß  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  aber  $f(a)$  nicht Grenzwert der Folge  $(f(x_n))$  ist.

### Beispiel II.3.12

- i)  $f : [0, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1$  ist stetig.
- ii) Die Signumsfunktion  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist in jedem Punkt außer 0 stetig.

**Satz II.3.13** Seien die Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  stetig auf  $D$ . Dann sind  $f + g$  und  $f \cdot g$  auch auf  $D$  stetig. Außerdem ist die Funktion  $\frac{f}{g}$  auf ihrem Definitionsbereich  $D \setminus \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$  auch stetig.

Beweis: folgt unmittelbar aus Satz II.1.9. □

**Beispiel II.3.14** Die Funktion  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$  ist offensichtlich stetig. Somit ist aufgrund des vorigen Satzes auch die Funktion  $\frac{1}{x}$  auf ihrem Definitionsbereich  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  stetig.

**Satz II.3.15** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  und  $B(f) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E$ . Wenn  $f$  in  $a$  und  $g$  in  $f(a)$  stetig ist, dann ist  $g \circ f$  in  $a$  stetig. Somit ist  $g \circ f$  stetig, wenn  $f$  und  $g$  stetig sind.

*Beweis:* Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Weil  $f$  in  $a$  stetig ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Da  $g$  in  $f(a)$  stetig ist, gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$ , wie zu zeigen war.  $\square$

### Satz II.3.16

- (1) Polynome sind stetig auf  $\mathbb{R}$ .
- (2) Rationale Funktionen  $\frac{p(x)}{q(x)}$  sind stetig auf  $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ .
- (3) Die (Quadrat-)Wurzelfunktion ist auf  $[0, \infty[$  stetig.
- (4) Die Betragsfunktion  $x \mapsto |x|$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig.
- (5) Die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ . Somit sind auch  $\tan$  und  $\cot$  auf ihrem Definitionsbereich stetig.
- (6) Die Exponentialfunktion  $\exp$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig.

*Beweis:* Die ersten beiden Behauptungen folgen aus Satz II.3.13.

Mithilfe von Satz II.1.9 (5) zeigt man leicht, daß die Wurzelfunktion in Argumenten  $a > 0$  stetig ist. Die Stetigkeit an der Stelle 0 sieht man folgendermaßen. Sei  $(x_n)$  ein Folge in  $[0, \infty[$  mit Grenzwert 0. Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt dann ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für  $n \geq N_\varepsilon$  gilt  $x_n \leq \varepsilon^2$  und somit  $\sqrt{x_n} < \varepsilon$ .

Behauptung (4) rechnet man leicht direkt nach. Sie folgt aber auch aus (1) und (3) mit Satz II.3.15, da  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

Für (5) beweisen wir zuerst, daß  $\sin$  stetig ist. Aus geometrischen Gründen gilt (warum?) für  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , daß  $|\sin(x)| \leq |x|$ . Somit gilt für Nullfolgen  $(x_n)$  aufgrund des Einschließungskriteriums, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = 0$ . Also ist  $\sin$  an der Stelle 0 stetig. Wegen  $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  für  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , gilt auch, daß  $\cos$  an der Stelle 0 stetig ist. Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Wegen des entsprechenden Additionstheorems gilt, daß

$$\sin(x_n) = \sin(x_n - a + a) = \sin(x_n - a) \cos(a) + \cos(x_n - a) \sin(a)$$

und somit ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = \sin(a)$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n - a) = \sin(0) = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(x_n - a) = \cos(0) = 1$  (weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - a = 0$  und  $\sin$  und  $\cos$  an der

Stelle 0 bereits als stetig nachgewiesen wurden). Da  $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$  ist auch  $\cos$  stetig aufgrund von Satz II.3.15.

Behauptung (6) werden wir später beweisen.  $\square$

**Definition II.3.17** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion  $f$  heißt stetig fortsetzbar auf eine Menge  $E$  mit  $D \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ , wenn eine stetige Funktion  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $f = g|_D$ .

Wenn  $a \in H(D) \setminus D$ , dann ist  $f$  genau dann auf  $D \cup \{a\}$  stetig fortsetzbar, wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert. Die Fortsetzung  $\tilde{f}$  ist dann eindeutig mit  $\tilde{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

### Beispiel II.3.18

- i) Gegeben seien die Polynome  $p(x) = x^2 - 2x = (x-2)x$  und  $q(x) = 3(x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2) = 3x^2(x-1)^2(x-2)$ . Die Funktion  $f = \frac{p}{q}$  ist definiert auf  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ , aber stetig fortsetzbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  mittels  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{3x(x-1)^2}$ .
- ii) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x})$  ist stetig fortsetzbar auf  $\mathbb{R}$  mittels der Setzung  $\tilde{f}(0) = 0$ , da  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$ .
- iii) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ , ist nicht auf  $\mathbb{R}$  fortsetzbar, da der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$  nicht existiert.
- iv) Die Funktion  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  ist nicht auf  $\mathbb{R}$  fortsetzbar, da  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$  nicht existiert.

**Definition II.3.19** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn  $B(f)$  als Menge beschränkt ist, d.h., wenn

$$\exists K > 0 \forall x \in D |f(x)| < K$$

d.h., wenn  $a \leq b$  existieren mit  $B(f) \subseteq [a, b]$ .

### Beispiel II.3.20

- i) Die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind beschränkt, wohingegen die Funktionen  $\tan$  und  $\cot$  nicht beschränkt sind.
- ii) Ein Polynom ist genau dann beschränkt, wenn sein Grad  $\leq 0$  ist, d.h., wenn es konstant ist. Angenommen  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  mit  $a_n \neq 0$  und  $n \geq 1$ . O.B.d.A. sei  $a_n > 0$ . Es gilt dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{x^n} = a_n$ . Es gibt dann eine Folge  $(x_k)$ , sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p(x_k)}{x_k^n} = a_n$ . Es gibt dann ein  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodass für  $k \geq N$  gilt, dass  $\frac{p(x_k)}{x_k^n} > \frac{a_n}{2}$ . Sei  $K \geq 1$ . Es gibt dann ein  $k \geq N$  mit  $x_k \geq K$ . Somit gilt dann  $p(x_k) \geq \frac{a_n}{2} x_k^n \geq \frac{a_n}{2} x_k \geq \frac{a_n}{2} K$ . Also ist  $p$  unbeschränkt. Sollte  $a_n < 0$  sein, wendet man dieselbe Argumentation auf  $-p$  an.

Mithilfe eines “topologischen” Arguments, das den Rahmen unserer Vorlesung überschreitet, kann man folgenden Satz beweisen.

### Satz II.3.21

Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, dann ist  $B(f) = [c, d]$  für geeignete  $c, d \in \mathbb{R}$ .

Insbesondere heißt dies, daß für stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt, daß

- (1)  $f$  ist beschränkt
- (2)  $f$  nimmt sein Minimum  $c$  und sein Maximum  $d$  auf  $[a, b]$  an
- (3) alle zwischen Minimum und Maximum liegenden Werte werden von  $f$  angenommen.

### Beispiel II.3.22

i) Betrachte die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(x) = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ .

Diese Funktion ist unbeschränkt, aber in 0 nicht stetig.

ii) Die Funktion  $g : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$  ist stetig, aber nicht beschränkt.

iii) Die Funktion  $h : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  ist stetig und beschränkt, nimmt aber keinen größten Wert auf ihrem Definitionsbereich an.

### Satz II.3.23 (Bisektionsverfahren)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) < f(b)$ . Dann gibt es zu jedem  $d \in [f(a), f(b)]$  ein  $c \in [a, b]$  mit  $f(c) = d$ .

*Beweis:* Sei  $d \in [f(a), f(b)]$ . Wir basteln eine Folge  $[a_n, b_n]$  von Teilintervallen von  $[a, b]$ , sodaß für alle  $n$  gilt

- i)  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
- ii)  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- iii)  $f(a_n) \leq d \leq f(b_n)$

Angenommen wir haben eine solche Folge, dann sind die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  wegen Bedingung i) beschränkt und monoton und haben somit Grenzwerte  $c$  bzw.  $c'$  in  $[a, b]$ , die aber wegen Bedingung ii) gleich sind. Wegen der Stetigkeit von  $f$  (im Punkt  $c$ ) gilt somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ . Wegen Bedingung iii) gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq d \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$  und somit  $f(c) \leq d \leq f(c)$ , also  $f(c) = d$ .

Nun zur Konstruktion der Folge  $[a_n, b_n]$ . Wir setzen  $[a_0, b_0] = [a, b]$ . Angenommen wir haben  $[a_k, b_k]$  für  $k \leq n$  bereits konstruiert, sodaß sie die Bedingungen i)–iii) erfüllen. Die Konstruktion des nächsten Intervalls erfolgt nun durch die Setzung

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, b_n] & \text{wenn } f(c_n) < d \\ [a_n, c_n] & \text{wenn } d \leq f(c_n) \end{cases}$$

wobei  $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$  (Mittelpunkt des Intervalls  $[a_n, b_n]$ ). Offenbar ist die Länge von  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  gleich der Hälfte der Länge von  $[a_n, b_n]$ . Die Bedingungen i) und iii) werden offensichtlich durch die Konstruktion auch sicher gestellt.  $\square$

Es gilt auch das Analogon des Satzes II.3.23 für den Fall, daß  $f(a) > f(b)$  (z.B., indem man  $-f$  betrachtet!).

Als nächstes beweisen wir eine alternative Charakterisierung der Stetigkeit, die auch eine “rechnerische” Bedeutung hat.

### Satz II.3.24 ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $a \in D$  sind folgende beide Aussagen äquivalent

- (1)  $f$  ist in  $a$  stetig
- (2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ .

*Beweis:*  $\Leftarrow$  : Angenommen (2) gilt. Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Wir müssen zeigen, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt dann ein  $\delta > 0$ , sodaß  $\forall x \in D (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ . Weil  $(x_n)$  gegen  $a$  konvergiert, gibt es ein  $n_0$  mit  $|x_n - a| < \delta$  für alle  $n \geq n_0$ . Es gilt dann aber auch  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ .

$\Rightarrow$  : Angenommen es gilt die Negation von (2), d.h. es existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\forall \delta > 0 \exists x \in D (|x - a| \leq \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$ . Dann gibt es aber zu jedem  $n \in \mathbb{N}_0$  ein  $x_n \in D$  mit  $|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ , aber  $\varepsilon \leq |f(x_n) - f(a)|$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , aber nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Also ist  $f$  in  $a$  nicht stetig.  $\square$

Obige Charakterisierung der Stetigkeit von  $f$  in  $a$  kann man intuitiv wie folgt interpretieren: um  $f(a)$  bis auf Genauigkeit  $\varepsilon$  zu berechnen, muß man  $a$  bis auf Genauigkeit  $\delta$  kennen. Eine Funktion  $M : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  heißt ein *Stetigkeitsmodul* für  $f$  an der Stelle  $a$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in D (|x - a| < M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ . Folgende Beispiele zeigen, daß der Stetigkeitsmodul stetiger Funktionen von  $a$  abhängt, d.h., auch wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D$  stetig ist, braucht **nicht** zu gelten, daß

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Wenn jedoch diese Bedingung gilt, dann heißt  $f$  auf  $D$  *gleichmäßig stetig*.

### Beispiel II.3.25

- i) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig. Es gilt  $f(x + \delta) - f(x) = 2\delta x + \delta^2$ . Dieser Wert kann auch für sehr kleine  $\delta$  betragsmäßig beliebig groß werden (wenn  $x$  sehr groß wird). Deshalb ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  nicht gleichmäßig stetig.
- ii) Die Funktion  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$  ist auf ihrem Definitionsbereich stetig. Es gilt  $f(x + \delta) - f(x) = \frac{\delta - (x + \delta)}{\delta(x + \delta)} = \frac{-x}{\delta(x + \delta)}$ . Dieser Wert kann auch für sehr kleine  $\delta$  betragsmäßig beliebig groß werden, da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\delta(x + \delta)} = -\infty$ .

Es gilt aber folgender wichtiger Satz, dessen Beweis allerdings den Rahmen dieser Vorlesung übersteigt.

**Satz II.3.26** *Stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind immer gleichmäßig stetig.*

Man beachte, daß dies i.a. nicht mehr gilt, wenn der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall ist (siehe Bsp. II.3.25).

Eine in der Praxis sehr oft anzutreffende hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung, die gleichmäßige Stetigkeit zur Folge hat ist die der **Lipschitz-Stetigkeit**

$$\exists L > 0 \forall x, y \in D |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$$

Ein  $L > 0$  mit  $\forall x, y \in D |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$  heißt Lipschitz-Konstante für die Funktion  $f$ .

**Beispiel II.3.27**

i) Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  hat Lipschitzkonstante 2, da

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2 \cdot |x - y|$$

für  $x, y \in [0, 1]$ .

ii) Die Funktion  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$  ist wegen Satz II.3.26 nicht Lipschitz-stetig, da sie ja nicht gleichmäßig stetig ist (siehe Bsp. II.3.25 ii). Man kann dies aber auch direkt begründen. Angenommen  $L > 0$  sei eine Lipschitz-Konstante für  $f$ . Dann gilt für alle  $x, y \in ]0, 1[$ , daß

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| < L \cdot |x - y|$$

also  $\frac{1}{xy} < L$  für alle  $x, y \in ]0, 1[$  mit  $x \neq y$ . Dies ist aber nicht der Fall: sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > L$ , dann gilt  $\frac{1}{\frac{1}{n} \frac{1}{n+1}} = n(n+1) \geq n > L$ , obwohl  $\frac{1}{n}$  und  $\frac{1}{n+1}$  verschiedene Elemente von  $]0, 1[$  sind.

## III Differentiation

### III.1 Differenzierbarkeit (und Rechenregeln)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $a \in D \cap H(D)$  betrachten wir die Funktion  $g : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

wobei offensichtlich  $g(x)$  die Steigung der Geraden (“Sekante”) durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$  angibt.

**Definition III.1.1** Die Funktion  $f$  heißt differenzierbar in  $a \in D \cap H(D)$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existiert. Sofern existent bezeichnen wir diesen Grenzwert mit  $f'(a)$  und nennen ihn “Differentialquotient” an der Stelle  $a$ .

Physikalisch bedeutet  $f'(a)$  die Momentangeschwindigkeit des Massenpunkts mit Ortskurve  $f$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Geometrisch bedeutet  $f'(a)$  die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(a, f(a))$ . Diese Tangente ist in Parameterform beschrieben durch  $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ .

#### Beispiel III.1.2

i) Für konstante Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) gilt

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$$

für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

ii) Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist die Ableitung der Funktion  $x^n$  nach  $x$  gleich  $nx^{n-1}$ .

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion über  $n$ . Der Fall  $n = 0$  folgt aus i). Nehmen wir als IH an, die Aussage gelte für  $n$ . Es gilt für  $x \neq a$ , daß

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = \frac{(x^n - a^n)x + a^n(x - a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a}x + a^n$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} \stackrel{IH}{=} na^{n-1}a + a^n = na^n + a^n = (n+1)a^n$$

wie behauptet. □

iii) Für die Absolutbetragsfunktion  $f(x) = |x|$  gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

iv) Sei  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ . Für  $x \neq a$  gilt

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

und somit

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

falls  $a > 0$  und andernfalls gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

da  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ , d.h.  $f'(0)$  ist undefiniert.

### Definition III.1.3

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq H(D)$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  differenzierbar auf einer Menge  $M \subseteq D$ , falls  $f$  in allen Punkten von  $M$  differenzierbar ist, und die Funktion  $f$  heißt differenzierbar, wenn  $f$  auf  $D$  differenzierbar ist.

### Beispiel III.1.4

- i) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist die Funktion  $f(x) = x^n$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar.
- ii) Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar.
- iii) Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  ist auf  $]0, \infty[$  differenzierbar.

Wir zeigen nun, daß Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft ist als Stetigkeit.

**Satz III.1.5** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn  $f$  in  $a \in D \cap H(D)$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  in  $a$  auch stetig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

*Beweis:* Angenommen  $f$  ist in  $a$  differenzierbar. Für  $x \in D \cap H(D) \setminus \{a\}$  sei  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . Offenbar gilt für solche  $x$ , daß

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + g(x)(x - a)$$

und somit auch

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) + g(x)(x - a) = f(a) + f'(a)(a - a) = f(a)$$

da  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f'(a)$ . Also ist  $f$  in  $a$  stetig.

Die Absolutbetragsfunktion und die Quadratwurzelfunktion sind in 0 stetig, aber nicht differenzierbar.  $\square$

Als nächstes wollen wir die Kettenregel beweisen, die besagt, daß  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ , falls die Komposition von  $f$  und  $g$  definiert ist und die Ableitungen  $f'(a)$  und  $g'(f(a))$  existieren. Ein unmittelbar sich aufdrängendes intuitives Argument ist folgendes: sei  $(x_n)$  eine gegen  $a$  konvergierende Folge, dann gilt

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \\
&= g'(f(a))f'(a)
\end{aligned}$$

was jedoch problematisch ist, da  $f(x_n) - f(a)$  für unendlich viele  $n$  gleich 0 sein kann. Um dieses Problem in der Argumentation zu umgehen, erweist sich folgende Reformulierung der Differenzierbarkeit als nützlich, die auch deswegen von größter Wichtigkeit ist, da sie sich auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern lässt.

**Satz III.1.6** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  hat in  $a \in D \cap H(D)$  die Ableitung  $b$  genau dann, wenn eine Funktion  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodaß

- (1)  $f(x) - f(a) - b(x - a) = r(x)(x - a)$  für alle  $x \in D$  und
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$ .

*Beweis:* Sei  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  für  $x \in D \setminus \{a\}$ .

Angenommen  $f$  hat in  $a$  die Ableitung  $b$ . Dann  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ . Sei nun  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$r(x) = \begin{cases} g(x) - b & \text{wenn } x \neq a \\ 0 & \text{wenn } x = a \end{cases}$$

Offenbar erfüllt diese Funktion aufgrund ihrer Definition die Bedingung (1) und sie erfüllt die Bedingung (2), da  $\lim_{x \rightarrow a} g(a) = b$ .

Angenommen  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Aus (1) folgt, daß  $r(x) = g(x) - b$  für  $x \neq a$ , und somit folgt aus Bedingung (2), daß  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ . Also hat  $f$  im Punkt  $a$  die Ableitung  $b$ .  $\square$

**Satz III.1.7** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $B(f) \subseteq E$ . Wenn  $f$  in  $a \in D$  und  $g$  in  $f(a)$  differenzierbar sind, dann ist  $g \circ f$  auch in  $a$  differenzierbar, wobei  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ .

*Beweis:* Da  $g$  in  $f(a)$  differenzierbar ist, gibt es aufgrund von Satz III.1.6 eine Funktion  $r : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (1)  $g(y) - g(f(a)) - g'(f(a))(y - f(a)) = r(y)(y - f(a))$  für alle  $y \in E$  und
- (2)  $\lim_{y \rightarrow f(a)} r(y) = 0$ .

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(f(a))(f(x) - f(a)) + r(f(x))(f(x) - f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(f(a))(f(x) - f(a))}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(f(x))(f(x) - f(a))}{x - a} \\
&= g'(f(a))f'(a) + 0 \cdot f'(a) \\
&= g'(f(a))f'(a)
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus  $\lim_{x \rightarrow a} r(f(x)) = 0$  folgt, was sich wie folgt begründen lässt. Angenommen  $(x_n)$  sei eine Folge in  $D \setminus \{a\}$ , die gegen  $a$  konvergiert. Dann konvergiert die Folge  $(f(x_n))$  gegen  $f(a)$ , da  $f$  in  $a$  differenzierbar und somit stetig ist. Da  $\lim_{y \rightarrow f(a)} r(y) = 0$ , folgt somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(f(x_n)) = 0$ .  $\square$

**Beispiel III.1.8** Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f(x) = x + a$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ . Offensichtlich gilt  $f'(x) = 1$ . Für die Funktion  $h = g \circ f$  gilt dann nach der Kettenregel  $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(x + a)$ .

Als nächstes beweisen wir ein paar Rechenregeln für die Differentiation.

**Satz III.1.9** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in D \cap H(D)$ .

- (1) Wenn  $f$  und  $g$  an der Stelle  $a$  differenzierbar sind, dann sind auch  $f + g$  und  $f \cdot g$  an der Stelle  $a$  differenzierbar, wobei

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

wobei die zweite Gleichheit als Produkt- bzw. Leibnizregel bekannt ist.

- (2) Wenn  $f$  und  $g$  an der Stelle  $a$  differenzierbar sind und  $g(a) \neq 0$ , dann ist auch  $\frac{f}{g}$  an der Stelle  $a$  differenzierbar, wobei

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

bekannt als Quotientenregel.

*Beweis:* Seien  $f$  und  $g$  in  $a \in D \cap H(D)$  differenzierbar. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(a) + g'(a)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x)-f(a))g(x) + f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x)-f(a))g(x)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, daß aufgrund von Satz III.1.5 die Funktion  $g$  in  $a$  stetig ist, da sie dort nach Annahme differenzierbar ist.

Nehmen wir weiters an, daß  $g(a) \neq 0$ . Weil  $g$  in  $a$  auch stetig ist, ist auch  $g(x) \neq 0$  für  $x$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $a$ . Es gilt nun, daß

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$$

da  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{x-a} = -g'(a)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} = \frac{1}{g(a)^2}$ . Mithilfe der bereits bewiesenen Produktregel erhalten wir dann

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g(a)} + f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

wie behauptet.  $\square$

Als unmittelbare Konsequenz dieses Satzes erhalten wir, daß Polynome und rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind. Die Ableitung eines Polynoms  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  ist aufgrund von Beispiel III.1.2 ii) gegeben durch  $p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ .

Als nächstes zeigen wir die Differenzierbarkeit der Winkelfunktionen.

**Satz III.1.10** *Die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar, wobei  $\sin' = \cos$  und  $\cos' = -\sin$ . Also sind auch  $\tan$  und  $\cot$  auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar, wobei*

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

*Beweis:* Wir zeigen zuerst, daß  $\sin'(0) = 1$ . Für reelle  $x$  mit  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  gilt  $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ , wie eine naheliegende geometrische Überlegung zeigt, und somit  $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ . Da  $\sin$  ungerade und  $\cos$  gerade ist, gilt

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

auch für alle  $x$  mit  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ . Da  $\cos$  stetig und somit  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ , folgt aufgrund des Einschließungskriteriums, daß

$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Mithilfe des Additionstheorem für  $\sin$  können wir nun die Ableitung von  $\sin$  wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}\sin' x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

weil nämlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)^2 - 1}{h(\cos(h) + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(h)^2}{h^2} \frac{h}{\cos(h) + 1} = 0$$

Da  $\cos(x) = \cos(x)\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  gilt

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

wie behauptet.

Die Behauptungen für tan und cot ergeben sich unmittelbar aus Satz III.1.9 (2).

□

Wir betrachten nun ein etwas umfänglicheres

**Beispiel III.1.11** Seien  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_1(x) = x^2 + 2x \quad f_2(x) = \sin(x) \quad f_3(x) = x^3$$

mit den Ableitungen

$$f'_1(x) = 2x + 2 \quad f'_2(x) = \cos(x) \quad f'_3(x) = 3x^2$$

Durch iterierte Anwendung der Kettenregel berechnet man die Ableitung von  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$  folgendermaßen

$$\begin{aligned}f'(x) &= f'_3((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot (f_2 \circ f_1)'(x) = f'_3((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) \\ &= 3(\sin(x^2 + 2x))^2 \cdot \cos(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2)\end{aligned}$$

Natürlich kann man viele Funktionen nicht nur einmal, sondern mehrmals und manchmal sogar beliebig oft differenzieren.

**Definition III.1.12** (mehrfahe Ableitungen)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq H(D)$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt einmal differenzierbar, wenn für alle  $a \in D$  die Ableitung  $f'(a)$  existiert. Die Funktion  $f$  heißt  $n+1$ -mal differenzierbar, wenn sie  $n$ -mal differenzierbar ist und ihre  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  auf ganz  $D$  differenzierbar ist, wobei wir die Ableitung von  $f^{(n)}$  mit  $f^{(n+1)}$  bezeichnen.

Die Funktion  $f$  heißt  $n$ -mal stetig differenzierbar, wenn  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(n)}$  auf  $D$  stetig ist.

Die Funktion  $f$  heißt unendlich differenzierbar bzw. glatt, wenn für alle  $n$  die  $n$ -te Ableitung von  $f$  existiert.

### Beispiel III.1.13

- i) Die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind glatt.
- ii) Die Funktion  $f(x) = x^n$  ist glatt, wobei

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} & \text{wenn } k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit sind alle Polynome glatt.

## III.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Im Verlauf dieses Abschnitts sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definition III.2.1** Die Funktion  $f$  besitzt in  $a \in D$  ein globales Maximum, wenn  $\forall x \in D f(x) \leq f(a)$ , und sie besitzt in  $a$  ein lokales Maximum, wenn

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in D \cap ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[ \quad f(x) \leq f(a)$$

Analog erhält man die Begriffe globales und lokales Minimum, wenn man  $\leq$  durch  $\geq$  ersetzt. Extremum heißt Minimum bzw. Maximum.

**Satz III.2.2** Sei  $D = ]a, b[$  und  $f$  auf ganz  $D$  differenzierbar. Wenn  $f$  in  $c \in D$  ein lokales Extremum besitzt, dann ist  $f'(c) = 0$ .

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptung für den Fall, daß  $f$  in  $c$  ein lokales Maximum annimmt. Es gibt dann ein  $\varepsilon > 0$ , sodaß  $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \subseteq D$  und  $f(x) \leq f(c)$  für alle  $x$  mit  $|x - c| < \varepsilon$ . Für die Funktion  $g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  gilt

$$g(x) = \begin{cases} \leq 0 & \text{wenn } x \in ]c, c+\varepsilon[ \\ \geq 0 & \text{wenn } x \in ]c-\varepsilon, c[ \end{cases}$$

und somit

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} g(x) \leq 0$$

also  $f'(c) = 0$ .

Für lokales Minimum ist der Beweis analog.  $\square$

Obiger Satz III.2.2 gilt im allgemeinen nicht für  $D = [a, b]$ . Betrachten wir z.B. die Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ . Diese Funktion hat (globale) Extrema in  $-1$  und  $1$ , aber ihre Ableitung verschwindet dort nicht.

Außerdem lässt sich die Implikation des Satz III.2.2 nicht umkehren, denn die Funktion  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$  hat in  $0$  kein lokales Extremum, obwohl  $f'(0) = 0$ .

Als nächstes beweisen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

**Satz III.2.3** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei  $D = [a, b]$  mit  $a < b$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $]a, b[$  differenzierbar. Dann existiert ein  $c \in ]a, b[$  mit  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

*Beweis:* Da die Funktion  $f$  stetig ist, nimmt sie wegen Satz II.3.21 auf  $[a, b]$  Minimum und Maximum an.

Wenn  $f(a) = f(b)$ , dann nimmt  $f$  ein Extremum in einem  $c \in ]a, b[$  an. Mit Satz III.2.2 ist dann  $f'(c) = 0$ , woraus die Behauptung folgt.

Im Falle  $f(a) \neq f(b)$ , betrachten wir die Funktion  $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ , die auf  $[a, b]$  stetig und auf  $]a, b[$  differenzierbar ist. Da  $g(a) = f(a) = g(b)$ , folgt aus der Überlegung im vorigen Absatz, daß ein  $c \in ]a, b[$  existiert mit  $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , d.h.  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .  $\square$

Eine naheliegende physikalische Interpretation des Mittelwertsatzes ist, daß im Verlauf einer (1-dimensionalen) Bewegung zu irgendeinem Zeitpunkt die Augenblicksgeschwindigkeit mit der Durchschnittsgeschwindigkeit übereinstimmt.

**Beispiel III.2.4** Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  ist stetig und für  $x \in [0, 1[$  ist  $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Die Steigung der Sekante von  $(0, f(0))$  nach  $(1, f(1))$  ist offenbar  $-1$ . Der Mittelwertsatz stellt sicher, daß ein  $x \in ]0, 1[$  existiert mit  $f'(x) = -1$ . Ein solches  $x$  kann man aber in diesem Fall bestimmen, da  $f'(x) = -1$  gdw  $x = \sqrt{1-x^2}$  gdw  $x^2 = 1-x^2 \wedge x \geq 0$  gdw  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Der Mittelwertsatz erlaubt es uns, aus der Ableitung einer Funktion auf ihr Monotonieverhalten zu schließen.

**Satz III.2.5** Sei  $D = [a, b]$  mit  $a < b$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf  $D$ . Dann gilt

- (1) Wenn  $f'(x) > 0$  bzw.  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in D$ , dann ist  $f$  streng monoton wachsend bzw. fallend.
- (2)  $f$  ist monoton wachsend bzw. fallend genau dann, wenn  $f'(x) \geq 0$  bzw.  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in D$ .

*Beweis:* Wenn  $f$  monoton wachsend ist, dann gilt  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$  für alle  $x, y \in [a, b]$  mit  $x \neq y$  und somit  $f'(z) \geq 0$  für alle  $z \in [a, b]$ . Angenommen  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wenn  $x_1 < x_2$  in  $D$ , dann gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein  $x_3 \in ]x_1, x_2[$  mit  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_3) \geq 0$  und somit  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Wenn alle  $f(x) > 0$ , dann gilt aber auch  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_3) > 0$  und somit  $f(x_1) < f(x_2)$ . Für “fallend” statt “wachsend” beweist man die Behauptungen analog.  $\square$

Die Implikation der ersten Behauptung läßt sich nicht umkehren, da die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$  streng monoton wächst, aber  $f'(0) = 0$ .

**Korollar III.2.6** Wenn  $D \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f' = g'$ , dann existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f = g + c$ .

*Beweis:* Wenn  $f' = g'$ , dann ist  $(f - g)' = f' - g' = 0$  und somit ist  $f - g$  aufgrund von Satz III.2.5 sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend, d.h. konstant, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Satz III.2.5 erlaubt einem auch ggf. die Existenz globaler Extrema nachzuweisen wie in folgendem

**Beispiel III.2.7** Sei  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x} + 2x$ . Offenbar gilt für  $x \in ]0, 1[$ , daß  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ . Es gilt

$$f'(x) \square 0 \quad gdw \quad x \square \frac{1}{\sqrt{2}}$$

für  $\square \in \{<, >, =\}$ . Also ist  $f$  im Intervall  $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$  streng monoton fallend und im Intervall  $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$  streng monoton wachsend. Also hat  $f$  in  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ein globales Minimum.

Durch Betrachtung der zweiten Ableitungen kann man ggf. feststellen, ob lokale Minima bzw. Maxima vorliegen.

**Satz III.2.8** Sei  $D = ]a, b[$  mit  $a < b$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Wenn  $f'(x) = 0$ , dann gilt

- (1) wenn  $f''(x) > 0$ , dann hat  $f$  in  $x$  ein lokales Minimum
- (2) wenn  $f''(x) < 0$ , dann hat  $f$  in  $x$  ein lokales Maximum.

*Beweis:* Angenommen  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) > 0$ . Da  $f''$  stetig ist, ist  $f''$  in einer ganzen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  echt größer 0 und somit ist  $f'$  dort monoton wachsend. Da  $f'(x) = 0$ , ist dann  $f$  in  $]x-\varepsilon, x[$  monoton fallend und in  $]x, x+\varepsilon[$  monoton wachsend. Also hat  $f$  in  $x$  ein lokales Minimum.

Analog zeigt man die zweite Behauptung.  $\square$

**Beispiel III.2.9** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ . Ihre erste Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

und deshalb ist  $f'(x) = 0$  gdw  $x \in \{-1, 1\}$ . Um festzustellen, welche Art von lokalem Extremum bei 1 bzw. -1 vorliegt, betrachten wir die zweite Ableitung der Funktion  $f$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}$$

woraus sich ergibt, daß  $f''(-1) = \frac{1}{2}$  und  $f''(1) = -\frac{1}{2}$ . Also liegt bei  $-1$  ein lokales Minimum und bei  $1$  ein lokales Maximum vor. Da aber  $f'(x) < 0$  gdw  $|x| > 1$  und  $f(x) < 0$  gdw  $x < 0$ , liegt in  $-1$  ein globales Minimum und in  $1$  ein globales Maximum vor.

Als weitere Anwendung des Mittelwertsatzes beweisen wir die Regel von de l'Hôpital.

**Satz III.2.10** (Regel von de l'Hôpital)

Sei  $D = ]a, b[$  mit  $a < b$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $c \in [a, b]$ , sodaß

$$(1) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$(2) g'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existiert.}$$

Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

*Beweis:* Aus Annahme (2) folgt mit dem Mittelwertssatz, daß  $g$  injektiv ist. Daraus und Annahme (1) folgt (warum?), daß  $g$  in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $c$  von 0 verschieden ist. Sein nun  $(x_n)$  eine gegen  $c$  konvergierende Folge in  $D$ . O.B.d.A. können wir annehmen, daß  $|x_n - c| < \varepsilon$  für alle  $n$  gilt.

Wir zeigen nun, daß zu jedem  $n$  ein  $\xi_n$  echt zwischen  $c$  und  $x_n$  existiert, mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

da dann daraus folgt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wie behauptet.

Für den Nachweis der Existenz eines geeigneten  $\xi_n$  betrachten wir die Funktion  $h(x) = f(x) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}g(x)$  auf  $D \cup \{c\}$ . Es gilt  $h(c) = 0 = h(\xi_n)$  und  $h'(x) = f'(x) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}g'(x)$  für  $x \in D$ . Also gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein  $\xi_n$  echt zwischen  $c$  und  $x_n$  mit  $h'(\xi_n) = 0$  und somit  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ .  $\square$

**Beispiel III.2.11** Sei  $f(x) = 1 - \cos(x)$  und  $g(x) = 1 - \cos(2x)$ . Diese Funktionen erfüllen in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 die Voraussetzungen von Satz III.2.10 und somit gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Da aber  $f'(x) = \sin(x)$  und  $g'(x) = 2\sin(2x)$  ebenfalls die Voraussetzungen von Satz III.2.10 erfüllen, gilt auch  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ . Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{4\cos(2x)} = \frac{1}{4}$$

### III.3 Spezielle Differenzierbare Funktionen

#### III.3.1 Ableitung der Umkehrfunktion

Da viele Funktionen als Umkehrfunktionen einfacherer Funktionen definiert sind, ist folgender Satz äußerst hilfreich.

**Satz III.3.1** (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei  $D = ]a, b[$  mit  $a < b$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f' > 0$  oder  $f' < 0$ . Dann existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B(f) \rightarrow \mathbb{R}$  und ist differenzierbar, wobei

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für alle  $y \in B(f)$ .

*Beweis:* Da  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , folgt aus dem Mittelwertsatz, daß  $f$  injektiv ist. Wenn  $f' > 0$ , dann ist  $f$  streng monoton wachsend, und wenn  $f' < 0$ , dann ist  $f$  streng monoton fallend. In beiden Fällen ist  $B(f)$  ein offenes Intervall wegen Satz II.3.23, da  $f$  ja stetig ist, und es existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

Wir zeigen nun leicht, daß  $f^{-1}$  stetig ist. Nehmen wir O.B.d.A. an, daß  $f' > 0$  und somit  $f$  streng monoton wachsend ist. Sei  $f^{-1}(y) = x$  und  $\varepsilon > 0$ . O.B.d.A. können wir annehmen, daß  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subseteq D$ . Sei  $\delta = \min(|f^{-1}(x + \varepsilon) - y|, |f^{-1}(x - \varepsilon) - y|)$ , welches  $> 0$ , da  $f$  injektiv ist. Da  $f$  streng monoton wachsend ist, gilt  $f^{-1}([y - \delta, y + \delta]) \subseteq [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Somit haben wir nachgewiesen, daß  $f^{-1}$  stetig ist. Analog argumentiert man in Falle  $f' < 0$ .

Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $B(f) \setminus \{y\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Da  $f^{-1}$  stetig ist, konvergiert die Folge  $(f^{-1}(y_n))$  gegen  $f^{-1}(y)$ . Da  $f$  injektiv ist, sind alle  $f^{-1}(y_n)$  von  $f^{-1}(y)$  verschieden. Es gilt nun

$$(f^{-1})'(f^{-1}(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{1}{(f^{-1})'(f^{-1}(y))}$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f^{-1})'(f^{-1}(y))}$$

wie behauptet. □

### III.3.2 Arcusfunktionen

Betrachten wir folgende Einschränkungen der Winkelfunktionen

- 1)  $f = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  hat Bild  $[-1, 1]$  und ist streng monoton wachsend
- 2)  $f = \cos|_{[0, \pi]}$  hat Bild  $[-1, 1]$  und ist streng monoton fallend
- 3)  $f = \tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$  hat Bild  $\mathbb{R}$  und ist streng monoton wachsend
- 4)  $f = \cot|_{]0, \pi[}$  hat Bild  $\mathbb{R}$  und ist streng monoton fallend.

Die Umkehrfunktionen dieser Funktionen existieren und heißen  $\arcsin$ ,  $\arccos$ :  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\arctan$ ,  $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mithilfe von Satz III.3.1 kann man zeigen, daß

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für  $x$  mit  $|x| < 1$  und

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Für den Fall des  $\arcsin$  sieht man dies folgendermaßen

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und die anderen Fälle seien als Übung empfohlen.

### III.3.3 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir haben bereits gesehen, daß für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_n(x) = x^n$  auf  $[0, \infty[$  streng monoton wachsend ist und die Ableitung  $f'_n(x) = nx^{n-1}$  besitzt. Die Umkehrfunktion  $f_n^{-1}$  heißt  $n$ -te Wurzel und wir schreiben  $x^{\frac{1}{n}}$  bzw.  $\sqrt[n]{x}$  für  $f_n^{-1}(x)$ . Für  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $x \in [0, \infty[$  schreiben wir  $x^{\frac{n}{m}}$  als Abkürzung für  $\sqrt[m]{x^n}$ . Offenbar gilt  $x^{\frac{n}{m}} = y$  gdw  $x^n = y^m$ . Daraus folgt nun, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, daß  $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[km]{x^{kn}}$ . Somit hängt der Wert von  $x^{\frac{n}{m}}$  bloß vom Quotienten  $q = \frac{n}{m}$  ab, was die Notation  $x^q$  rechtfertigt. Für rationale Zahlen  $q < 0$  schreiben wir  $x^q$  als Abkürzung für  $\frac{1}{x^{-q}}$ . Wir schreiben überdies  $x^0$  für 1.

**Lemma III.3.2** Für  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt  $x^{\frac{n}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n$  für alle  $x \geq 0$ .

*Beweis:* Es gilt

$$(x^n)^{\frac{1}{m}} = y \iff x^n = y^m$$

und

$$(x^{\frac{1}{m}})^n = y \iff x^{\frac{1}{m}} = y^{\frac{1}{n}} \iff (x^{\frac{1}{m}})^{nm} = (y^{\frac{1}{n}})^{nm} \iff x^n = y^m$$

und somit  $(x^n)^{\frac{1}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n$  wie behauptet.  $\square$

Wir können nun die üblichen Rechenregeln für Potenzen beweisen.

**Satz III.3.3** Für  $p, q \in \mathbb{Q}$  und  $x, y \in ]0, \infty[$  gilt

$$(1) \quad x^p \cdot x^q = x^{p+q}$$

$$(2) \quad (x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

$$(3) \quad x^p \cdot y^p = (xy)^p$$

*Beweis:* Sei  $p = \frac{n}{m}$  und  $q = \frac{\tilde{n}}{\tilde{m}}$ .

ad (1) : Es gilt dann aufgrund von Lemma III.3.2

$$x^p \cdot x^q = x^{\frac{n\tilde{n}}{m\tilde{m}}} \cdot x^{\frac{m\tilde{n}}{m\tilde{m}}} = (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{n\tilde{n}} \cdot (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{m\tilde{n}} = (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{n\tilde{n} + m\tilde{n}} = x^{\frac{n\tilde{n} + m\tilde{n}}{m\tilde{m}}} = x^{p+q}$$

ad (2) : wegen Lemma III.3.2 gilt

$$(x^p)^q = ((x^{\frac{1}{m}})^n)^{\frac{1}{\tilde{m}}} = (((x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{\tilde{m}}})^n)^{\tilde{n}} = (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{n\tilde{n}} = x^{\frac{n\tilde{n}}{m\tilde{m}}} = x^{p \cdot q}$$

ad (3) : Es gilt  $x^p \cdot y^p = (x^{\frac{1}{m}})^n \cdot (y^{\frac{1}{m}})^n = (x^{\frac{1}{m}} \cdot y^{\frac{1}{m}})^n = ((xy)^{\frac{1}{m}})^n = (xy)^p$ .  $\square$

**Satz III.3.4** Sei  $q$  eine rationale Zahl und  $f_q : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^q$ . Dann gilt für alle  $x > 0$ , daß  $f'_q(x) = qx^{q-1}$ .

*Beweis:* Aufgrund von Satz III.3.1 gilt für  $x > 0$ , daß  $(f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{f'_n(f_n^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{(\frac{1}{n}-1)}$ . Da auch  $f'_n(x) = nx^{n-1}$  gilt die Behauptung für  $q$  der Gestalt  $n$  oder  $\frac{1}{n}$ .

Sei  $p = \frac{n}{m}$ . Für  $f(x) = x^p$ ,  $g(x) = x^n$  und  $h(x) = x^{\frac{1}{m}}$  gilt  $f = g \circ h$ . Somit gilt aufgrund der Kettenregel, daß

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = nh(x)^{n-1} \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}} x^{\frac{1-m}{m}} = px^{\frac{n-m}{m}} = px^{p-1}$$

Aufgrund der Quotientenregel gilt

$$\left( \frac{1}{f} \right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2} = -px^{p-1}x^{-2p} = -px^{-p-1}$$

Die Ableitung von  $x^0$  ist gleich 0 und somit gleich  $0x^{-1}$ . Also gilt für alle  $q \in \mathbb{Q}$ , daß die Ableitung von  $x^q$  gleich  $qx^{q-1}$  ist.  $\square$

### III.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Für die Eulersche Zahl  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  kann man die Funktion  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} : q \mapsto e^q$  betrachten und sich fragen, ob sie zu einer *stetigen* Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fortgesetzt werden kann. Falls existent ist diese stetige Fortsetzung eindeutig, da jede reelle Zahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden kann. Wir zeigen, daß dies durch die die Eulersche Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

bewerkstelligt wird. Zur Erinnerung sei erwähnt, daß wir aus dem Beweis von Satz II.1.17 bereits wissen, daß

- (1)  $\exp(x) > 0$  und
- (2)  $\exp(x) \exp(-x) = 1$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Der nächste Satz bringt einige wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion zum Ausdruck.

#### Satz III.4.1

- (1) *Die Funktion  $\exp$  ist streng monoton wachsend und differenzierbar mit  $\exp' = \exp$ . Also ist  $\exp$  unendlich oft differenzierbar.*
- (2)  $1 + x \leq \exp(x)$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- (5)  $B(\exp) = ]0, \infty[$ .

*Beweis:* (1) Wir zeigen zuerst, daß  $\exp$  monoton wachsend ist. Dies ist klar für das Intervall  $[0, \infty[$  aufgrund des Einschließungskriteriums. Da  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ , ist  $\exp$  auch auf  $]-\infty, 0]$  monoton wachsend. Da  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(x) \leq 1$  für  $x \leq 0$ , ist  $\exp$  auf ganz  $\mathbb{R}$  monoton wachsend.

Wir zeigen nun, daß

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Offenbar genügt es  $h \in ]0, 1]$  zu betrachten. Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es zu jedem  $n$  ein  $\xi_n \in ]x, x+h[$  mit

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = h \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1} = \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\xi_n}{n} = 1$  gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1} = \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

Wegen der Monotonie von  $x \mapsto x^n$  für ungerade  $n \in \mathbb{N}$  folgt nun, daß für ungerade  $n$  gilt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x+1}{n}\right)^n$$

Durch Multiplikation mit  $h$  und  $n \rightarrow \infty$  erhält man

$$h \exp(x) \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq h \exp(x+1)$$

und somit aufgrund des Einschließungskriteriums

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \exp(x+h) - \exp(x) = 0$$

Da für ungerade  $n$  gilt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{\xi_n}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n$$

folgt mit  $n \rightarrow \infty$ , daß

$$\exp(x) \leq \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \exp(x+1)$$

und somit  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$ .

Ähnlich zeigt man, daß

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$$

woraus folgt, daß  $\exp' = \exp$ .

Aus  $\exp > 0$  folgt nun, daß  $\exp$  auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend ist.

(2) Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt  $1+x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  für genügend große  $n$  und somit  $1+x \leq \exp(x)$ .

(3) Für  $k \in \mathbb{N}_0$  sei  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f_k(x) = \exp(x) - \frac{x^k}{k!}$ . Offenbar gilt  $f'_{k+1} = f_k$ . Da  $\exp(0) = 1$  und  $\exp$  monoton wachsend ist, gilt  $f_0(x) \geq 0$  für alle  $x \geq 0$ . Angenommen  $f_k(x) \geq 0$  für alle  $x \geq 0$ . Dann gilt auch  $f'_{k+1}(x) = f_k(x) \geq 0$  für  $x \geq 0$ . Somit ist  $f_{k+1}$  auf  $[0, \infty[$  monoton wachsend. Da  $f_{k+1}(0) = \exp(0) =$

$1 \geq 0$ , gilt  $f_{k+1}(x) \geq 0$  für alle  $x \geq 0$ . Mit Induktion folgt, daß für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt, daß  $f_k(x) \geq 0$  für alle  $x \geq 0$ .

Da für  $x \geq 0$  gilt, daß  $\exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ , gilt für  $x > 0$ , daß  $\frac{x}{(k+1)!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!x^k} \leq \frac{\exp(x)}{x^k}$ , woraus folgt, daß  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty$ , wie behauptet.

(4) Aus (3) folgt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

(5) Sei  $y > 0$ . Wegen (3) und (4) gibt es  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , sodaß  $\exp(a) \leq y \leq \exp(b)$ . Da  $\exp$  monoton wachsend und stetig (da differenzierbar) ist, gibt es aufgrund von Satz II.3.23 ein  $x \in [a, b]$  mit  $y = f(x)$ . Somit ist  $B(f) = ]0, \infty[$  wie behauptet.  $\square$

Da  $\exp$  differenzierbar ist und  $\exp' = \exp > 0$ , folgt mit Satz III.3.1, daß  $\exp$  eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt.

**Definition III.4.2** (natürlicher Logarithmus)

Die Umkehrfunktion  $\exp^{-1}$  von  $\exp$  heißt natürlicher Logarithmus

$$\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \exp^{-1}(x)$$

und ist offenbar surjektiv.

**Satz III.4.3** Die Funktion  $\ln$  ist differenzierbar mit  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

*Beweis:* Aufgrund von Satz III.3.1 gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

$\square$

**Satz III.4.4** (Charakterisierung der Exponentialfunktion)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gelte

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \cdot f(x)$$

für ein  $a \in \mathbb{R}$ . Dann existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = c \cdot \exp(ax)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Somit ist  $\exp$  eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaften  $\exp' = \exp$  und  $\exp(0) = 1$ .

*Beweis:* Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot \exp(-ax)$$

für deren Ableitung gilt

$$g'(x) = f'(x) \exp(-ax) - af(x) \exp(-ax) = f'(x) \exp(-ax) - f'(x) \exp(-ax) = 0$$

und somit existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) \cdot \exp(-ax) = g(x) = c$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f(x) = c \exp(ax)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Die Gleichung  $f'(x) = af(x)$  ist ein einfaches Beispiel einer *Differentialgleichung*, d.h. einer Gleichung, in der Werte einer Funktion mit Werten ihrer Ableitung(en) in Bezug gesetzt werden. Die Gleichung  $f(0) = c$  nennt man *Anfangsbedingung*, welche zusammen mit der Differentialgleichung die Funktion eindeutig bestimmt.

**Satz III.4.5** (Funktionalgleichungen für  $\exp$  und  $\ln$ )

Es gilt

- (1)  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$  für  $x, y \in \mathbb{R}$  und
- (2)  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  für  $x, y > 0$ .

*Beweis:* (1) Sei  $y \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x + y)$  für deren Ableitung gilt  $f'(x) = \exp(x + y) = f(x)$ . Da  $f(0) = \exp(y)$ , gilt wegen Satz III.4.4, daß  $\exp(x + y) = f(x) = \exp(y) \exp(x) = \exp(x) \exp(y)$ .

(2) Es gilt wegen (1), daß

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$$

woraus wegen der Injektivität von  $\exp$  folgt, daß  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  wie behauptet.  $\square$

Eine unmittelbar Konsequenz von (2) ist  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ . Wichtiger aber ist folgendes Korollar, daß die Beziehung zu Potenzen mit rationalen Exponenten herstellt.

**Korollar III.4.6** Für  $q \in \mathbb{Q}$  und  $a \in ]0, \infty[$  gilt

- i)  $a^q = \exp(q \cdot \ln(a))$
- ii)  $\ln(a^q) = q \cdot \ln(a)$ .

*Beweis:* Sei  $q = \frac{n}{m}$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$a^n = \exp(\ln(a))^n = \exp(n \cdot \ln(a)) = \exp\left(m \cdot \frac{n}{m} \cdot \ln(a)\right) = \exp\left(\frac{n}{m} \cdot \ln(a)\right)^m$$

und somit  $a^q = a^{\frac{n}{m}} = \exp\left(\frac{n}{m} \cdot \ln(a)\right) = \exp(q \cdot \ln(a))$ . Außerdem gilt  $a^{-q} = \frac{1}{a^q} = \frac{1}{\exp(q \cdot \ln(a))} = \exp(-q \cdot \ln(a))$ . Somit haben wir Behauptung i) gezeigt. Behauptung ii) folgt aus Behauptung i) durch Anwendung der Funktion  $\ln$ .  $\square$

Korollar III.4.6 legt folgende Definition der Exponentiation nahe.

**Definition III.4.7** Für  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$$

genannt Exponentialfunktion zur Basis  $a$ .

Da  $\ln(e) = 1$  gilt  $e^x = \exp(x)$ . Da  $\ln(1) = 0$  gilt  $1^x = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $a > 1$  ist die Funktion  $x \mapsto a^x$  streng monoton wachsend und für  $0 < a < 1$  ist sie streng monoton fallend.

**Definition III.4.8** Für  $a > 0$  mit  $a \neq 1$  sei  $\log_a : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  die Umkehrfunktion von  $x \mapsto a^x$ , d.h.  $a^{\log_a(x)} = x$  für  $x > 0$ . Die Funktion  $\log_a$  heißt Logarithmus zur Basis  $a$ .

Da für  $a > 0$  die Ableitung der Funktion  $f_a = a^x$  aufgrund der Kettenregel gleich  $f'_a(x) = \exp'(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot f_a(x)$ , folgt mit Satz III.3.1, daß

$$\log'_a(x) = \frac{1}{f'_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot f_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

sofern  $a \neq 1$

Es gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln

**Satz III.4.9** Für  $a, b > 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

i)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii)  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

iii)  $(a^x)^y = a^{xy}$

Daraus folgt, wenn überdies  $a, b \neq 1$  und  $x, y > 0$ , daß

iv)  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

v)  $\log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x)$

vi)  $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$ .

*Beweis:* Als Übung empfohlen!

$\square$

# IV Integration

Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist mit  $f \geq 0$ , kann man sich die Frage stellen, wie groß die Fläche  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$  zwischen Funktionsgraph und  $x$ -Achse ist. Alternativ kann man sich fragen, wie groß der “durchschnittliche” Wert von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Natürlich ist dies nur möglich für hinreichend gutartige Funktionen.

## IV.1 Riemann Integral

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\overline{m}(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad \underline{m}(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

**Definition IV.1.1** Eine Zerlegung von  $[a, b]$  ist eine Liste  $Z = x_0, x_1, \dots, x_n$  reeller Zahlen mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Die Feinheit von  $Z$  ist definiert als  $\delta(Z) = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Sei

$$\overline{m}_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und} \quad \underline{m}_i(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dann heißt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z &= \sum_{i=1}^n \overline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1}) && \text{Obersumme und} \\ \underline{S}_Z &= \sum_{i=1}^n \underline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1}) && \text{Untersumme} \end{aligned}$$

zur Zerlegung  $Z$ .

Wenn  $Z_1 = x_0, x_1, \dots, x_n$  und  $Z_2 = y_0, y_1, \dots, y_m$  Zerlegungen sind, dann schreiben wir  $Z_1 \subseteq Z_2$  als Abkürzung für  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ . Offenbar gilt im Falle  $Z_1 \subseteq Z_2$ , daß

$$\underline{m}(f)(b-a) \leq \underline{S}_{Z_1} \leq \underline{S}_{Z_2} \leq \overline{S}_{Z_2} \leq \overline{S}_{Z_1} \leq \overline{m}(f)(b-a)$$

Deshalb gilt für beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $[a, b]$ , daß  $\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$  für  $Z = Z_1 \cup Z_2$ .

Die Idee der **Riemann Integration** ist nun, durch immer feinere Zerlegungen  $Z$  die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse von unten durch  $\underline{S}_Z$  und von oben durch  $\overline{S}_Z$  anzunähern. Wenn dies funktioniert, dann heißt  $f$  Riemann-integrierbar, wie in folgender Definition festgehalten.

**Definition IV.1.2** (Riemann Integral)

Bezeichne

$$I(f) = \sup\{\underline{S}_Z \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

und

$$\bar{I}(f) = \inf\{\overline{S}_Z \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

dann heißt  $f$  (Riemann)-integrierbar auf  $[a, b]$ , wenn  $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ . In diesem Fall heißt  $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$  das Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet, wobei  $a$  „untere Grenze“,  $b$  „obere Grenze“,  $f$  „Integrand“ und  $x$  „Integrationsvariable“ heißt.

Man sieht leicht (Übung!), daß  $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$  genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  existiert mit  $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$ .

**Warnung** Ein Integral  $\int_a^b f(x) dx$  kann gleich 0 sein, auch wenn  $f$  nicht konstant 0 ist, wie z.B.  $\int_{-1}^1 x dx$ .

Als nächstes zeigen wir, daß sehr große Klassen von Funktionen Riemann-integrierbar sind.

**Satz IV.1.3** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann gilt

- (1) wenn  $f$  stetig ist, ist  $f$  integrierbar
- (2) wenn  $f$  monoton ist, ist  $f$  integrierbar.

*Beweis:* (1) : Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wir zeigen, daß für alle  $\varepsilon > 0$  gilt  $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$  und somit  $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen Satz II.3.26 ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$  und somit gibt es ein  $\delta > 0$ , sodaß

$$\forall x, y \in [a, b] \quad \left( |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \right)$$

Sei  $Z = x_0 < x_1 < \dots < x_n$  eine Zerlegung mit  $\delta(Z) < \delta$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, n$ , daß

$$\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$$

und somit

$$\begin{aligned} \overline{I}(f) - \underline{I}(f) &\leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^n (\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b - a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

und somit  $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$ .

(2) Wenn  $f$  auf  $[a, b]$  monoton wachsend ist, dann gilt für jede Zerlegung  $Z = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , daß

$$\begin{aligned}
\bar{I}(f) - \underline{I}(f) &\leq \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\
&\leq \sum_{i=1}^n (\bar{m}_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \delta(Z) \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \delta(Z)(f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

Da  $\delta(Z)$  beliebig klein werden kann, gilt  $\bar{I}(f) - \underline{I}(f) = 0$ .  $\square$

Im Beweis von Satz IV.1.3(1) haben wir gesehen, daß  $\bar{S}_{Z_n} - \underline{S}_{Z_n}$  gegen 0 konvergiert, wenn  $\delta(Z_n)$  gegen 0 konvergiert. Sei nun  $Z_n = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(Z_n) = 0$  und  $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$  für  $i = 1, \dots, n$  und

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

die zugehörige Folge von **Riemann-Summen**, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)$$

da  $\underline{S}_{Z_n}(f) \leq R_n(f) \leq \bar{S}_{Z_n}(f)$ .

Man kann folgende Verschärfung von Satz IV.1.3(1) zeigen:  $\int_a^b f(x) dx$  existiert, falls  $u_1, \dots, u_k \in [a, b]$  existieren, sodaß  $f$  auf  $[a, b] \setminus \{u_1, \dots, u_k\}$  **stetig** und **beschränkt** ist.

#### Beispiel IV.1.4

1) : Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ , daß  $\underline{S}_Z(f) = c(b-a) = \bar{S}_Z(f)$  und somit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$$

(2) : Betrachte  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  für  $b > 0$ . Wähle  $x_i^{(n)} = b \cdot \frac{i}{n}$  und  $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)}$ . Die zugehörigen Riemannsummen sind

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{bi}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Mit Induktion zeigt man leicht, daß  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ , und somit gilt

$$R_n(f) = \frac{b^3}{6} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n}$$

also

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b}{3}$$

Wie wir bald sehen werden, gilt nicht zufälligerweise für  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ , daß  $F'(x) = x^2$  und  $\int_0^b f(x) dx = F(b) - F(0)$ .

Die folgenden Eigenschaften des Riemann-Integrals sind im weiteren nützlich.

**Satz IV.1.5** Sei  $D = [a, b]$  mit  $a < b$  und seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar. Dann gilt

- i)  $f + g$  ist integrierbar und  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ii) für  $c \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $c \cdot f$  integrierbar und  $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$
- iii) wenn für alle  $x \in [a, b]$  gilt, daß  $f(x) \leq g(x)$ , dann  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- iv)  $\underline{m}(f)(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{m}(f)(b - a)$
- v) die Funktion  $|f|$  ist integrierbar und es gilt  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptungen bloß für den wichtigen Fall stetiger Funktionen, in welchem Fall wir auch mit Riemann Summen argumentieren können. Seien also  $f$  und  $g$  stetig.

i) Die Funktion  $f + g$  ist stetig und somit integrierbar. Da die Folgen  $(R_n(f))$  und  $(R_n(g))$  gegen  $\int_a^b f(x) dx$  bzw.  $\int_a^b g(x) dx$  konvergieren, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$ , sodaß für  $n \geq N$  gilt, daß

$$\left| R_n(f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \left| R_n(g) - \int_a^b g(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \left| R_n(f + g) - \left( \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) \right| = \\ & \left| R_n(f) + R_n(g) - \left( \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) \right| \leq \\ & \left| R_n(f) - \int_a^b f(x) dx \right| + \left| R_n(g) - \int_a^b g(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f + g) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

ii) Da  $c \cdot f$  stetig ist, ist es auch integrierbar. Für  $c = 0$  gilt die behauptete Gleichheit trivialerweise. Sei  $c \neq 0$ . Da  $R_n(f)$  gegen  $\int_a^b f(x) dx$  konvergiert, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit

$$\left| R_n(f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

für alle  $n \geq N$ . Multiplikation mit  $|c|$  ergibt

$$\left| \sum_{i=1}^n c \cdot f(\xi_i^{(n)}) (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) - c \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

war aus folgt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f(x) dx$  und somit  $c \cdot \int_a^b f(x) dx = \int_a^b c \cdot f(x) dx$ .

iii) Wenn  $f \leq g$ , dann auch  $R_n(f) \leq R_n(g)$  und somit

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(g) = \int_a^b g(x) dx$$

aufgrund des Einschließungskriteriums.

iv) Es gilt  $\underline{m}(f)(b-a) \leq R_n(f) \leq \overline{m}(f)(b-a)$  und somit  $\underline{m}(f)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{m}(f)(b-a)$  aufgrund des Einschließungskriteriums.

v) Da  $f$  stetig ist, sind auch  $|f|$  und  $-|f|$  stetig und somit integrierbar. Da  $-|f| \leq f \leq |f|$ , folgt mit iii), daß

$$-\int_a^b |f(x)| dx \stackrel{\text{ii)}}{=} \int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

und somit

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

da ganz allgemein aus  $-u \leq v \leq u$  folgt, daß  $|v| \leq u$ .  $\square$

Der nächste Satz besagt, daß eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a < b$  ihren Mittelwert  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$  auch tatsächlich auf ihrem Definitionsbereich annimmt.

**Satz IV.1.6** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

für ein  $\xi \in [a, b]$ .

*Beweis:* Da  $f$  stetig ist, nimmt  $f$  die Werte  $\underline{m}(f)$  und  $\overline{m}(f)$  tatsächlich an. Deshalb nimmt die stetige Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)(b-a)$  die Werte  $\underline{m}(f)(b-a)$  und  $\overline{m}(f)(b-a)$  auch tatsächlich an. Da aber  $\int_a^b f(x) dx$  zwischen diesen Werten liegt und  $g$  stetig ist, gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $g(\xi) = \int_a^b f(x) dx$  und somit  $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$ .  $\square$

Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion ist und  $a < c < b$ , dann sind die Einschränkungen von  $f$  auf  $[a, c]$  bzw.  $[c, b]$  integrierbar und es gilt  $\int_a^b f(x) dx =$

$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ . Damit in Einklang sind die Setzungen  $\int_a^a f(x) dx = 0$  und  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ , da dann  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0 = \int_a^a f(x) dx$ .

Als nächstes beweisen wir mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Satz IV.1.7** (Haupsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ . Dann gilt

- (1)  $F$  ist differenzierbar mit  $F' = f$ , d.h.  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$
- (2) wenn  $G$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, dann  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$ .

*Beweis:* (1) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $[a, b] \setminus \{c\}$  mit Grenzwert  $c$ . Wegen Satz IV.1.6 gibt es zu jedem  $n$  ein  $\xi_n$  zwischen  $x_n$  und  $c$  mit  $f(\xi_n)(x_n - c) = \int_c^{x_n} f(x) dx = F(x_n) - F(c)$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_n)(x_n - c)}{x_n - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(c)$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Stetigkeit von  $f$  folgt. Also ist  $F'(c) = f(c)$  wie behauptet.

(2) Wenn  $G' = f = F'$ , dann ist  $(F - G)' = 0$  und somit  $F - G = c$ , d.h.  $F = G + c$ . Dann gilt aber

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

wie behauptet. □

**Beispiel IV.1.8**

(i) Die Funktion  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  ist eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = x^2$ .

Somit folgt mit Satz IV.1.7, daß  $\int_a^b x^2 dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ .

(ii)  $F(x) = -\cos(x)$  ist eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = \sin(x)$  und somit  $\int_a^b \sin(x) dx = \cos(a) - \cos(b)$ .

(iii) Da  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  gilt für  $0 < a < b$ , daß  $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$ .

(vi) Sei  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{wenn } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Die Funktion  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  sieht dann folgendermaßen aus

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in [0, 1[ \\ x - 1 & \text{wenn } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Offenbar ist  $F$  stetig, aber im Punkt 1 nicht differenzierbar. Die Funktion  $f$  kann keine Stammfunktion  $G$  besitzen, da für diese aufgrund von Satz IV.1.7 gelten müßte, daß

$$G(x) = \begin{cases} c_0 & \text{wenn } x \in [0, 1[ \\ x + c_1 & \text{wenn } x \in [1, 2] \end{cases}$$

mit  $c_0 = G(1) = 1 + c_1$ , und somit ist  $G$  in 1 nicht differenzierbar.

(v) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

d.h. die charakteristische Funktion der Teilmenge  $\{x \in [0, 1] \mid x \in \mathbb{Q}\}$  von  $[0, 1]$ . Da in jedem nichttrivialen Intervall rationale und irrationale Zahlen liegen, gilt für jede Zerlegung  $Z$  von  $[0, 1]$ , daß  $\underline{S}_Z(f) = 0$  und  $\overline{S}_Z(f) = 1$ , und somit ist  $f$  nicht Riemann integrierbar.

## IV.2 Integrationsregeln

In diesem Unterabschnitt diskutieren wir Techniken zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen durch Aufsuchen einer Stammfunktion, die auf der ‘‘Inversion’’ bekannter Ableitungsregeln beruhen. Im weiteren schreiben wir  $f(x) \big|_{x=a}^{x=b}$  als Abkürzung für  $f(b) - f(a)$ .

**Satz IV.2.1** (partielle Integration)

Sei  $a < b$  und seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

*Beweis:* Aufgrund der Produktregel ist  $fg$  eine Stammfunktion von  $f'g + fg'$ . Da letztere Funktion stetig ist, gilt aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, daß

$$f(x)g(x) \big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

### Beispiel IV.2.2

i) Wir berechnen das Integral  $\int_a^b \exp(x) \cdot x dx$  mithilfe der Methode der partiellen Integration, indem wir  $f(x) = \exp(x)$  und  $g(x) = x$  setzen. Da  $f' = f$  und  $g'(x) = 1$  gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_a^b \exp(x) \cdot x \, dx &= \exp(x) \cdot x \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \exp(x) \cdot 1 \, dx \\
&= \exp(x) \cdot x \Big|_{x=a}^{x=b} - \exp(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = \exp(x)(x-1) \Big|_{x=a}^{x=b} \\
&= \exp(b)(b-1) - \exp(a)(a-1)
\end{aligned}$$

ii) Sei  $f$  stetig differenzierbar. Es gilt dann mit partieller Integration, daß

$$\int_a^b f(x) f'(x) \, dx = f(x)^2 \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x) f'(x) \, dx$$

woraus folgt, daß

$$\int_a^b f(x) f'(x) \, dx = \frac{1}{2} f(x)^2 \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}$$

iii) Wir wollen für  $0 < a < b$  das Integral  $\int_a^b \ln(x) \, dx$  berechnen. Zu diesem Zweck instantiieren wir Satz IV.2.1 mit  $f(x) = x$  und  $g(x) = \ln(x)$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x) \, dx &= x \cdot \ln(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \cdot \ln(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - x \Big|_{x=a}^{x=b} \\
&= (\ln(b) - 1)b - (\ln(a) - 1)a \\
&= (\ln(b) - 1)b - (\ln(a) - 1)a
\end{aligned}$$

### Satz IV.2.3 (Substitutionsregel)

Seien  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $B(g) \subseteq [c, d]$ . Wenn  $g$  überdies stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx$$

Wenn  $g$  überdies bijektiv ist, dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t)) g'(t) \, dt$$

*Beweis:* Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt wegen der Kettenregel, daß

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t)$$

und somit wegen des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung, daß

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) \, dt = (F \circ g)(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx$$

□

### Beispiel IV.2.4

i) Für  $0 < a < b$  wollen wir das Integral  $\int_a^b \frac{\ln(x)^2}{x} dx$  berechnen. Sei  $f(x) = x^2$  und  $g(t) = \ln(t)$ . Mithilfe der Substitutionsregel erhalten wir

$$\int_a^b \frac{\ln(x)^2}{x} dx = \int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \frac{\ln(b)^3 - \ln(a)^3}{3}$$

ii) Wir wollen den Flächeninhalt des Halbkreises berechnen, d.h. das Integral  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . Sei  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  und  $g(t) = \sin(t)$ . Für  $-1 \leq a \leq b \leq 1$  gilt dann aufgrund der Substitutionsregel, daß

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1-x^2} dx &= \int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt \\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin(x)^2} \cos(x) dx \\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos(x)^2 dx \end{aligned}$$

Das Integral von  $\cos(x)^2$  berechnen wir nun mithilfe partieller Integration folgendermaßen. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \cos(x)^2 dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \sin'(x) \cos(x) dx \quad (\text{part. Int.}) \\ &= \sin(x) \cos(x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} -\sin(x)^2 dx \\ &= \sin(x) \cos(x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \sin(x)^2 dx \\ &= \sin(x) \cos(x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} 1 - \cos(x)^2 dx \\ &= \sin(x) \cos(x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} + x \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \cos(x)^2 dx \\ &= (\sin(x) \cos(x) + x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \cos(x)^2 dx \end{aligned}$$

woraus wir erhalten, daß

$$\int_{\alpha}^{\beta} \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

und somit

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

da  $\sin(\arcsin(x)) = x$  und  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2} = \cos(\arcsin(x))$   
Speziell für  $a = -1$  und  $b = 1$  erhalten wir

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}$$

Also hat der Halbkreis mit Radius 1 den Flächeninhalt  $\frac{\pi}{2}$  und somit der Einheitskreis den Flächeninhalt  $\pi$ .

### IV.3 Uneigentliche Integrale

Wir betrachten nun Integrale über Intervalle allgemeinerer Gestalt als  $[a, b]$ .

**Definition IV.3.1** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $b > a$  oder  $b = \infty$ . Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf  $[a, c]$  für alle  $c$  mit  $a < c < b$ . Wenn der Grenzwert  $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$  existiert, dann heißt  $f$  uneigentlich integrierbar auf  $[a, b]$  und wir schreiben dann

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{für} \quad \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Analog definiert man uneigentliche Integrale für Funktionen  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a < b$  oder  $a = -\infty$ , die für alle  $a < c < b$  auf  $[c, b]$  integrierbar sind, als

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

sofern dieser Grenzwert existiert.

Für  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man  $\int_a^b f(x) dx$  als  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ , wobei  $a < c < b$ .

#### Beispiel IV.3.2

i) Wir wollen für  $\alpha \in \mathbb{R}$  das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty x^\alpha dx$  berechnen.

Wenn  $\alpha \neq -1$ , dann gilt für  $c \in [1, \infty[$ , daß

$$\int_1^c x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{x=1}^{x=c}$$

und somit ist  $x^\alpha$  auf  $[1, \infty[$  uneigentlich integrierbar, wenn  $\alpha+1 < 0$ , d.h.  $\alpha < -1$ , in welchem Falle  $\int_1^c x^\alpha dx = \frac{-1}{\alpha+1}$ .

Wenn  $\alpha = -1$ , dann gilt für  $c \in [1, \infty[$ , daß

$$\int_1^c x^{-1} dx = \int_1^c \frac{1}{x} dx = \ln(c) - \ln(1) = \ln(c)$$

und somit existiert  $\int_1^\infty x^{-1} dx$  nicht, da  $\lim_{c \rightarrow \infty} \ln(c) = \infty$ .

ii) Wir berechnen das uneigentliche Integral  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ . Für  $c \in ]0, 1[$  gilt

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x} \Big|_{x=0}^{x=c} = 2(1 - \sqrt{1-c})$$

und somit

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \rightarrow 1} 2(1 - \sqrt{1-c}) = 2$$

**Satz IV.3.3** (Vergleichskriterium)

Sei  $a < b$  bzw.  $b = \infty$  und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die für alle  $c$  mit  $a < c < b$  auf  $[a, c]$  integrierbar sind. Wenn  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  und das uneigentliche Integral  $\int_a^b g(x) dx$  existiert, dann existieren auch die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b |f(x)| dx$$

*Beweis:* Setze  $F(x) = \int_a^x |f(t)| dt$  und  $G(x) = \int_a^c g(t) dt$  für  $x \in [a, b]$ . Die Funktionen  $F$  und  $G$  sind monoton wachsend und es gilt

$$0 \leq F(x) \leq G(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = \int_a^b g(x) dx$$

für  $x \in [a, b]$ . Da  $F$  monoton wachsend und beschränkt ist, existiert  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  und es gilt

$$\int_a^b |f(x)| dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = \int_a^b g(x) dx$$

Sei nun

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen  $f = f^+ - f^-$  und  $|f| = f^+ + f^-$  sind auf allen  $[a, c]$  mit  $c \in [a, b]$  integrierbar. Somit sind auch die Funktionen  $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$  und  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$  auf diesen Intervallen integrierbar. Da  $|f^+(x)| \leq |f(x)|$  und  $|f^-(x)| \leq |f(x)|$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt, sind auch  $f^+ = |f^+|$  und  $f^- = |f^-|$  auf  $[a, b]$  integrierbar und somit ist auch  $f = f^+ - f^-$  auf  $[a, b]$  integrierbar.  $\square$

**Beispiel IV.3.4** Sei  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ . Wir zeigen, daß das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$  existiert. Zu diesem Zweck setzen wir  $f$  stetig fort auf  $[0, \infty[$  durch die Setzung  $f(0) = 1$  (da  $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ ). Also existiert  $\int_0^1 f(x) dx$ . Für  $b \in ]1, \infty[$  gilt

$$\int_1^b f(x) dx = -\cos(x) \cdot \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

Weil  $0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$ , gilt  $\lim_{b \rightarrow \infty} -\cos(x) \cdot \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} = \cos(1)$ . Aus  $0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ , Satz IV.3.3 und Beispiel IV.3.2i) existiert das Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ . Also existiert auch das Integral  $\int_1^\infty f(x) dx$ . Somit existiert das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx$ .

# V Reihen

Wir werden später sehen, daß komplizierte Funktionen  $f$  darstellbar sind als  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ , wobei die  $f_n$  einfache Funktionen wie z.B. Polynome sind. Viele, die sogenannten “analytischen” Funktionen,  $f$  sind z.B. darstellbar als  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

Zu diesem Zweck studieren wir als Vorbereitung in diesem Abschnitt “unendliche Summen”  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , sogenannte “Reihen”.

## V.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

**Definition V.1.1** (Reihen) *Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt*

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

*die  $n$ -te Partialsumme. Die Folge der Partialsummen  $(s_n)$  heißt (unendliche) Reihe mit den Gliedern  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  und wird mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*bezeichnet.*

*Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert, wenn die Folge  $(s_n)$  der zugehörigen Partialsummen konvergiert, in welchem Fall  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  die Summe der Reihe genannt und (auch) mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  bezeichnet wird.*

Natürlich machen diese Begriffe und Notationen auch Sinn, wenn  $(a_k)$  statt bei 0 bei einer beliebigen natürlichen Zahl  $n_0$  beginnt.

### Beispiel V.1.2

- i) *Die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert gegen  $\infty$  (siehe Bsp. II.1.19(1)).*
- ii) *Die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergiert (siehe Bsp. II.1.19(2)).*
- iii) *Für  $q \in \mathbb{R}$  betrachten wir die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty}$  (zur Basis  $q$ ). Für  $q = 1$  divergiert die Reihe gegen  $\infty$ . Für  $q \neq 1$  zeigt man durch Induktion über  $n$ , daß*

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

*Die Behauptung ist klar für  $n = 0$  und der Induktionschritt ergibt sich aus*

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1} \stackrel{(IH)}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

*Wegen Satz II.1.14 gilt nun, daß*

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ , falls  $|q| < 1$ , weil dann  $q^{n+1} \rightarrow 0$  geht
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ , falls  $q > 1$ , weil dann  $q^{n+1} \rightarrow \infty$  geht
- c) für  $q \leq -1$  konvergiert die Reihe nicht, weil die Abstände aufeinanderfolgender Partialsummen immer größer werden und somit  $(s_n)$  keine Cauchyfolge ist; da die  $s_n$  (betragsmäßig) beliebig große positive und negative Werte annehmen, divergiert die Reihe weder gegen  $\infty$  noch gegen  $-\infty$ .

Die Aussage a) ist von zentraler Bedeutung und wird im weiteren immer wieder implizit verwendet.

## V.2 Konvergenzkriterien für Reihen

**Satz V.2.1** (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq m \geq N \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

*Beweis:* Folgt unmittelbar aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für die Folge der Partialsummen.  $\square$

**Korollar V.2.2** Wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.

*Beweis:* Folgt unmittelbar aus Satz V.2.1, wenn man  $n = m + 1$  betrachtet.  $\square$

Diese Implikation lässt sich nicht umkehren, wie man z.B. anhand der harmonischen Reihe sieht. Die Divergenz der geometrischen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  für  $|q| \geq 1$  folgt unmittelbar aus Kor. V.2.2, da in diesem Fall  $(q^n)$  keine Nullfolge ist.

**Definition V.2.3** Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  heißt absolut konvergent, wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konvergiert.

**Satz V.2.4**

- (1) Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .
- (2) Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge  $(\sum_{k=0}^n |a_k|)$  beschränkt ist.

*Beweis:* Die erste Behauptung folgt aus Satz V.2.1, da

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right|$$

für  $n \geq m$ .

Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß monoton wachsende beschränkte Folgen konvergieren.  $\square$

In Satz V.2.4(1) läßt sich die Implikation i.a. nicht umkehren, wie man anhand der alternierenden harmonischen Reihe sieht.

**Satz V.2.5** (Majorantenkriterium)

Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert und  $\exists n \forall k \geq n |b_k| \leq |a_k|$ , dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  auch absolut.

*Beweis:* Übung!  $\square$

Durch Kontraposition erhält man das

**Korollar V.2.6** Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$  divergiert und  $\exists n \forall k \geq n |b_k| \leq |a_k|$ , dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  nicht absolut.

**Beispiel V.2.7** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Offenbar gilt für  $k \geq 2$ , daß  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ . Somit können wir aus dem Majorantenkriterium auf die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  schließen, wenn wir nachweisen können, daß die Reihe  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$  absolut konvergiert. Letzteres sieht man aber wie folgt. Es gilt

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

und somit ist  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ .

**Satz V.2.8** (Quotientenkriterium)

Sei  $(a_n)$  eine Folge von 0 verschiedener Zahlen, sodaß der Grenzwert  $q := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  existiert. Dann gilt

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut, wenn  $q < 1$
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergiert, wenn  $q > 1$ .

*Beweis:*

a) Angenommen  $q < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$ . Also gibt es  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $\tilde{q} \in [0, 1[$  mit  $|a_{k+1}| \leq \tilde{q}|a_k|$  für  $k \geq k_0$ . Mit Induktion sieht man leicht, daß  $|a_k| \leq \tilde{q}^{k-k_0}|a_{k_0}|$  für  $k \geq k_0$ . Somit folgt die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum a_n$  aus dem Majorantenkriterium, da die geometrische Reihe  $\sum \tilde{q}^n$  konvergiert, da ja  $|\tilde{q}| = \tilde{q} < 1$ .

b) Angenommen  $q > 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q > 1$ . Also gibt es  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $\tilde{q} > 1$  mit  $|a_{k+1}| \geq \tilde{q}|a_k|$  für  $k \geq k_0$ . Mit Induktion sieht man leicht, daß  $|a_k| \geq \tilde{q}^{k-k_0}|a_{k_0}|$  für  $k \geq k_0$ . Da  $\tilde{q} > 1$  und  $|a_{k_0}| > 0$ , ist  $(a_k)$  keine Nullfolge, woraus folgt, daß die Reihe  $\sum a_n$  nicht konvergiert.  $\square$

**Warnung** Im Falle  $q = 1$  läßt sich keine eindeutige Aussage treffen, da sowohl für die divergente harmonische und als auch die konvergierende alternierende harmonische Reihe gilt, daß  $|q| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ .

Ein weiteres Beispiel, wo aus diesem Grund das Quotientenkriterium versagt, ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^\alpha}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

**Beispiel V.2.9** (Exponentialreihe)

Für eine beliebige reelle Zahl  $x$  betrachten wir die sogenannte Exponentialreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Im Falle  $x = 0$  ist diese Reihe trivialerweise absolut konvergent. Für  $x \neq 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

woraus mithilfe des Quotientenkriteriums folgt, daß die Reihe absolut konvergiert. Wir werden später zeigen, daß die durch diese Reihe definierte Funktion die in Satz III.4.4 gegebene Charakterisierung erfüllt und somit gilt, daß  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Satz V.2.10** (Wurzelkriterium)

Sei  $(a_n)$  eine Folge, für die der Grenzwert  $w := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$  existiert. Dann gilt

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut, wenn  $w < 1$
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergiert, wenn  $w > 1$ .

*Beweis:*

a) Angenommen  $w < 1$ . Dann existieren  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $q < 1$  mit  $|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq q$  für alle  $k \geq k_0$ . Also gilt für alle  $k \geq k_0$ , daß  $|a_k| \leq q^k$ . Da aber  $\sum q^k$  konvergiert, weil  $q < 1$ , folgt mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von  $\sum a_n$ .

b) Angenommen  $w > 1$ . Dann existieren  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $q > 1$  mit  $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq q$  für alle  $k \geq k_0$ . Also gilt für alle  $k \geq k_0$ , daß  $|a_k| \geq q^k \geq 1$ . Deshalb ist  $(a_k)$  keine Nullfolge und somit konvergiert die Reihe  $\sum a_n$  nicht.  $\square$

Ähnlich wie auch schon im Falle des Quotientenkriteriums erlaubt das Wurzelkriterium keine Aussage im Falle  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ . Die Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert und die Reihe  $\sum \frac{1}{n^2}$  konvergiert, obwohl in beiden Fällen  $w = 1$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .<sup>14</sup>

**Beispiel V.2.11** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ . Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k^k} \right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

woraus die absolute Konvergenz der Reihe mit dem Wurzelkriterium folgt.

**Satz V.2.12** (Rechenregeln für Reihen)

Wenn die Reihen  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  konvergieren, dann konvergieren auch die Reihen  $\sum a_n + b_n$  und  $\sum c \cdot a_n$  gegen  $\sum a_n + \sum b_n$  bzw.  $c \cdot \sum b_n$ .

*Beweis:* Unmittelbare Konsequenz von Satz II.1.9.  $\square$

Schwieriger ist die Frage wie man das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen selbst kanonisch als Reihe dargestellt werden kann. Eine Antwort darauf gibt folgende

**Definition V.2.13** (Cauchyprodukt)

Das Cauchyprodukt der Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

für  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Satz V.2.14** Für absolut konvergente Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ist ihr Cauchyprodukt ebenfalls absolut konvergent, wobei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

---

<sup>14</sup>Es gilt – wie man leicht sieht – für  $x \geq 0$ , daß  $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2$ . Für  $g_n = \sqrt[n]{n} - 1$  gilt, dann  $n = (1+g_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}g_n^2$  und somit  $g_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ . Also konvergiert  $g_n^2$  und somit auch  $g_n$  gegen 0, woraus folgt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

*Beweis:* Wir zeigen zuerst die Behauptung für den Fall, daß  $a_k, b_k \geq 0$ . Es gilt dann für alle  $n$  gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k \leq \sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{2n} b_k$$

woraus wegen des Einschließungskriteriums die Behauptung unmittelbar folgt.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, wo  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  beliebige absolut konvergente Reihen sind. Dann sind natürlich auch die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$  absolut konvergent. Deshalb folgt aus der Überlegung des vorigen Absatzes, daß die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n$  mit  $\tilde{c}_n = \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot |b_{n-k}|$  absolut konvergiert. Seien  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $t_n = \sum_{k=0}^n b_k$  und  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Es gilt

$$\left| s_n \cdot t_n - \sum_{k=0}^n c_n \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{c}_k$$

Da  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n$  absolut konvergiert, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{c}_k = 0$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| s_n \cdot t_n - \sum_{k=0}^n c_n \right| = 0$  woraus folgt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_n$$

wie behauptet.  $\square$

Mithilfe dieses Satzes kann man beweisen, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

d.h., daß die durch die Exponentialreihe definierte Funktion tatsächlich auch das Exponentialgesetz erfüllt. Es gilt nämlich aufgrund des binomischen Lehrsatzes, daß

$$\frac{(x+y)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!}$$

da ja  $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ .

Folgendes Kriterium erlaubt einem Konvergenz von Reihen auf die Existenz un-eigentlicher Integral zurückzuführen.

**Satz V.2.15** Sei  $L \in \mathbb{N}_0$  und  $f : [L, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend mit  $f(x) > 0$  für  $x \geq L$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=L}^{\infty} f(n)$  genau dann, wenn das uneigentliche Integral  $\int_L^{\infty} f(x) dx$  existiert.

*Beweis:* Da  $f$  monoton und beschränkt ist, existiert das Integral  $\int_L^x f(t) dt$  für alle  $x \geq L$  und es gilt für natürliche Zahlen  $n \geq L$ , daß

$$0 \leq \sum_{k=L+1}^n f(k) \leq \int_L^n f(x) dx \leq \sum_{k=L}^{n-1} f(k)$$

Wenn nun  $\int_L^{\infty} f(x) dx < \infty$ , dann ist die Folge  $(\sum_{k=L+1}^n f(k))_{n \geq L}$  monoton wachsend und beschränkt und konvergiert somit. Also konvergiert auch die Reihe  $\sum_{n=L}^{\infty} f(n)$ .

Wenn  $\sum_{k=L}^{\infty} f(k)$  existiert, so ist es eine obere Schranke für die monoton wachsende Folge  $(\int_L^n f(x) dx)_{n \geq L}$ , welche somit konvergiert. Also existiert auch das uneigentliche Integral  $\int_L^{\infty} f(x) dx$ .  $\square$

Wir untersuchen nun, für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$  konvergiert. Wenn  $\alpha \leq 1$ , dann gilt  $n^{\alpha} \leq n^1 = n$  und somit  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$ , weshalb die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$  aufgrund des Minorantenkriteriums divergiert. Wir betrachten nun den Fall  $\alpha > 1$ . Sei  $f_{\alpha} : [1, \infty[ : x \mapsto x^{-\alpha}$ . Offenbar ist  $f_{\alpha} \geq 0$ . Es gilt  $f'_{\alpha}(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} < 0$ , woraus folgt, daß  $f_{\alpha}$  monoton fallend ist. Es gilt

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

Also konvergiert die Reihe aufgrund des Integralkriteriums im Falle  $\alpha > 1$ .

# VI Funktionenfolgen und -reihen

Bislang haben wir bloß Folgen und Reihen von reellen Zahlen betrachtet. Verallgemeinernd betrachten wir nun *Folgen und Reihen von reellen Funktionen*. Eine besonders wichtige Klasse von Funktionreihen sind die sogenannten *Potenzreihen*, d.h. “unendliche Polynome”. Diese sind unter anderem deshalb wichtig, weil nach dem Satz von Taylor sich reelle Funktionen oft zumindest lokal als Potenzreihen darstellen lassen. Dies gilt insbesondere für die elementaren Funktionen wie Exponentialfunktion, Winkelfunktionen und den Logarithmus.

## VI.1 Folgen und Reihen von Funktionen

**Definition VI.1.1** (punktweise Konvergenz)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen von  $D$  nach  $\mathbb{R}$ .

Die Folge  $(f_n)$  konvergiert punktweise gegen die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in D$ , wofür wir abkürzend  $(f_n) \xrightarrow{\text{ptw.}} f$  schreiben.

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konvergiert punktweise genau dann, wenn die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$  punktweise konvergiert.

Da die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen eindeutig sind, sind auch die Grenzwerte von Funktionenfolgen bzgl. punktweiser Konvergenz eindeutig.

**Beispiel VI.1.2** Sei  $D = [0, 1]$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ . Dann konvergiert die Folge  $(f_n)$  gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

die offenbar nicht stetig ist.

Um diesen Defekt zu vermeiden führen wir folgenden stärkeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ein.

**Definition VI.1.3** (gleichmäßige Konvergenz)

Die Funktionsfolge  $(f_n : D \rightarrow \mathbb{R})$  konvergiert gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in D |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

wofür wir abkürzend  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} f$  schreiben.

Die Funktionsreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konvergiert gleichmäßig genau dann, wenn die Folge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert.

Offenbar folgt aus  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} f$ , daß  $(f_n) \xrightarrow{\text{ptw.}} f$ . Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht, wie man anhand von Bsp. VI.1.2 sieht. Angenommen  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} f$ . Dann gibt es eine natürliche Zahl  $N$ , sodaß für alle  $n \geq N$  gilt, daß

$$\forall x \in [0, 1] \quad |x^n - 0| < \frac{1}{2}$$

was aber nicht der Fall ist, da die Aussage für  $x = \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$  falsch ist.

Für Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  kann man ihre "Norm" definieren als  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$ . Offenbar ist dann für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Aussage  $\forall x \in D \quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$  äquivalent zu  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ , woraus folgt, daß  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} f$  genau dann, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ , d.h.  $(f_n)$  konvergiert im Sinn der  $\|\cdot\|_\infty$  Norm gegen  $f$ .

Unter Verwendung dieser Norm kann man dann folgendes Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen beweisen.

**Satz VI.1.4** Sei  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen von  $D \subseteq \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  und  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}_0^+$ , sodaß die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$  konvergiert. Wenn  $\|f_n\|_\infty \leq c_n$  für alle  $n$ , dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$  gleichmäßig.

*Beweis:* Sei  $x \in D$ . Dann gilt  $|f_n(x)| \leq c_n$  und somit konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  absolut aufgrund des Majorantenkriteriums.

Sei  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ . Wir bezeichnen den punktweisen Grenzwert der Folge  $(s_n)$  mit  $g$ . Wir zeigen nun, daß  $(s_n)$  auch gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert. Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $d$  der Grenzwert der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ . Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodaß  $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n = d - \sum_{n=0}^N c_n < \varepsilon$ . Es gilt dann für alle  $n \geq N$ , daß

$$|g(x) - s_n(x)| = \left| g(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon$$

für alle  $x \in D$ . □

### Beispiel VI.1.5

(1) Sei  $D = \mathbb{R}$  und  $f_n(x) : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$ . Es gilt  $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ . Da  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  gleichmäßig.

(2) Sei  $D = [-a, a]$  mit  $0 \leq a < 1$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ . Es gilt  $|f_n(x)| \leq a^n$  für  $x \in D$ . Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  konvergiert, da  $|a| < 1$ , und somit konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  gleichmäßig gegen die Funktion  $g(x) = \frac{1}{1-x}$ .

Als nächstes zeigen wir, daß stetige Funktionen unter gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen sind.

**Satz VI.1.6** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $(f_n)$  eine Folge stetiger Funktionen von  $D$  nach  $\mathbb{R}$ . Wenn  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} g$ , dann ist  $g$  auch stetig.  
Die analoge Aussage gilt auch für Funktionenreihen.

*Beweis:* Wir weisen die Stetigkeit der Grenzfunktion  $g$  unter Verwendung von Satz II.3.24 nach. Sei  $x \in D$  und  $\varepsilon > 0$ . Da  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, gibt es ein  $n$  mit  $\|f_n - g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Da  $f_n$  stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$ , sodaß  $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $y \in D$  mit  $|x - y| < \delta$ . Sei nun  $y \in D$  mit  $|y - x| < \delta$ . Dann gilt

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Also ist  $g$  im Sinne der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung stetig.  $\square$

**Beispiel VI.1.7** Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Sei  $a > 0$ . Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$  konvergiert absolut. Für alle  $x \in [-a, a]$  gilt  $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \left| \frac{a^n}{n!} \right|$ . Somit konvergiert aufgrund von Satz VI.1.4 die Exponentialreihe  $\left| \frac{a^n}{n!} \right|$  auf  $[-a, a]$  gleichmäßig gegen  $f$ . Da die Partialsummen der Exponentialreihe stetig sind und diese Folge gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, folgt mit Satz VI.1.6, daß  $f$  auf dem Intervall  $[-a, a]$  stetig ist. Da dies für alle  $a > 0$  gilt, ist also  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Eine wichtige Konsequenz von Satz VI.1.6 ist, daß Integration in folgendem Sinne stetig ist.

**Satz VI.1.8**

Sei  $a < b$  und  $D = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge stetiger Funktion von  $D$  nach  $\mathbb{R}$ . Wenn  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} g$ , dann konvergiert  $\int_a^b f_n(x) dx$  gegen  $\int_a^b g(x) dx$ .  
Die analoge Aussage gilt auch für Funktionenreihen.

*Beweis:* Angenommen  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} g$ . Wegen Satz VI.1.6 ist  $g$  auch stetig und somit integrierbar.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es in  $N \in \mathbb{N}_0$ , sodaß für alle  $n \geq N$  gilt, daß  $\|f_n - g\|_\infty < \varepsilon$  und somit auch

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - g(x)| dx \leq \|f_n - g\|_\infty (b-a) = \varepsilon(b-a)$$

Also konvergiert  $\int_a^b f_n(x) dx$  gegen  $\int_a^b g(x) dx$ .  $\square$

**Beispiel VI.1.9** Wie wir in Beispiel VI.1.7(2) gesehen haben, konvergiert auf dem Intervall  $[-a, a]$  mit  $0 \leq a < 1$  die Funktionenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  gleichmäßig gegen die Funktion  $\frac{1}{1-x}$ . Umsomehr gilt dies für das Intervall  $[0, a]$ . Wegen Satz VI.1.8 gilt nun

$$-\ln(1-a) = \int_0^a \frac{1}{1-x} dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Also ist

$$\ln(1-a) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

für  $0 \leq a < 1$ .

Man möchte glauben, daß in Analogie zu Satz VI.1.8 auch die Differentiation stetig ist, d.h., daß aus  $(f_n) \xrightarrow{\text{glm.}} f$  folgt, daß  $(f'_n) \xrightarrow{\text{glm.}} f'$ . Diese Hoffnung wird jedoch durch folgendes Gegenbeispiel zunichte gemacht. Sei  $D = [0, 2\pi]$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  und  $|f_n| \leq \frac{1}{n}$ , konvergiert die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f(x) = 0$ . Es gilt  $f'_n(x) = \cos(nx)$ . Für  $x = 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n0) = 1 \neq 0 = f'(0)$ . Außerdem konvergiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\pi)$  nicht, d.h. die Folge  $(f'_n)$  konvergiert nicht einmal punktweise.

**Satz VI.1.10** Sei  $a < b$  und  $D = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge stetig differenzierbarer Funktion von  $D$  nach  $\mathbb{R}$ , die punktweise gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Wenn  $(f'_n)$  gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, dann ist  $f$  differenzierbar mit  $f' = g$ .

Die analoge Aussage gilt auch für Funktionenreihen.

*Beweis:* Wegen Satz IV.1.7 gilt für alle  $n$  und alle  $x \in D$ , daß

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

Weil  $(f'_n)$  gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, gilt wegen Satz VI.1.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt$$

Somit gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

woraus mit Satz IV.1.7 folgt, daß  $f'(x) = g(x)$ .  $\square$

**Beispiel VI.1.11** Sei  $a > 0$  und  $D = [-a, a]$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist die Funktion  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  (stetig) differenzierbar. Wie wir in Beispiel VI.1.7 gesehen haben, konvergiert die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Man sieht leicht, daß  $f'_{n+1} = f_n$ . Also folgt mit Satz VI.1.10, daß

$$f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

wobei  $\lim$  für gleichmäßige Konvergenz steht. Da außerdem  $f(0) = 1$ , folgt mit Satz III.4.4, daß  $\exp = f$ .

Da dies für alle  $a > 0$  gilt, folgern wir, daß

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

In den meisten Analysislehrbüchern wie z.B. [For] wird  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  als Definition der Exponentialfunktion genommen und es werden daraus ihre Eigenschaften entwickelt. Unsere an [MV] orientierte Darstellung folgt hingegen mehr der historischen Entwicklung, wo die Exponentialfunktion über die Augenblicksverzinsung definiert wurde und erst später durch ihre Taylorreihe dargestellt wurde.

## VI.2 Potenzreihen

Eine besonders wichtige Klasse von Funktionenreihen sind die sogenannten Potenzreihen, die man als eine Art “unendlicher” Polynome auffassen kann.

**Definition VI.2.1** Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Folgendes sind Beispiele von Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

Wir nehmen meist o.B.d.A. an, daß der Entwicklungspunkt 0 ist.

### Satz VI.2.2

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe, die für ein  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert, und  $r \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq r < |c|$ . Dann konvergieren die Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$  absolut und gleichmäßig auf der Menge  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r\}$ .

*Beweis:* Da nach Annahme die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$  konvergiert, ist die Folge  $(a_n c^n)$  eine Nullfolge und somit existiert ein  $K > 0$  mit  $|a_n c^n| \leq K$  für alle  $n$ . Sei  $r \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq r < |c|$ .

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \leq |r|$  gilt dann

$$|a_n x^n| = \left| a_n c^n \left( \frac{x}{c} \right)^n \right| \leq K \left| \frac{x}{c} \right|^n \leq K \left| \frac{r}{c} \right|^n$$

Da  $\left| \frac{r}{c} \right| < 1$  und somit die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} K \left| \frac{r}{c} \right|^n$  konvergiert, konvergiert aufgrund

von Satz VI.1.4 die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  gleichmäßig und absolut auf  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r\}$ .

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \leq |r|$  gilt

$$|(n+1)a_{n+1} x^n| = (n+1) \left| a_{n+1} c^n \left( \frac{x}{c} \right)^n \right| = (n+1) \frac{|a_{n+1} c^{n+1}|}{|c|} \left| \frac{x}{c} \right|^n \leq \frac{K}{|c|} (n+1) \left| \frac{r}{c} \right|^n$$

Da  $\left| \frac{r}{c} \right| < 1$  konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{|c|} (n+1) \left| \frac{r}{c} \right|^n$  aufgrund des Quotientenkriteriums. Somit konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$  aufgrund von Satz VI.1.4 gleichmäßig und absolut auf  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r\}$ .  $\square$

Mit Kontraposition folgt aus diesem Satz ist, daß, wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$  divergiert, auch für alle  $d$  mit  $|d| > |c|$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$  divergiert. Dies legt folgende Definition nahe.

**Definition VI.2.3** Für eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  sei ihr Konvergenzradius definiert als das Supremum aller  $|x - x_0|$ , sodaß  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  konvergiert.

Der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ist diejenige Zahl  $\rho \geq 0$ , für die gilt, daß  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  konvergiert, falls  $|x - x_0| < \rho$ , und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  divergiert, falls  $|x - x_0| > \rho$ . Im Falle  $|x - x_0| = \rho$  läßt sich im allgemeinen keine Aussage treffen, wie man anhand der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  sieht. Für  $|x| < 1$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$  und somit umso mehr aufgrund des Majorantenkriteriums die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Im Falle  $x = 1$  divergiert die Reihe, also ist der Konvergenzradius 1, aber für  $x = -1$  konvergiert die Reihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzradius erweist sich folgender Satz oft als nützlich.

**Satz VI.2.4** *Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen, die ab einem gewissen Index von 0 verschieden ist. Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \rho \in [0, \infty]$ , dann ist  $\rho$  der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum a_n x^n$ .*

*Beweis:* Für  $x = 0$  konvergiert die Potenzreihe sowieso. Für  $x \neq 0$  gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}x}{a_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$$

und deshalb

$$q_x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{\rho}$$

Somit gilt aufgrund von Satz V.2.8, daß

- wenn  $|x| < \rho$ , dann  $q_x = \frac{|x|}{\rho} < 1$  und somit  $\sum a_n x^n$  konvergiert
- wenn  $|x| > \rho$ , dann  $q_x = \frac{|x|}{\rho} > 1$  und somit  $\sum a_n x^n$  divergiert

woraus folgt, daß  $\rho$  der Konvergenzradius der Reihe  $\sum a_n x^n$  ist.  $\square$

Anwendungen von Satz VI.2.4 finden sich in folgendem

### Beispiel VI.2.5

- 1) Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  hat Konvergenzradius  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty$ .
- 2) Die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  hat Konvergenzradius  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .
- 3) Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  hat Konvergenzradius  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ .
- 4) Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$  hat Konvergenzradius  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ .

Eine präzise, aber nicht immer leicht auszurechnende Formel für den Konvergenzradius stellt folgender Satz bereit.

**Satz VI.2.6** Sei  $c = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  Dann ist der Konvergenzradius  $\rho$  von  $\sum a_n x^n$  gegeben durch

- $\rho = \infty$  wenn  $c = 0$
- $\rho = \frac{1}{c}$  wenn  $0 < c < \infty$
- $\rho = 0$  wenn  $c = \infty$ .

*Beweis:* Der Beweis verwendet klarerweise den Satz V.2.10. Da er jedoch etwas aufwendiger ist, sei er dem ambitionierten Leser als Übung überlassen.  $\square$

**Satz VI.2.7** (Rechenregel für Potenzreihen)

Seien  $\sum a_n x^n$  und  $\sum b_n x^n$  Potenzreihen mit Konvergenzradien  $\rho_a$  und  $\rho_b$ . Dann gilt für  $|x| < \min(\rho_a, \rho_b)$ , daß

- 1)  $\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n$
- 2)  $\sum c a_n x^n = c \cdot \sum a_n x^n$
- 3)  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  wobei  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

*Beweis:* Die ersten beiden Behauptungen folgen unmittelbar aus Satz V.2.12 und die dritte Behauptung folgt aus Satz V.2.14.  $\square$

**Satz VI.2.8** Sei  $\sum a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  und  $f : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

- 1) Dann ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$  für alle  $x \in ]-\rho, \rho[$ .
- 2) Dann ist  $f$  auf jedem Intervall  $[a, b] \subseteq ]-\rho, \rho[$  integrierbar (da stetig) und es gilt für alle  $x$  mit  $|x| < \rho$ , daß  $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ .

*Beweis:*

ad 1) : Wegen Satz VI.2.2 konvergiert für alle  $a \in [0, \rho[$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$  auf  $[-a, a]$  absolut und gleichmäßig. Mit Satz VI.1.10 folgt dann aber, daß  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ , da  $\frac{d}{dx} a_{n+1} x^{n+1} = (n+1) a_{n+1} x^n$ .

ad 2) : Auf  $[a, b] \subseteq ]-\rho, \rho[$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  gleichmäßig gegen  $f$ . Also ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und somit integrierbar. Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \rho$ . Wegen Satz VI.1.8 gilt nun

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

wie behauptet.  $\square$

### Beispiel VI.2.9

Für  $|x| < 1$  gilt  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Wegen Satz VI.2.8 1) gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

für  $|x| < 1$ . Wegen Satz VI.2.7 1) gilt nun für  $|x| < 1$ , daß

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

## VI.3 Taylorreihen

Unter allen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  sind die Polynome besonders einfache, da sie mithilfe der “Grundrechnungsarten” Addition und Multiplikation definiert sind. Dies ist von großer Wichtigkeit, wenn man Funktionen am Taschenrechner oder Computer ausrechnen will. Beispielsweise kann man die Exponentialfunktion sehr effizient mithilfe der Reihendarstellung  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  berechnen. Für  $|x| \leq 1$  konvergiert diese Reihe sehr schnell, da  $n!$  sehr schnell wächst. Und dies reicht auch, da man jede reelle Zahl  $y$  darstellen kann als  $y = n + x$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $|x| \leq 1$  und somit gilt  $\exp(y) = e^y = e^{n+x} = e^n \exp(x)$ .

Also ist es durchaus von praktischem Interesse, wenn sich Funktionen (zumindest lokal durch schnell konvergierende) Potenzreihen darstellen lassen. Durch iterierte

Anwendung von Satz VI.2.8 1) gilt für  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , daß  $n! a_n = f^{(n)}(0)$ ,

d.h.  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . Also ist insbesondere die Reihendarstellung von  $f$  eindeutig! Wenn sich also eine Funktion  $f$  durch eine Potenzreihe darstellen lässt, dann durch die sogenannte *Taylorreihe*  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ . Entsprechend heißt  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  das  $n$ -te Taylorpolynom. Eine Abschätzung des dadurch auftretenden Fehlers gibt folgender

**Satz VI.3.1** (Satz von Taylor)

Sei  $f$  auf einem Intervall  $I$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar.

Dann gilt für  $a, x \in I$ , daß

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + R_{n+1}(a, x)$$

wobei  $R_{n+1}(a, x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ . Eine alternative Formel (nach Lagrange) für das Restglied ist  $R_{n+1}(a, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$  für ein echt  $\xi$  zwischen  $a$  und  $x$ .

*Beweis:* Wir beweisen die Aussage mit Induktion über  $n$ .

Für  $n = 0$  gilt die Aussage, da  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$  aufgrund von Satz IV.1.7.

Wir nehmen als Induktionshypothese an, die Aussage gelte für  $n$ . Sei  $f$  eine  $(n+2)$ -mal differenzierbare Funktion auf  $I$ . Es gilt

$$\begin{aligned} R_{n+1}(a, x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt && (\text{part. Integr.}) \\ &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+2}(a, x) \end{aligned}$$

woraus die Behauptung für  $n+1$  mithilfe der Induktionshypothese folgt.

Für das Restglied nach Lagrange machen wir folgenden Ansatz. Für  $y$  zwischen  $a$  und  $x$  sei

$$g(y) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(y) (x-y)^k - c \cdot \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!}$$

wobei  $c$  so gewählt ist, daß  $g(a) = 0$ . Die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(y) (x-y)^k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} f^k(y) (x-y)^{k-1} + c \cdot \frac{(x-y)^n}{n!} = \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(y) (x-y)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(y) (x-y)^k + c \cdot \frac{(x-y)^n}{n!} = \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(y) (x-y)^n + c \cdot \frac{(x-y)^n}{n!} \end{aligned}$$

Da  $g(x) = 0 = g(a)$ , gibt es aufgrund von Satz III.2.3 ein  $\xi$  echt zwischen  $a$  und  $x$  mit  $0 = g'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x-\xi)^n + c \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!}$ . Also ist  $c = f^{(n+1)}(\xi)$ . Aus  $g(a) = 0$  folgt nun

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k + f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

wie behauptet.  $\square$

Wenn  $f$  unendlich oft differenzierbar ist und es eine Konstante  $c \geq 0$  gibt mit  $|f^{(n)}| \leq c$  für alle  $n$ , dann gilt

$$|R_{n+1}(a, x)| \leq \frac{1}{n!} \int_a^x |(x-t)^n f^{(n+1)}(t)| dt \leq \frac{c}{n!} \int_a^x |x-t|^n dt \leq c \frac{|x-a|^{n+1}}{n!}$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} = 0$ , gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

für alle  $x \in I$ .

### Beispiel VI.3.2

(1) Wir betrachten die Funktion  $f = \sin$  und entwickeln sie im Punkt  $a = 0$ . Offenbar gilt

$$f^{(0)} = \sin \quad f^{(1)} = \cos \quad f^{(2)} = -\sin \quad f^{(3)} = -\cos \quad f^{(4)} = \sin \quad \dots$$

und somit  $f^{(2n)}(0) = 0$  und  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ . Also gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(0, x)$$

wobei  $|R_{2n+2}(0, x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!}$ , da  $|f^{(2n+2)}| \leq 1$ . Es genügt  $x$  mit  $|x| \leq \pi$  zu betrachten, für welche gilt  $|R_{2n+2}(0, x)| \leq \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!}$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!} = 0$ , konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig gegen  $\sin$ .

(2) Wir betrachten die Funktion  $\ln$  und entwickeln sie im Punkt  $a = 1$ . Da  $\ln(1) = 0$  gilt aufgrund von Satz VI.3.1

$$\ln(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k + R_{n+1}(1, x) = \sum_{k=1}^n \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k + R_{n+1}(1, x)$$

Man zeigt leicht durch Induktion über  $k$ , daß  $\ln^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^k}$  und somit  $\ln^{(k+1)}(1) = (-1)^k k!$ . Somit gilt

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k + R_{n+1}(1, x) = \sum_{k=1}^n -\frac{(1-x)^k}{k} + R_{n+1}(1, x)$$

Aus Beispiel VI.1.9 folgt, daß

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-x)^k}{k}$$

falls  $0 < x < 1$ . Das Restglied berechnet sich wie folgt

$$R_{n+1}(1, x) = \frac{1}{n!} \int_1^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \int_1^x \left(\frac{t-x}{t}\right)^n dt$$

Also gilt für  $x \geq 1$  die Abschätzung

$$|R_{n+1}(1, x)| \leq \left| \int_1^x \left(\frac{t-x}{t}\right)^n dt \right| \leq \int_1^x \left|\frac{t-x}{t}\right|^n dt \leq \int_1^x |t-x|^n dt \leq (x-1)^{n+1}$$

und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(1, x) = 0$ , falls  $1 \leq x < 2$ .

Also gilt

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-x)^k}{k}$$

für  $x \in ]0, 2[$ . Der Konvergenzradius der Reihe ist 1, da sie für  $x = 0$  divergiert (da  $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-0)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = -\infty$ ). In [For] wird gezeigt, daß die Reihenentwicklung von  $\ln$  auch für  $x = 2$  gilt und somit  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$ .

## VI.4 Ein Ausblick auf Fourierreihen

Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, sind notwendigerweise glatt, d.h. unendlich oft differenzierbar. Außerdem gilt für nichtkonstante Polynome  $p$ , daß  $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = \infty$ , woraus folgt, daß sie nicht geeignet sind, um periodische Funktionen zu approximieren. Diese Nachteile treten nicht auf bei sogenannten “Fouriereihen”, die von Ch. Fourier im 19ten Jahrhundert entwickelt wurden, als er die sogenannte “Wärmeleitungsgleichung” studierte.<sup>15</sup>

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *periodisch*, wenn eine konstante  $L > 0$  existiert, sodaß  $f(x) = f(x + L)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Durch geeignete Skalierung kann man immer erreichen, daß die Periodenlänge  $L$  gleich  $2\pi$  ist. Typische Beispiele solcher Funktionen mit Periode  $2\pi$  sind Funktionen der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

---

<sup>15</sup>Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die die Ausbreitung von Wärme in einem erhitzten Draht beschreibt, dessen Enden durch Kühlung auf konstante Temperatur gehalten werden.

die als “trigonometrische Polynome” bezeichnet werden. Eine “trigonometrische Reihe” ist eine Reihe der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Es ist im allgemeinen sehr schwierig für eine vorgegebene trigonometrische Reihe zu entscheiden, für welche  $x$  sie konvergiert. Wenn aber für eine Funktion  $f$  gilt, daß

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

dann hat man  $f$  als eine Überlagerung von Schwingungen ganzzahliger Frequenz dargestellt, was in Physik und Elektrotechnik von großem Interesse ist, insbesondere weil man zeigen kann, daß die Koeffizienten eindeutig sind und sich folgendermaßen bestimmen lassen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Die zugehörige trigonometrische Reihe heißt *Fourierreihe* der Funktion  $f$  und wird mit  $\mathcal{F}(f)$  bezeichnet.

Für stückweise stetig differenzierbare<sup>16</sup> Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(0) = f(2\pi)$  kann man zeigen, daß für alle  $x \in [0, 2\pi]$  gilt

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

wobei  $f(x_+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$  und  $f(x_-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$ . Deshalb gilt für solche  $f$ , die überdies auf  $[0, 2\pi]$  stetig sind, daß

$$\mathcal{F}(f)(x) = f(x)$$

für alle  $x$ .

**Beispiel VI.4.1** Betrachten wir die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x \leq \pi \\ -h & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

wobei  $h > 0$ .

---

<sup>16</sup>d.h. es gibt eine Partition  $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n$  des Definitionsbereiches von  $f$ , sodaß die Einschränkungen von  $f$  auf die Intervalle  $]a_{k-1}, a_k[$  alle stetig differenzierbar sind

Die Fourierreihe von  $f$  ist

$$\mathcal{F}(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4h}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

da wegen  $\frac{d \frac{1}{n} \sin(nt)}{dt} = \cos(nt)$  und  $\sin(n\pi) = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h \cos(nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} h \cos(nt) dt \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt - \frac{h}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos(nt) dt \\ &= \frac{h}{\pi} \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{h}{\pi} \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_{t=\pi}^{t=2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und wegen  $\frac{d \frac{-1}{n} \cos(nt)}{dt} = \sin(nt)$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h \sin(nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} h \sin(nt) dt \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt - \frac{h}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin(nt) dt \\ &= \frac{h}{n\pi} (-\cos(n\pi) + \cos(0) + \cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{2h}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4h}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Man beachte, daß  $f(n\pi) = h$  aber  $\mathcal{F}(f)(n\pi) = 0$ .

# VII Lineare Algebra

Es ist von der Schule her bekannt, daß die Ebene und der Raum durch  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  beschrieben werden können, indem man Punkte mit ihren Koordinaten bzgl. eines orthogonalen, d.h. rechtwinkligen, Koordinatensystems identifiziert. Die wesentlichen Operationen auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  sind komponentenweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar. Offenbar kann man diese Operationen auch auf  $\mathbb{R}^n$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  definieren, auch wenn für  $n > 4$  kein (unmittelbarer) Zusammenhang mit Raum und Zeit mehr auszumachen ist. Außerdem treten in der Mathematik oft auch *unendlich* dimensionale Räume auf wie z.B. die Menge  $C[0, 1]$  aller stetigen Funktion von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{R}$ , die bekanntermaßen unter punktweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen sind.

Bevor wir in voller Allgemeinheit in die lineare Algebra einsteigen, rufen wir in den ersten beiden Unterabschnitten nochmal das Schulwissen über die euklidische Ebene und den euklidischen Raum in Erinnerung.

## VII.1 Die euklidische Ebene

Punkte in der Ebene werden durch Paare  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  repräsentiert, wobei  $x$  und  $y$  als *kartesischen Koordinaten* des Punktes bezeichnet werden. Man kann einen solchen Punkt auch durch seine *Polarkoordinaten*  $(r, \varphi) \in [0, \infty[ \times [0, 2\pi[$  beschreiben, wobei der Zusammenhang durch

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

gegeben ist. Es gilt  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Den Winkel  $\varphi$  bestimmt man mithilfe der arctan Funktion, da  $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{y}{x}$ .

**Lemma VII.1.1** Wenn  $(x_1, x_2) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  und  $(y_1, y_2) = (s \cos \beta, s \sin \beta)$ , dann gilt  $x_1 y_1 + x_2 y_2 = rs \cos(\beta - \alpha)$ .

*Beweis:* Aufgrund des Additionstheorems für cos gilt

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta) \cos(-\alpha) - \sin(\beta) \sin(-\alpha) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

woraus die Behauptung durch Multiplikation mit  $rs$  folgt.  $\square$

Wir definieren nun *Geraden* als bestimmte Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition VII.1.2** Eine Gerade in der Ebene ist eine Menge der Gestalt

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ .

Eine Geradengleichung  $ax + by = c$  ist in Hesse Normalform, wenn  $a^2 + b^2 = 1$  und  $c \geq 0$ .

Falls  $b \neq 0$ , kann man die Gleichung  $ax + by = c$  umformen zu  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$  und analog, falls  $a \neq 0$ , zu  $x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$ .

Offenbar verändert sich die Lösungsmenge der Gleichung  $ax + by = c$  nicht durch Multiplikation mit einer Konstanten  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Falls  $c \geq 0$ , erhält man eine Hesse Normalform durch Multiplikation mit  $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$  und, falls  $c < 0$ , durch Multiplikation mit  $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

Intuitiv ist ein Vektor  $\vec{v}$  in der euklidischen Ebene eine Klasse von Strecken mit gleicher Richtung und gleicher Länge. Er wird durch ein Paar reeller Zahlen  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  (*x- und y-Komponente von  $\vec{v}$* ) oder alternativ durch Strecken mit beliebigem Anfangspunkt  $(x_0, y_0)$  und Endpunkt  $(x_0 + v_x, y_0 + v_y)$  dargestellt. Typischerweise wählt man  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  und somit wird der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  durch den Punkt  $(v_x, v_y)$  repräsentiert. Wir bezeichnen  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  als *Spaltenvektor* und  $(v_x, v_y)$  als *Zeilenvektor*. Die offensichtliche Bijektion zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren wird mithilfe folgender Notation bewerkstelligt

$$(v_x, v_y)^T = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}^T = (v_x, v_y)$$

wobei  $(-)^T$  für “Transposition” steht. De facto besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen Punkten und ihren Ortsvektoren, die vom Ursprung nach eben diesem Punkt zeigen. Wir werden aber später sehen, daß die Schreibweise als Spaltenvektoren sich für den Matrizenkalkül als äußerst hilfreich erweisen wird.

### Rechenoperationen auf Vektoren

Seien  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  Vektoren im  $\mathbb{R}^2$ . Ihre Summe ist definiert als

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

Diese Operation der Vektoraddition entspricht geometrisch der Hintereinanderausführung der durch die beiden Vektoren bezeichneten Verschiebungen. Für einen Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei die Skalarmultiplikation mit  $\lambda$  definiert als

$$\lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_x \\ \lambda u_y \end{pmatrix}$$

Geometrisch entspricht diese Operation der Streckung des Vektors  $\vec{u}$  um den Faktor  $\lambda$ .

Aufgrund des Satzes von Pythagoras berechnet sich die Länge eines Vektors als

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

die auch als *euklidische Norm* von  $\vec{u}$  bezeichnet wird. Es ist geometrisch klar, daß die *Dreiecksungleichung*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

gilt. Daraus folgt (Übung!), daß auch

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$$

gilt. Vektoren der Länge 1 heißen *Einheitsvektoren*. Ihre allgemeine Form ist  $\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen *Koordinaten-Einheitsvektoren*. Für jeden Vektor  $\vec{u}$  in der euklidischen Ebene gibt es eindeutig bestimmte Skalare  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  mit

$$\vec{u} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$$

nämlich  $\lambda = u_x$  und  $\mu = u_y$ .

Für Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ist ihr *Skalarprodukt* definiert als

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \varphi$$

wobei  $\varphi$  der durch  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  eingeschlossenen Winkel ist. Aufgrund von Lemma VII.1.1 gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

woraus sich unmittelbar folgende Rechenregeln für das Skalarprodukt ablesen lassen

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{u} &= u_x \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{u} = u_y \end{aligned}$$

Als Spezialfall erhalten wir

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Mithilfe des Skalarprodukts läßt sich der (cos des) von den Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  eingeschlossene Winkel(s)  $\varphi$  berechnen als

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{(u_x^2 + u_y^2)(v_x^2 + v_y^2)}}$$

Offenbar gilt für Vektoren  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , daß

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ stehen senkrecht aufeinander}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ zeigen in die gleiche Richtung}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ zeigen in die entgegengesetzte Richtung.}$$

Mithilfe des Skalarprodukts läßt sich eine Geradengleichung

$$ax + by = c$$

in Hesse Normalform deuten als

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

was besagt, daß die Projektion des Ortsvektors  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  auf den Einheitsvektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  gleich  $c$  ist.

Eine *Gerade in Parameterdarstellung* ist gegeben durch

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{t} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

wobei  $\vec{r}_0$  ein Punkt auf der Geraden ist und  $\vec{t}$  als ein *Richtungsvektor* der Geraden zu verstehen ist, der als von  $\vec{0}$  verschieden vorausgesetzt wird. Die Gerade selbst ist die Punktmenge  $\{\vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ , die durch  $\lambda \in \mathbb{R}$  „parameterisiert“ wird. Wir diskutieren nun, wie man die zugehörige Geradengleichung in Hesse Normalform bestimmen kann. Zu diesem Zweck bestimmen wir erst mal einen Vektor  $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$ , der orthogonal zum Richtungsvektor  $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$  steht. Die naheliegende Wahl ist  $s_x = t_y$  und  $s_y = -t_x$ , da sie  $\vec{s} \cdot \vec{t} = 0$  und  $\|\vec{s}\| = \|\vec{t}\|$  zur Folge hat. Der Vektor

$$\vec{n} = \begin{cases} \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} & \vec{r}_0 \cdot \vec{s} \geq 0 \\ -\frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} & \vec{r}_0 \cdot \vec{s} < 0 \end{cases}$$

ist ein zu  $\vec{t}$  orthogonaler Einheitsvektor mit der Eigenschaft  $\vec{n} \cdot \vec{r}_0 \geq 0$ , d.h.  $\vec{n}$  ist ein Einheitsvektor, der senkrecht zur Geraden steht und vom Ursprung aus in ihre Richtung zeigt. Der Skalar  $d = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$  gibt den Abstand der Geraden zum Ursprung an. Also liegt  $\vec{r}$  genau dann auf der Geraden, wenn  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ . Somit ist

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = d$$

eine Gleichung der Geraden in Hesse Normalform. Für einen beliebigen Punkt mit Ortsvektor  $\vec{u}$  läßt sich seine Lage relativ zur Geraden folgendermaßen bestimmen

$$\vec{n} \cdot \vec{u} < d \Leftrightarrow \text{Punkt liegt auf selber Seite wie der Ursprung}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} > d \Leftrightarrow \text{Punkt liegt auf der dem Ursprung gegenüber liegenden Seite}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = d \Leftrightarrow \text{Punkt liegt auf der Geraden.}$$

## VII.2 Der euklidische Raum

Ein Punkt im Euklidischen Raum ist gegeben durch das Tripel  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  seiner Koordinaten bzgl. eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

Eine *Ebene* im euklidischen Raum ist die Menge aller Punkte  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , die eine Gleichung

$$ax + by + cz = d$$

erfüllen, wobei nicht  $a, b$  und  $c$  alle gleich 0 sind.

Eine *Gerade* ist der Schnitt zweier nicht paralleler Ebenen, d.h. die Lösungsmenge zweier Ebenengleichungen

$$ax + by + cz = d \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

wobei kein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existiert mit  $a' = \lambda a$ ,  $b' = \lambda b$  und  $c' = \lambda c$ , d.h. die beiden Ebenen nicht parallel sind.

Ein *Vektor* im euklidischen Raum ist eine Klasse von Strecken gleicher Länge und gleicher Richtung. Er wird durch ein Tripel

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen angegeben. Dieses Tripel repräsentiert Strecken mit beliebigem Anfangspunkt  $(x_0, y_0, z_0)$  und Endpunkt  $(x_0 + u_x, y_0 + u_y, z_0 + u_z)$ . Typischerweise wählt man den Anfangspunkt gleich  $(0, 0, 0)$  und somit wird der Vektor

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  durch den Punkt  $(u_x, u_y, u_z)$  repräsentiert. Die offensichtliche Bijektion zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren wird mithilfe folgender Notation bewerkstelligt

$$(u_x, u_y, u_z)^T = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}^T = (u_x, u_y, u_z)$$

wobei  $(-)^T$  für ‘‘Transposition’’ steht.

Ähnlich wie im  $\mathbb{R}^2$  definiert man im  $\mathbb{R}^3$  die Operationen

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_x \\ \lambda \cdot u_y \\ \lambda \cdot u_z \end{pmatrix}$$

für  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , die wiederum als Vektoraddition bzw. Skalarmultiplikation bezeichnet werden.

Die Länge von  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  definieren wir als

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Sie wird auch als *Euklidische Norm* von  $\vec{u}$  bezeichnet wird. Offenbar gilt  $\|u\|_2 = \sqrt{(\sqrt{u_x^2 + u_y^2})^2 + u_z^2}$ , d.h.  $\|u\|_2$  ist im Sinne des Satzes von Pythagoras die Länge der Diagonale  $\vec{u}$  im entsprechenden Quader. Vektoren der Länge 1 heißen wiederum Einheitsvektoren und

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen wiederum *Koordinatenheitsvektoren*. Offenbar gibt es zu jedem  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  eindeutig bestimmte Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$  mit

$$\vec{u} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3$$

nämlich  $\lambda_1 = u_x$ ,  $\lambda_2 = u_y$  und  $\lambda_3 = u_z$ .

Das Skalarprodukt von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ist definiert als

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \varphi$$

wobei  $\varphi$  der von den Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  eingeschlossene Winkel ist. Einfache geometrische Überlegungen legen folgende Rechenregeln nahe

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_x \cdot \vec{e}_1 + u_y \cdot \vec{e}_2 + u_z \cdot \vec{e}_3) \cdot (v_x \cdot \vec{e}_1 + v_y \cdot \vec{e}_2 + v_z \cdot \vec{e}_3) \\ &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \end{aligned}$$

Somit gilt  $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .

Während das *Skalarprodukt* einem Paar von Vektoren einen Skalar zuordnet, kann man im  $\mathbb{R}^3$  eine Operation definieren, die einem Paar von Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  einen Vektor

$$\vec{v} \times \vec{w} = |F| \cdot \vec{n}$$

zuordnet, wobei  $|F|$  die Fläche des durch  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  bestimmten Parallelogramms und  $\vec{n}$  ein Einheitsvektor ist, der auf dem Parallelogramm auf solche Weise senkrecht steht, daß  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  und  $\vec{n}$  ein sogenanntes “Rechtssystem” bilden. Geometrische Überlegungen legen folgende Rechenregeln nahe

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

$$\lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\lambda \cdot \vec{w})$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{w} \times \vec{u})$$

wobei wir die letzten beiden später noch eingehender begründen werden. Überdies folgt aus der Anforderung, daß  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  und  $\vec{v} \times \vec{w}$  ein Rechtssystem bilden, daß insbesondere die Beziehungen

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

gelten. Aus diesen Gesetzen läßt sich folgende Formel für das Vektorprodukt durch einfache Rechnung herleiten

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

nämlich

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_x \cdot \vec{e}_1 + u_y \cdot \vec{e}_2 + u_z \cdot \vec{e}_3) \times (v_x \vec{e}_1 + v_y \vec{e}_2 + v_z \vec{e}_3) \\ &= u_x \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{v}) + u_y \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{v}) + u_z \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{v}) \\ &= u_x \cdot (v_x \cdot \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{\vec{0}} + v_y \cdot \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} + v_z \cdot \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{-\vec{e}_2}) + \\ &\quad u_y \cdot (v_x \cdot \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + v_y \cdot \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{\vec{0}} + v_z \cdot \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{\vec{e}_1}) + \\ &\quad u_z \cdot (v_x \cdot \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{\vec{e}_2} + v_y \cdot \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)}_{-\vec{e}_1} + v_z \cdot \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}_{\vec{0}}) \\ &= u_x v_y \vec{e}_3 - u_x v_z \vec{e}_2 - u_y v_x \vec{e}_3 + u_y v_z \vec{e}_1 + u_z v_x \vec{e}_2 - u_z v_y \vec{e}_1 \\ &= \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit berechnet sich der Inhalt des von den Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aufgespannten Parallelogramms  $F_{\vec{u}, \vec{v}}$  wie folgt

$$|F_{\vec{u}, \vec{v}}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2}$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Das Volumen des durch die Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  aufgespannten *Spats* bzw. *Parallelepipeds* ist der Absolutbetrag von

$$|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |F_{\vec{v}, \vec{w}}| \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}$$

dem orientierten Volumen des Spats.<sup>17</sup> Durch Ausrechnen ergibt sich die explizite Formel

$$|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z - u_z v_y w_x$$

Später werden wir sehen, daß dies mit der Determinante der 3-dimensionalen Matrix mit Spaltenvektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  übereinstimmt.

Wir betrachten nun die Parameterdarstellung von Ebenen im euklidischen Raum. Sei  $\vec{r}_0$  ein Ortsvektor und seien  $\vec{s}, \vec{t} \neq 0$  nicht-parallele Vektoren. Dann ist durch

$$\{\vec{r}_0 + \lambda \vec{s} + \mu \vec{t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  in Parameterform gegeben. Der Vektor  $\vec{u} = \vec{s} \times \vec{t}$  steht senkrecht zu dieser Ebene. Sei  $\vec{n} = \pm \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ , wobei das Vorzeichen so gewählt sei, daß  $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 \geq 0$ . Dann ist

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = d$$

die Gleichung der Ebene in Hesse Normalform.

Abschließend behandeln wir die Frage, wie man den Abstand zweier in Parameterform gegebener Geraden

$$\begin{aligned} g_1 &: \vec{r}_1 + \lambda \vec{t}_1 \\ g_2 &: \vec{r}_2 + \mu \vec{t}_2 \end{aligned}$$

im euklidischen Raum bestimmt. Der Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\|}$$

<sup>17</sup>Aus geometrischen Gründen ist klar, daß das Spatprodukt unter zyklischer Vertauschung invariant ist, d.h.

$$|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| = |\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}| = |\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}|$$

da zyklische Vertauschungen die Orientierung erhalten. Überdies gilt offenbar, daß

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}| = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{u}_2 \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}| + |\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}|$$

Aus diesen beiden Beobachtungen ersieht man aber sehr leicht, daß

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

da für Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  gilt

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot ((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) &= |\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_i| = |\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_i| + |\vec{v}, \vec{w}, \vec{e}_i| \\ &= \vec{e}_i \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) + \vec{e}_i \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\ &= \vec{e}_i \cdot (\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}) \end{aligned}$$

steht senkrecht zu beiden Geraden. Somit ergibt sich der Abstand der beiden Geraden als

$$d(g_1, g_2) = |\vec{n} \cdot \vec{r}_2 - \vec{n} \cdot \vec{r}_1| = |\vec{n} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|$$

### VII.3 Vektorräume und lineare Abbildungen

Um unendlichdimensionale Räume nicht auszuschließen und vor allem um den Begriff unabhängig von der Wahl einer Basis zu definieren, führen wir folgende abstrakte Definition eines Vektorraumes ein.

**Definition VII.3.1** (Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ )

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, typischerweise  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , dann ist ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  (auch genannt  $\mathbb{K}$ -Vektorraum) gegeben durch eine Menge  $V$  und Operationen

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad - \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

die folgenden Axiomen genügen

$$(V1) \quad u + v = v + u \text{ (Kommutativgesetz)}$$

$$(V2) \quad (u + v) + w = u + (v + w) \text{ (Assoziativgesetz)}$$

$$(V3) \quad \text{es existiert (genau) ein } 0 \in V \text{ mit } 0 + u = u = u + 0 \text{ für alle } u \in V$$

$$(V4) \quad \text{zu jedem } u \in V \text{ existiert (genau) ein } -u \in V \text{ mit } u + (-u) = 0$$

$$(V5) \quad \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad (1. \text{ Distributivgesetz})$$

$$(V6) \quad (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u \quad (2. \text{ Distributivgesetz})$$

$$(V7) \quad (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$$

$$(V8) \quad 1 \cdot u = u.$$

Die Elemente von  $V$  heißen Vektoren und die Elemente von  $\mathbb{K}$  heißen Skalare.

Für jede natürliche Zahl  $n$  kann man die Menge  $\mathbb{K}^n$  folgendermaßen mit einer  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur ausstatten

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

wobei

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Elemente aus  $\mathbb{K}^n$  sind und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

In der angewandten Mathematik ist der Körper  $\mathbb{K}$  meist  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Aber in der für die informatische Praxis äußerst relevanten Theorie der *error-correcting codes* betrachtet man Vektorräume über endlichen Körpern.

### Definition VII.3.2

Sei  $V$  ein Vektorraum dann ist eine Linearkombination der Elemente  $x_1, \dots, x_n$  ein Vektor der Gestalt  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in V$ , wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ .

Ein Untervektorraum von  $V$  ist eine Teilmenge  $W \subseteq V$ , die unter Linearkombinationen abgeschlossen ist.

Offenbar ist ein Untervektorraum eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums wieder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, da für  $x \in W$  sein additives Inverses  $-x = (-1) \cdot x \in W$ . Man zeigt leicht (Übung!), daß Untervektorräume unter beliebigen Schnitten abgeschlossen sind. Also existiert für beliebige Teilmengen  $S \subseteq V$  ein kleinster Untervektorraum  $W$  von  $V$  mit  $S \subseteq W$ . Diesen nennt man *lineare Hülle* bzw. *linearen Spann* von  $S$  in  $V$  und bezeichnet ihn mit  $\text{Sp}(S)$ . Man sieht leicht (Übung!), daß  $\text{Sp}(S)$  aus allen Linearkombinationen von Elementen aus  $S$  besteht.

### Definition VII.3.3 (lineare Unabhängigkeit, Basis)

Eine Teilmenge  $S$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  heißt linear unabhängig, wenn für paarweise verschiedene Elemente  $x_1, \dots, x_n \in S$  aus  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$  folgt, daß alle Skalare  $\lambda_i$  gleich 0 sind.

Eine Basis eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  ist eine linear unabhängige Teilmenge  $B \subseteq V$  mit  $\text{Sp}(B) = V$ . Ein Vektorraum heißt endlichdimensional, wenn er eine endliche Basis besitzt.

Wenn  $b_1, \dots, b_n$  eine (wiederholungsfreie Aufzählung einer) Basis von  $V$  ist, dann gibt es für jeden Vektor  $x \in V$  eindeutig bestimmte Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit  $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ . Diese Skalare existieren, da  $V$  die lineare Hülle von  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ist, und sie sind eindeutig, weil wegen der linearen Unabhängigkeit von  $b_1, \dots, b_n$  aus  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = x = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$  folgt, daß alle  $\lambda_i = \mu_i$ , da ja  $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$ .

Ein typisches Beispiel einer Basis für den Raum  $\mathbb{K}^n$  sind die Koordinatenheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  wobei  $(e_i)_j = \delta_{ij}$ , d.h. die  $i$ -te Komponente von  $e_i$  ist 1 und alle anderen Komponenten von  $e_i$  sind 0. Offenbar lässt sich jeder Vektor in  $\mathbb{K}^n$  als Linearkombination der  $e_i$  darstellen und aus  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  folgt, daß alle  $\lambda_i = 0$ , also sind  $e_1, \dots, e_n$  linear unabhängig. Obwohl diese spezielle Basis als ‘kanonisch’ erscheint, gibt es doch sehr viele verschiedene Basen für Vektorräume. Wenn  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis ist, so ist auch  $\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n$  eine Basis, sofern alle  $\lambda_i \neq 0$ . Für den Raum  $\mathbb{R}^2$  ist  $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$  eine Basis, sofern die Differenz  $\beta - \alpha$  kein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist.

Mithilfe eines sehr abstrakten Arguments (dem sogenannten “Zornschen Lemma”) kann man beweisen, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Im Falle unendlichdimensionaler Vektorräume sind diese Basen nicht besonders nützlich. Im Rahmen der linearen Algebra interessiert man sich typischerweise für endlich dimensionale Vektorräume, für welche definitionsgemäß Basen existieren und solche auch effektiv angegeben werden können. Dies wird durch folgendes Lemma sichergestellt.

**Lemma VII.3.4** (Steinitzscher Austauschsatz)

Sei  $B$  eine Basis für einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  und  $A$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $V$ . Dann gibt es eine Teilmenge  $C$  von  $B$ , sodaß  $A \cup (B \setminus C)$  eine Basis für  $V$  ist und  $|A| = |C|$ , d.h.  $A$  und  $C$  gleich viele Elemente enthalten. Also hat  $A$  höchstens so viele Elemente wie  $B$ .

*Beweis:* Mit Induktion über die Anzahl der Elemente von  $A$ . Wenn  $A$  leer ist, ist die Behauptung trivial. Angenommen  $A$  ist nicht leer. Dann gibt es ein  $a \in A$  und  $\tilde{A} := A \setminus \{a\}$  hat ein Element weniger als  $A$ . Aufgrund der Induktionshypothese gibt es eine Teilmenge von  $\tilde{C}$  von  $B$ , sodaß  $\tilde{A} \cup (\tilde{C} \cup \{a\})$  eine Basis ist und  $|\tilde{A}| = |\tilde{C}|$ . Es läßt sich dann  $a$  als Linearkombination  $\sum_{v \in \tilde{A}} \lambda_v v + \sum_{u \in B \setminus \tilde{C}} \lambda_u u$  schreiben. Da  $A$  linear unabhängig ist, gibt es ein  $b \in B \setminus \tilde{C}$  mit  $\lambda_b \neq 0$ . Somit ist

$$b = \frac{1}{\lambda_b} a - \sum_{w \in \tilde{A} \cup (B \setminus (\tilde{C} \cup \{b\}))} \frac{\lambda_w}{\lambda_b} w$$

ein Element von  $\text{Sp}(A \cup (B \setminus (\tilde{C} \cup \{b\})))$ . Wir setzen nun  $C = \tilde{C} \cup \{b\}$ . Offenbar gilt  $|C| = |A|$ . Weil  $b \in \text{Sp}(A \cup (B \setminus C))$ , gilt  $V \subseteq \text{Sp}(\tilde{A} \cup (B \setminus \tilde{C})) \subseteq \text{Sp}(A \cup (B \setminus C))$  und somit  $V = \text{Sp}(A \cup (B \setminus C))$ . Um zu zeigen, daß  $A \cup (B \setminus C)$  linear unabhängig ist, nehmen wir an  $\sum_{w \in A \cup (B \setminus C)} \mu_w w = 0$ . Dann gilt aber

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{w \in \tilde{A} \cup (B \setminus C)} \mu_w w + \mu_a a \\ &= \sum_{w \in \tilde{A} \cup (B \setminus C)} \mu_w w + \mu_a \left( \sum_{u \in \tilde{A} \cup (B \setminus \tilde{C})} \lambda_u u \right) \\ &= \mu_a \lambda_b b + \sum_{w \in \tilde{A} \cup (B \setminus C)} (\mu_w + \mu_a \lambda_w) w \end{aligned}$$

Da  $\tilde{A} \cup (B \setminus \tilde{C})$  nach Induktionshypothese linear unabhängig ist, gilt  $\mu_a \lambda_b = 0$ . Da aber  $\lambda_b \neq 0$ , folgt  $\mu_a = 0$ . Also gilt

$$0 = \sum_{w \in \tilde{A} \cup (B \setminus C)} \mu_w w$$

und somit  $\mu_w = 0$  für alle  $w \in \tilde{A} \cup (B \setminus C)$ . Also sind alle  $\mu_w = 0$ , wie zu zeigen war.  $\square$

Eine unmittelbare Konsequenz des Steinitzschen Austauschsatzes ist, daß alle Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums gleich viele Elemente haben. Deshalb ist folgende Definition sinnvoll.

**Definition VII.3.5** (Dimension eines Vektorraums)

Für einen endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  sei  $\dim(V)$  die Anzahl der Elemente einer (beliebigen) Basis von  $V$ .

Wenn nun ein endlichdimensionaler Vektorraum  $V$  Dimension  $n$  hat, dann kann man eine Basis folgendermaßen konstruieren. Wähle  $b_1 \in V \setminus \{0\}$  beliebig. Wenn  $b_1, \dots, b_k$  bereits konstruiert sind und  $k < n$ , dann wähle  $b_{k+1} \in V \setminus \text{Sp}(\{b_1, \dots, b_k\})$  beliebig. Nach  $n$  Schritten erhält man so eine Basis  $b_1, \dots, b_n$ .

Auf ähnliche Art und Weise kann man auch für einen Unterraum  $W$  eines endlichen Vektorraums  $V$  eine Basis konstruieren. Dieser Prozess muß nach  $\dim(V)$  Schritten abbrechen, da ja linear unabhängige Teilmengen von  $W$  auch in  $V$  linear unabhängig sind und somit nach Satz VII.3.4 höchstens  $\dim(V)$  Elemente enthalten können.

Wir wenden uns nun den strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Vektorräumen zu, den sogenannten linearen Abbildungen.

**Definition VII.3.6** (lineare Abbildung)

Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  ist eine Funktion  $f : V \rightarrow W$ , sodaß

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Man sieht leicht ein, daß die identische Abbildung  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  immer linear ist und daß lineare Abbildungen unter Komposition abgeschlossen sind.

**Satz VII.3.7** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Basis  $b_1, \dots, b_n$  und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $f$  durch  $f(b_1), \dots, f(b_n)$  eindeutig bestimmt. Außerdem existiert zu  $x_1, \dots, x_n \in W$  genau eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $f(b_i) = x_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis:* Angenommen  $g : V \rightarrow W$  ist eine lineare Abbildung mit  $g(b_i) = f(b_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Sei  $x \in V$ . Dann gibt es Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit  $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ . Also gilt

$$f(x) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n) = \lambda_1 g(b_1) + \dots + \lambda_n g(b_n) = g(x)$$

wegen der Linearität von  $f$  und  $g$ . Also ist  $f = g$ .

Für  $x_1, \dots, x_n \in W$  definieren wir eine geeignete lineare Abbildung  $f$  durch

$$f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Die Definition von  $f$  ist eindeutig, da  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis ist. Die Linearität von  $f$  ist leicht nachzurechnen (Übung!) und es gilt offenbar  $f(b_i) = x_i$  aufgrund der Definition von  $f$ .  $\square$

**Definition VII.3.8** (Vektorraum Isomorphismus)

Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt Vektorraum-Isomorphismus, wenn eine lineare Abbildung  $g : W \rightarrow V$  existiert mit  $g \circ f = \text{id}_V$  und  $f \circ g = \text{id}_W$ .

Vektorräume  $V$  und  $W$  heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus  $f : V \rightarrow W$  gibt.

Offenbar ist ein Vektorraum-Isomorphismus immer eine bijektive Funktion. Man sieht leicht, daß jede bijektive linear Abbildung  $f : V \rightarrow W$  auch ein Isomorphismus ist, da  $f^{-1} : W \rightarrow V$  auch linear ist (Übung!).

Man überzeugt sich auch leicht von der Tatsache (Übung!), daß ein Vektorraum-Isomorphismus Basen erhält. Deshalb haben isomorphe endlich dimensionale Vektorräume dieselbe Dimension. Folgender Satz besagt, daß “bis auf Isomorphie” endlich dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume von der Gestalt  $\mathbb{K}^n$  für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}_0$  sind.

**Satz VII.3.9** Ein endlich dimensionaler Vektorraum  $V$  ist isomorph zu  $\mathbb{K}^{\dim(V)}$ .

*Beweis:* Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum und  $b_1, \dots, b_{\dim(V)}$  eine Basis von  $V$ . Dann ist die lineare Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{K}^{\dim(V)}$  mit  $f(b_i) = e_i$  ein Isomorphismus, wobei  $e_i$  der  $i$ -te Koordinatenvektor ist.  $\square$

**Definition VII.3.10** Der Kern einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ist die Menge  $\ker(f) := f^{-1}(0)$  und das Bild von  $f$  ist  $\text{rng}(f) := \{f(x) \mid x \in V\}$ .

Offenbar ist  $\ker(f)$  ein Untervektorraum von  $V$  und  $\text{rng}(f)$  ein Untervektorraum von  $W$ . Man sieht leicht (Übung!), daß  $f$  genau dann injektiv ist, wenn  $\ker(f)$  Dimension 0 hat.

Außerdem stehen im Falle linearer Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen Kern und Bild in folgendem Zusammenhang.

**Satz VII.3.11** (Dimensionsatz)

Wenn  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen ist, dann gilt  $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{rng}(f)) = \dim(V)$ .

*Beweis:* Sei  $B_1$  eine Basis für  $\ker(f)$ . Wegen Satz VII.3.4 kann man  $B_1$  zu einer Basis  $B$  von  $V$  erweitern. Wir schreiben  $B_2$  für  $B \setminus B_1$  und  $V_i$  für  $\text{Sp}(B_i)$ . Offenbar gilt  $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$ .

Jeder Vektor  $x \in V$  läßt sich auf eindeutige Weise schreiben als  $x = x_1 + x_2$  mit  $x_i \in V_i$ . Aus diesem Grund ist  $V_2$  isomorph zu  $\text{rng}(f)$ . Somit ist  $\dim(V_2) = \dim(\text{rng}(f))$ . Da auch  $\dim(V_1) = \dim(\ker(f))$ , gilt somit  $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{rng}(f))$  wie behauptet.  $\square$

## VII.4 Matrizen

In diesem Abschnitt führen wir einen Formalismus ein, der es erlaubt, lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen in kompakter Form zu repräsentieren. Aus Satz VII.3.9 wissen wir, daß endlich dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume von der Gestalt  $\mathbb{K}^n$  sind. Also reicht es, lineare Abbildungen  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  zu betrachten. Aufgrund von Satz VII.3.7 ist  $f$  eindeutig beschrieben durch  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ , wobei  $e_1, \dots, e_n$  die Koordinateneinheitsvektoren des Raums  $\mathbb{K}^n$  sind. Wir können nun  $f$  durch das rechteckige  $m \times n$  Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

repräsentieren, dessen  $j$ -te Spalte  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$  gleich  $f(e_j)$  ist. Solche  $m \times n$  Zah-

lenschemata nennen wir  $m \times n$  **Matrizen** und bezeichnen die Menge aller  $m \times n$  Matrizen mit  $\mathbb{K}_m^n$ , wobei  $m$  die Anzahl der Zeilen und  $n$  die Anzahl der Spalten angibt. Offenbar ist nun

$$f(x)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Die Verallgemeinerung dieser Idee führt zur Matrixmultipli-

kation, die es erlaubt Hintereinanderausführung linearer Abbildungen in Termen der ihnen assoziierten Matrizen auszudrücken (siehe Satz VII.4.2).

**Definition VII.4.1** (Matrixmultiplikation)

Seien  $A \in \mathbb{K}_m^n$  und  $B \in \mathbb{K}_n^p$ , i.e.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad B = (b_{jk})_{\substack{j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}}$$

dann ist ihr Matrixprodukt  $AB = C \in \mathbb{K}_m^p$  definiert als

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

für  $i = 1, \dots, m$  und  $k = 1, \dots, p$ .

Indem wir  $x \in \mathbb{K}^n$  als Element von  $\mathbb{K}_n^1$  auffassen, können wir die mit  $A \in \mathbb{K}_m^n$  assoziierte lineare Abbildung  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  definieren als

$$f(x) = Ax$$

für  $x \in \mathbb{K}^n$ . Es gilt nun

**Satz VII.4.2** Seien  $A \in \mathbb{K}_m^n$  und  $B \in \mathbb{K}_n^p$  und  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  bzw.  $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  die assoziierten linearen Abbildungen. Dann ist  $f \circ g$  die zu  $AB$  assoziierte lineare Abbildung.

*Beweis:* Für  $x \in \mathbb{K}^p$  gilt

$$(f(g(x)))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(g(x))_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^p b_{jk}x_k = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}x_k = \sum_{k=1}^p c_{ik}x_k$$

wobei  $c_{ik}$  das  $i$ -te Element der  $k$ -ten Spalte von  $C = AB$  ist.  $\square$

Eine Konsequenz dieses Satzes ist, daß für Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$ , für die die Kompositionen  $AB$  und  $BC$  definiert sind, gilt, daß  $(AB)C = A(BC)$ , d.h. die Matrizenmultiplikation ist assoziativ, wann immer sie definiert ist.

Jedoch ist die Multiplikation quadratischer Matrizen im allgemeinen nicht kommutativ, wie man anhand des folgenden Beispiels

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sieht.

Die zur identischen Abbildung auf  $\mathbb{K}^n$  assoziierte Matrix ist

$$I_n = (\delta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

und wird als  $n$ -te *Einheitsmatrix* bezeichnet. Alle ihre Einträge sind gleich 0 außer auf der Diagonalen, wo sie gleich 1 sind. Für Matrizen  $A \in \mathbb{K}_m^n$  und  $B \in \mathbb{K}_n^p$  gilt offenbar

$$AI_n = A \quad \text{und} \quad I_n B = B$$

d.h. Einheitsmatrizen verhalten sich als (eine Art) neutraler Elemente bzgl. der Matrixmultiplikation.

Die Menge  $\mathbb{K}_m^n$  der  $m \times n$  Matrizen trägt überdies die Struktur eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, wobei für

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad \text{und} \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

ihre Summe als

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

und für  $\lambda \in \mathbb{K}$  die Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

definiert sind. Die entsprechenden Operationen auf der Menge  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  linearen Abbildungen von  $\mathbb{K}^n$  nach  $\mathbb{K}^m$  sind durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

gegeben.

Wenn  $f_1, f_2 : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $g : U \rightarrow V_1$  und  $h : V_2 \rightarrow W$  lineare Abbildungen sind, so gilt

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g \quad h \circ (f_1 + f_2) = h \circ f_1 + h \circ f_2$$

wie man leicht nachrechnet (Übung!). Entsprechend gelten für Matrizen (passender Dimension) die beiden Distributivgesetze

$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B \quad C(A_1 + A_2) = CA_1 + CA_2$$

Für jeden  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  trägt somit die Menge  $\text{End}(V) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$  nicht nur die Struktur eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums (bzgl. punktweiser Addition und Skalarmultiplikation), sondern auch eine durch Komposition gegebene assoziative Verknüpfung, die  $\text{id}_V$  als neutrales Element hat und mit der Vektorraumstruktur durch die Gesetze

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)g = \lambda_1 f_1 g + \lambda_2 f_2 g \quad h(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 h f_1 + \lambda_2 h f_2$$

verbunden ist.

Ein Element  $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  heißt invertierbar, wenn ein  $g \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  existiert, sodaß  $gf = \text{id}_V = fg$ . Ein solches  $g$  ist eindeutig, falls es existiert, und wird mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

Im Falle  $V = \mathbb{K}^n$  überträgt sich dieser Begriff auf quadratische  $n \times n$  Matrizen.

**Definition VII.4.3** (reguläre Matrizen)

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}_n^n$  heißt invertierbar bzw. regulär, wenn ein  $B \in \mathbb{K}_n^n$  existiert mit  $AB = I_n = BA$ , welches wir mit  $A^{-1}$  bezeichnen und die zu  $A$  inverse Matrix nennen.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit Einführung einer allgemeinen Transpositionsoperation, die sich später als nützlich erweisen wird.

**Definition VII.4.4** Für  $A \in \mathbb{K}_m^n$  sei die transponierte Matrix definiert als

$$A^T = (a_{ji}) \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

in  $\mathbb{K}_n^m$ .

## VII.5 Basistransformationen

Die Repräsentation einer linearen Abbildung  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  durch eine  $m \times n$  Matrix  $A = (a_{ij})$  hängt wesentlich ab von der Wahl kanonischer Basen für  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}^m$ , nämlich der durch die Koordinateneinheitsvektoren gegebenen. Seien nun aber  $u_1, \dots, u_n$  bzw.  $v_1, \dots, v_m$  beliebige Basen von  $\mathbb{K}^n$  bzw.  $\mathbb{K}^m$ , erhält man eine *Darstellung* von  $f$  bzgl. dieser Basen durch die Matrix  $T^{-1}AS$ , wobei  $S = (u_1 \mid \dots \mid u_n)$  und  $T = (v_1 \mid \dots \mid v_n)$  die regulären Matrizen sind, die den Basiswechsel beschreiben.

## VII.6 Determinanten

Man sieht einer quadratischen Matrix nicht sofort an, ob sie regulär ist. Eine effektive Möglichkeit dies festzustellen besteht darin, ihre *Determinante* zu berechnen, da sich herausstellt wird, daß eine quadratische Matrix  $A$  genau dann regulär ist, wenn ihre Determinante  $\det A \neq 0$ .

Für eine  $2 \times 2$  Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ist ihre Determinante definiert als

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Man sieht leicht, daß  $\det A = 0$ , falls die Spaltenvektoren von  $A$  linear abhängig sind. Durch einfache Fallunterscheidung (Übung!) sieht man, daß aus  $\det A = 0$  auch folgt, daß ein Spaltenvektor aus dem anderen durch Multiplikation mit einem Skalar entsteht.

Für  $3 \times 3$ -Matrizen  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  ist  $\det A$  definiert als das Spatprodukt ihrer Spaltenvektoren, d.h.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Aufgrund der geometrischen Interpretation des Spatprodukts ist klar, daß  $\det A = 0$  genau dann, wenn die Spaltenvektoren linear abhängig sind.

Für den Fall allgemeiner  $n \times n$  Matrizen ist die Definition etwas komplizierter und Bedarf eines gewissen Vorbaus.

**Definition VII.6.1** (Permutationen, Signatur)

Für eine natürliche Zahl  $n$  bezeichne  $S_n$  die Menge der Permutationen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ , d.h. der Menge der bijektiven Abbildungen von  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\{1, \dots, n\}$ . Die Signatur von  $\pi \in S_n$  ist definiert als  $\sigma(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$ .

Offenbar ist  $|\sigma(\pi)|$  immer gleich 1. Ein *Fehlstand* von  $\pi$  ist ein Paar  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j \leq n$ , sodaß  $\pi(j) < \pi(i)$ . Man sieht leicht, daß  $\sigma(\pi)$  genau dann gerade ist, wenn die Anzahl der Fehlstände von  $\pi$  gerade ist. Eine einfache Rechnung überzeugt einen davon, daß  $\sigma(\pi_2 \circ \pi_1) = \sigma(\pi_2)\sigma(\pi_1)$  und  $\sigma(\text{id}) = 1$ . Also ist  $\sigma(\pi^{-1}) = \sigma(\pi)$ .

Mit  $(ij)$  bezeichne man diejenige Permutation, die  $i$  und  $j$  vertauscht und alle anderen Elemente von  $\{1, \dots, n\}$  unverändert läßt. Permutationen dieser einfachen Gestalt nennt man *Transpositionen*. Für  $1 \leq i < j \leq n$  ist die Anzahl der Fehlstände der Transposition  $(ij)$  gleich  $(j-i) + (j-i-1)$ , also ungerade. Wenn  $\pi = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1$ , wobei die  $\tau_j$  Transpositionen sind, dann ist  $\sigma(\pi) = (-1)^m$ .

### Definition VII.6.2 (Determinante)

Für  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$  ist ihre Determinante definiert als  $\det A = |A| = \sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$ .

Durch (geduldiges) Nachrechnen sieht man, daß die allgemeine Definition für die Spezialfälle  $n = 2, 3$  mit den obigen *ad hoc* Definitionen übereinstimmt.

Ohne Beweis sei hier folgender Satz angeführt, der das oben im Falle  $n = 3$  beobachtete Schema verallgemeinert.

### Satz VII.6.3 (Laplacescher Entwicklungssatz)

Für  $A \in \mathbb{K}_n^n$  gilt

$$a) \quad \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \tilde{A}_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach i-ter Zeile})$$

$$b) \quad \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \tilde{A}_{ij} \quad (\text{Entwicklung nach j-ter Spalte})$$

wobei  $\tilde{A}_{ij}$  diejenige  $(n-1) \times (n-1)$  Matrix ist, die aus  $A$  durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte hervorgeht.

Weitere nützliche Eigenschaften von Determinanten sind in folgendem Satz zusammengefaßt.

### Satz VII.6.4

$$a) \quad \det I = \det(e_1 | \dots | e_n) = 1$$

$$b) \quad \det \text{ ist in jeder Spalte linear, d.h.}$$

$$\begin{aligned} \det(a_1 | \dots | a_{j-1} | \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i | a_{j+1} | \dots | a_n) \\ = \sum_{i=1}^m \lambda_i \det(a_1 | \dots | a_{j-1} | b_i | a_{j+1} | \dots | a_n) \end{aligned}$$

- c)  $\det(a_1 | \dots | a_i | \dots | a_j | \dots | a_n) = -\det(a_1 | \dots | a_j | \dots | a_i | \dots | a_n)$
- d)  $\det A^T = \det A$  (daraus folgen analoge Aussagen für Zeilen (z.B. ist  $\det$  auch in jeder Zeile linear).
- e)  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

*Beweis:* Die ersten vier Behauptungen folgen relativ unmittelbar aus der Definition und Satz VII.6.3. Wir beweisen nun Behauptung e) unter Verwendung der Aussagen b)-d). Seien  $a_1, \dots, a_n$  bzw.  $b_1, \dots, b_n$  die Spaltenvektoren von  $A$  bzw.  $B$ . Dann sind  $Ab_1, \dots, Ab_n$  die Spaltenvektoren von  $AB$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(AB_1 | \dots | AB_n) = \det(\sum_{k=1}^n b_{k1}a_k | \dots | \sum_{k=1}^n b_{kn}a_k) \stackrel{b)}{=} \\ &= \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n b_{k_11} \dots b_{k_nn} \det(a_{k_1} | \dots | a_{k_n}) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} b_{\pi(1)1} \dots b_{\pi(n)n} \det(a_{\pi(1)} | \dots | a_{\pi(n)}) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) b_{\pi(1)1} \dots b_{\pi(n)n} \det(a_1 | \dots | a_n) = \det(A) \det(B^T) \stackrel{d)}{=} \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

Aus c) folgt, daß die Determinante gleich 0 ist, wenn zwei verschiedenen Spalten gleich sind. Dies rechtfertigt Schritt (1). Durch mehrfache Anwendung von c) folgt, daß  $\det(a_{\pi(1)} | \dots | a_{\pi(n)}) = \sigma(\pi) \det(a_1 | \dots | a_n)$ . Dies rechtfertigt Schritt (2).  $\square$

Zuerst sei bemerkt, daß die Anforderungen a), b) und c) die Abbildung  $\det : \mathbb{K}_n^n \rightarrow \mathbb{K}$  eindeutig festlegen. Bedingung b) besagt, daß  $\det$  in jeder Spalte linear ist. Deshalb ist die Funktion  $\det$  festgelegt durch ihr Verhalten auf Matrizen, deren Spaltenvektoren alle Koordinateneinheitsvektoren sind. Aus c) folgt, daß eine solche Matrix Determinante 0 hat, wenn ein Koordinateneinheitsvektor in mehreren Spalten vorkommt. Sofern aber in den Spalten alle Koordinateneinheitsvektoren vorkommen, läßt sich mithilfe von a) und c) bestimmen, ob die Determinante 1 oder  $-1$  ist, denn es gilt  $\det(e_{\pi(1)} | \dots | e_{\pi(n)}) = \sigma(\pi)$ .

Aus Satz VII.6.3 folgt, daß  $\det A = 0$ , wenn einer der Zeilenvektoren oder einer der Spaltenvektoren gleich 0 ist. Daraus folgt mit b), daß die Determinante einer Matrix sich nicht ändert, wenn man zur  $i$ -ten Spalte ein Vielfaches der  $j$ -ten Spalte addiert, sofern  $i \neq j$ . Somit ist die Determinante einer Matrix, deren Spaltenvektoren linear abhängig sind, gleich 0. Wenn aber die Spaltenvektoren von  $A$  linear unabhängig sind, dann ist  $A$  invertierbar und somit gilt wegen e), daß  $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$ , und somit  $\det A \neq 0$ . Also haben wir soeben folgenden Satz bewiesen.

### Satz VII.6.5

Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn  $\det A \neq 0$ .

Eine konkrete Formel zur Berechnung inverser Matrizen stellt folgender Satz bereit.

**Satz VII.6.6** *Sei  $A = (a_{ij})$  eine invertierbare  $n \times n$  Matrix, dann berechnet sich die dazu inverse Matrix nach der Formel*

$$A^{-1} = \left( \frac{(-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ji}}{\det A} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

*Beweis:* Die Formel ist sinnvoll, da nach Satz VII.6.5 die Matrix  $A$  genau dann invertierbar ist, wenn  $\det A \neq 0$ .

Das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Matrix  $AA^{-1}$  ist  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{(-1)^{k+j} \det \tilde{A}_{jk}}{\det A}$ .

Im Falle  $i = j$  ist dies wegen Satz VII.6.3 a) gleich  $\frac{\det A}{\det A} = 1$ . Wenn  $i \neq j$ , dann ist wegen Satz VII.6.3 a) die Summe  $\sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+j} \det \tilde{A}_{jk} = \det B$ , wobei  $B$  diejenige Matrix ist, die aus  $A$  hervorgeht, indem man die  $j$ -te Zeile durch die  $i$ -te Zeile ersetzt. Da dann  $\det B = 0$ , gilt  $\sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{(-1)^{k+j} \det \tilde{A}_{jk}}{\det A} = \frac{\det B}{\det A} = \frac{0}{\det A} = 0$ .

□

Für eine invertierbare  $2 \times 2$  Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  berechnet sich also ihre inverse Matrix nach der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Die Formel für inverse Matrizen ist auch die Grundlage der als *Cramersche Regel* bekannten Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  im Falle, daß  $A$  invertierbar ist. Es gilt dann nämlich, daß  $x = A^{-1}b$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $Ax = b$  ist, d.h.

$$x_i = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j} b_j \det \tilde{A}_{ji}}{\det A} = \frac{\det(a_1 | \cdots | a_{i-1} | b | a_{i+1} | \cdots | a_n)}{\det A}$$

wobei  $a_j$  der  $j$ -te Spaltenvektor von  $A$  ist. Da die Berechnung von Determinanten jedoch sehr aufwendig ist ( $n \cdot n!$  Multiplikationen und  $(n-1)n!$  Additionen) und außerdem numerisch instabil ist, verwendet man in der Praxis eher das im übernächsten Abschnitt vorgestellte Gaußsche Eliminationverfahren, das schon aus der Schule bekannt ist.

## VII.7 Elementare Umformungen von Matrizen

Um Matrizen ohne Berechnung von Determinanten zu invertieren und um lineare Gleichungssysteme zu lösen, sind *elementaren Umformung* von Matrizen unerlässlich.

**Definition VII.7.1** (elementare Umformung einer Matrix)

Unter einer elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformung einer Matrix versteht man eine Operation folgender Art

- (1) multipliziere eine Zeile bzw. Spalte mit einem von 0 verschiedenen Skalar
- (2) addiere zur  $i$ -ten Zeile bzw. Spalte das  $\lambda$ -fache der  $j$ -ten Zeile bzw. Spalte, wobei  $i \neq j$ .

Man überzeugt sich leicht davon (Übung!), daß Zeilen- bzw. Spaltenumformungen durch Multiplikation von links bzw. rechts mit einer geeigneten regulären Matrix bewerkstelligt werden können. Man sieht auch leicht (Übung!), daß sich Vertauschungen von Zeilen bzw. Spalten durch eine Hintereinanderausführung von Zeilen- bzw. Spaltenumformungen bewerkstelligen lassen.

**Satz VII.7.2**

Jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  läßt sich durch elementare Umformungen auf die Gestalt  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  bringen.

**Beispiel VII.7.3**

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(**)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(***)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(\*) von der zweiten Zeile wird die erste abgezogen

(\*\*) von der zweiten Spalte wird die erste abgezogen

(\*\*\*) die letzte Spalte wird mit  $-\frac{1}{2}$  multipliziert

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(**)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(**)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(***)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(\*) zur ersten Zeile wird die zweite Zeile addiert (\*\*\*) von der dritten Spalte wird ie erste subtrahiert (\*\*\*)) die zweite Spalte wird mit  $-1$  multipliziert

## VII.8 Matrixinversion durch Zeilenumformungen

Wegen Satz VII.3.11 ist eine quadratische Matrix genau dann invertierbar, wenn ihre Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Da wegen Satz VII.6.4 gilt  $\det A = \det A^T$ , ist also  $A$  genau dann regulär, wenn ihre Zeilenvektoren linear unabhängig sind.

Diese Beobachtung erlaubt uns, für invertierbare Matrizen  $A$  ihre inverse Matrix  $A$  durch eine Abfolge von Zeilenumformungen zu berechnen. Zu diesem Zweck startet man mit der  $n \times 2n$  Matrix  $(A|I_n)$  (vgl. Bsp. VII.8.1). Nun führt man so lange Zeilenoperationen auf beiden Matrizen parallel aus, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix  $I_n$  steht, d.h.

$$(A|I) \rightsquigarrow (E_1 A | E_1) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow (\underbrace{E_k E_{k-1} \dots E_1 A}_{=I_n} | E_k \dots E_1)$$

wobei die  $E_i$  die den Zeilenumformungen entsprechenden invertierbaren Matrizen sind. Also ist  $E_k \dots E_1 = A^{-1}$ , d.h.  $A^{-1}$  ist der rechte Teil der am Ende erhaltenen  $n \times 2n$  Matrix.

**Beispiel VII.8.1** Die Ausgangsmatrix sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir führen nun folgende Schritte aus

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(*)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(**)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(***)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{****)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

(\*) von der 3. Zeile wird das Doppelte der 1. Zeile subtrahiert

(\*\*) 2. und 3. Zeile vertauschen

(\*\*\*) von der 1. Zeile wird die 3. Zeile subtrahiert

(\*\*\*\*) zur 2. Zeile wird das Doppelte der 3. Zeile addiert

$$\text{Also ist die Inverse } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anhand des Beispiels sieht man die Vorgangweise. Man bringt zuerst den linken Teil sukzessive auf obere Dreiecksform, d.h. links unterhalb der Diagonalen sind alle Einträge gleich 0, und in der Diagonalen stehen lauter 1en. Dies ist immer möglich, weil andernfalls die verbleibenden Zeilenvektoren linear abhängig wären im Widerspruch dazu, daß  $E_k \dots E_1 A$  immer invertierbar ist und somit ihre Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Sobald aber im linken Teil unterhalb der Diagonalen lauter 0en stehen und die Diagonale mit lauter 1en besetzt ist, kann man analogerweise den linken Teil durch sukzessive Zeilentransformationen auf die gewünschte Gestalt  $I_n$  bringen.

## VII.9 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem bestehend aus  $m$  linearen Gleichungen in  $n$  Variablen ist eine Vektor-Gleichung der Form

$$Ax = b$$

wobei  $A \in \mathbb{K}_m^n$  und  $b \in \mathbb{K}^n$ . Konkreter und weniger kompakt schreibt sich so ein System als

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Durch eine geeignete Abfolge von Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen läßt sich  $A$  in eine Matrix  $\tilde{A} = (\tilde{A}_{ij})$  transformieren, sodaß

- (1)  $\tilde{a}_{ij} = 0$  wenn  $j < i$  und
- (2) aus  $\tilde{a}_{ii} = 0$  folgt, daß  $\tilde{a}_{jj} = 0$  für alle  $j \geq i$ .

Somit existiert eine reguläre  $m \times m$ -Matrix  $E$ , die die Zeilenumformungen bewerkstelligt, und eine Permutation  $\pi \in S_n$ , die die Spaltenvertauschungen wiederspiegelt, sodaß

$$\tilde{A} = EAP$$

wobei  $P = (e_{\pi^{-1}(1)} \mid e_{\pi^{-1}(2)}) \mid \cdots \mid e_{\pi^{-1}(n)})^T$ . Da  $P^T = P^{-1}$ , gilt dann

$$A = E^{-1}\tilde{A}P^T$$

und somit

$$Ax = b \iff E^{-1}\tilde{A}P^T x = b \iff \tilde{A}P^T x = Eb$$

Also ist  $Ax = b$  äquivalent zu  $\tilde{A}P^T x = \tilde{b}$ , wobei  $\tilde{b} := Eb$ . Da  $P^T x = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ \dots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$ , ist nun  $Ax = b$  äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_{\pi(1)} + \tilde{a}_{12}x_{\pi(2)} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_{\pi(n)} &= \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}x_{\pi(1)} + \tilde{a}_{22}x_{\pi(2)} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_{\pi(n)} &= \tilde{b}_2 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \tilde{a}_{m1}x_{\pi(1)} + \tilde{a}_{m2}x_{\pi(2)} + \dots + \tilde{a}_{mn}x_{\pi(n)} &= \tilde{b}_m \end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Gestalt der Matrix  $\tilde{A}$  kann man nun die Lösungsmenge folgendermaßen bestimmen. Sei  $k$  der größte Index mit  $\tilde{a}_{kk} \neq 0$ . Wenn  $\tilde{b}_\ell \neq 0$  für einen Index  $\ell > k$ , hat das System keine Lösung. Andernfalls bestimmt man aus

$$\tilde{a}_{kk}x_{\pi(k)} + \sum_{i=k+1}^n \tilde{a}_{ki}x_{\pi(i)} = \tilde{b}_k$$

den Wert von  $x_{\pi(k)}$  als

$$x_{\pi(k)} = \frac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_{kk}} - \sum_{i=k+1}^n \frac{\tilde{a}_{ki}}{\tilde{a}_{kk}} x_{\pi(i)}$$

wobei die Variablen  $x_{\pi(k+1)}, \dots, x_{\pi(n)}$  als *Parameter* fungieren. Sukzessive berechnet man  $x_{\pi(k-1)}$  aus der  $(k-1)$ -ten Gleichung usw. bis man bei  $x_{\pi(1)}$  angelangt ist und somit die  $x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}$  als Linearkombinationen der Parameter  $x_{\pi(k+1)}, \dots, x_{\pi(n)}$  bestimmt hat. Diese Fälle treten typischerweise auf bei Geraden- und Ebenengleichungen.

Die eben beschriebene Vorgangsweise ist unter dem Namen *Gaußsches Eliminationsverfahren* bekannt, das wir nun durch nachfolgende Beispiele illustrieren wollen.

### Beispiel VII.9.1

(1) Zuerst betrachten wir den Fall eines eindeutig lösbar System.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & -40 & 26 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & -40 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -\frac{93}{40} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

woraus man die Werte

$$\begin{aligned}x_3 &= -\frac{93}{2} \\x_2 &= -\frac{1}{40}(-9 + \frac{26 \cdot 93}{2}) = -\frac{93 \cdot 13 - 9}{40} = -\frac{1209 - 9}{40} = -30 \\x_1 &= 2 + 8 \cdot 30 - \frac{4 \cdot 93}{2} = 242 - 186 = 56\end{aligned}$$

rekursiv berechnet.

- (2) Im Falle einer Geraden im euklidischen Raum läuft das Gaußsche Eliminationsverfahren hinaus auf eine Beschreibung der Geraden in Parameterform wie man anhand des folgenden Beispiels sieht

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

woraus sich rekursiv

$$\begin{aligned}y &= 1 + z \\x &= -z\end{aligned}$$

ergeben in Abhängigkeit von  $z$ .

- (3) Ein Beispiel für ein unlösbare lineares Gleichungssystem ist folgendes

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

welches unlösbar ist, da  $0 \cdot y = 0 \neq 1$  für alle  $y$ .

Abschließend möchten wir anhand eines Beispiels demonstrieren, welche Probleme bei der numerischen Behandlung linearer Gleichungssysteme entstehen können.

**Beispiel VII.9.2** *Wir betrachten das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*dessen eindeutige Lösung  $x = \frac{100}{199}$  und  $y = \frac{99}{199}$  ist.*

*Wenn wir hingegen den Gauß Algorithmus einfach stur anwenden und mit Gleitkomma-Arithmetik auf 2 Stellen genau rechnen, erhalten wir*

$$\begin{pmatrix} 0.005 & 1 \\ 0 & -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -100 \end{pmatrix}$$

*dessen Lösung  $\tilde{x} = 0$  und  $\tilde{y} = 0.5$  ist.*

## VII.10 Eigenwerte

Sogenannte *Eigenwerte* quadratischer Matrizen erweisen sich als nützlich bei der Diskussion lokaler Extrema von reellen Funktionen in mehreren Variablen und beim Lösen von (linearen) Differentialgleichungen. Innerhalb der linearen Algebra spielen sie eine Rolle bei der Diagonalisierung symmetrischer Matrizen.

**Definition VII.10.1** (*Eigenwerte*)

*Ein Eigenwert einer Matrix  $A \in \mathbb{K}_n^n$  ist ein  $\lambda \in \mathbb{K}$ , sodaß  $Ax = \lambda x$  für ein  $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ . Ein solches  $x$  heißt ein zu  $\lambda$  gehöriger Eigenvektor von  $A$ . Wir nennen  $\ker(\lambda I_n - A)$  den Eigenraum von  $\lambda$ .*

Offenbar ist  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert von  $A$ , wenn der Kern von  $\lambda I_n - A$  nichttrivial ist, d.h.  $\lambda I_n - A$  nicht invertierbar ist. Also ist  $\lambda$  genau dann Eigenwert von  $A$ , wenn  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ .

**Definition VII.10.2** (*charakteristisches Polynom*)

*Das charakteristische Polynom von  $A \in \mathbb{K}_n^n$  ist  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ .*

Offenbar hat das charakteristische Polynom einer  $n \times n$  Matrix den Grad  $n$ . Die Nullstellen von  $P_A$  sind die Eigenwerte von  $A$ . Wenn  $P_A$   $n$  verschiedene Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat, dann hat  $\mathbb{K}^n$  eine aus Eigenvektoren bestehende Basis  $x_1, \dots, x_n$ , wobei  $x_i$  ein Eigenvektor zu  $\lambda_i$  ist. In diesem Fall (Übung!) gibt es eine reguläre Matrix  $T$ , sodaß  $T^{-1}AT = (\lambda_i \delta_{ij})$ .

Im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  hat  $P_A$  aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra mindestens einen Eigenwert sofern  $n > 0$ . Wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dann braucht  $A$  keine reellen Eigenwerte zu haben auch wenn  $n > 0$ . Z.B. hat die der Drehung um den Winkel  $\varphi$  entsprechende  $2 \times 2$  Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

genau dann einen reellen Eigenwert, wenn  $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$ . Die der Drehung um  $90^\circ$  entsprechende Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  hat das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

dessen Nullstellen  $i$  und  $-i$  sind. Ganz allgemein gilt für  $A \in \mathbb{R}_n^n$ , daß die Nullstellen von  $P_A$  unter Konjugation abgeschlossen sind, da die Koeffizienten von  $P_A$  alle reell sind und somit aus  $P_A(\bar{\lambda}) = 0$  folgt, daß  $P_A(\bar{\lambda}) = \overline{P_A(\lambda)} = \bar{0} = 0$ .

**Beispiel VII.10.3** Wir studieren nun allgemein den Fall von  $2 \times 2$  Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{R}$ . Sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

wobei für  $n \times n$  Matrizen  $A$  der Skalar  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  als Spur bzw. Trace von  $A$  bezeichnet wird. Die Nullstellen von  $P_A$  sind dann

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)} \right)$$

Also hat  $A$  genau dann reelle Eigenwerte, wenn  $\text{tr}(A)^2 \geq 4 \det(A)$ .

Quadratische Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}_n^n$  heißen *ähnlich*, wenn eine reguläre Matrix  $T$  existiert mit  $B = T^{-1}AT$ . Es gilt nun

**Lemma VII.10.4** Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und somit dieselben Eigenwerte.

*Beweis:* Angenommen  $A$  und  $B$  seien ähnlich. Dann existiert eine reguläre Matrix  $T$  mit  $B = T^{-1}AT$ . Da  $T$  regulär ist, gilt  $\det(T) \neq 0$ . Also ist  $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}(\lambda I_n - A)T) = \\ &= \det(T^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(T) = \det(\lambda I - A) = \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Die Berechnung von Eigenwerten einer Matrix ist im allgemeinen nicht einfach, da das Auffinden von Nullstellen von Polynomen im allgemeinen nicht leicht ist. Für Matrizen besonderer Gestalt lassen sich Eigenwerte allerdings oft einfach ablesen.

**Definition VII.10.5** Sei  $A = (a_{ij})$  eine  $n \times n$  Matrix. Dann ist  $A$  eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix, wenn  $a_{ij} = 0$  für  $i < j$  bzw.  $i > j$ , und  $A$  heißt in Diagonalform, wenn sie sowohl obere als auch untere Dreiecksmatrix ist. Die Matrix  $A$  heißt diagonalisierbar, wenn eine reguläre Matrix  $T$  existiert, sodaß  $T^{-1}AT$  in Diagonalform ist.

Wenn  $A = (a_{ij})$  eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix ist, dann gilt

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{ii})$$

d.h. die Eigenwerte von  $A$  sind genau die Diagonalelemente von  $A$ . Für eine solche Matrix  $A$  gilt dann

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$  sind.

Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, d.h.  $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ , dann ist  $T(e_i)$  ein zu  $\lambda_i$  gehöriger Eigenvektor. Aber Dreiecksmatrizen müssen i.a. nicht diagonalisierbar sein wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel VII.10.6** Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist eine (obere) Dreiecksmatrix und ihr einziger Eigenwert ist 1. Der zu 1 gehörige Eigenraum ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= x \\ y &= y \end{aligned}$$

nämlich  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$ . Also ist  $A$  nicht diagonalisierbar, weil  $\mathbb{K}^2$  keine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  besitzt.

Es ist jedoch so, daß viele in der Praxis häufig auftretende Matrizen diagonalisierbar sind wie z.B. die im Abschnitt VII.12 studierten symmetrischen Matrizen.

## VII.11 Orthonormalbasen

Für  $x, y \in \mathbb{C}^n$  definiert man ihr Skalarprodukt als  $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ . Offenbar hat dieses Skalarprodukt folgende Eigenschaften

$$(1) \quad \langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$$

$$(2) \quad \langle \lambda x \mid y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$$

$$(3) \quad \langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle}.$$

Offenbar folgt daraus auch  $\langle z \mid x+y \rangle = \langle z \mid x \rangle + \langle z \mid y \rangle$ . Jedoch gilt im allgemeinen nicht, daß  $\langle x \mid \lambda y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$ , wohl aber  $\langle x \mid \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x \mid y \rangle$ .

Wenn man das Skalarprodukt einschränkt auf  $\mathbb{R}^n$  gilt jedoch, daß das Skalarprodukt in beiden Argument linear ist und außerdem symmetrisch in dem Sinne, daß  $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ .

### **Definition VII.11.1** (orthogonal, orthonormal)

Vektoren  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{C}^n$  heißen orthogonal, wenn  $\langle x \mid y \rangle = 0$ . Die Länge eines Vektors  $x \in \mathbb{C}^n$  ist definiert als  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ .

Eine Teilmenge  $S$  von  $\mathbb{C}^n$  heißt orthonormal, wenn verschiedene Vektoren aus  $S$  orthogonal zueinander sind und für alle  $x \in S$  gilt  $\langle x \mid x \rangle = 1$ . Eine Orthonormalbasis ist eine Basis, die als Menge orthonormal ist.

Offenbar ist  $\langle x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$ , weshalb es Sinn macht die Quadratwurzel zu ziehen. Man beachte, daß für Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  unsere Definition der Länge mit der Euklidischen Länge übereinstimmt.

Um nachzuweisen, daß der in Def. VII.11.1 eingeführte Längenbegriff vernünftige Eigenschaften hat, ist folgendes Resultat essentiell.

### **Lemma VII.11.2** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Es gilt

$$|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

für alle  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

*Beweis:* Wenn  $x$  oder  $y$  gleich 0 ist, gilt die Ungleichung trivialerweise, da beide Seiten gleich 0 sind. Wir nehmen also o.B.d.A. an, daß  $x$  und  $y$  von 0 verschieden sind. Also sind auch  $\|x\|_2$  und  $\|y\|_2$  von 0 verschieden. Sei  $\lambda := \frac{\langle x \mid y \rangle}{\langle y \mid y \rangle}$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \lambda y \mid x - \lambda y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y \mid y \rangle - \lambda \langle y \mid x \rangle - \bar{\lambda} \langle x \mid y \rangle = \\ &= \langle x \mid x \rangle + \bar{\lambda} \langle x \mid y \rangle - \lambda \langle y \mid x \rangle - \bar{\lambda} \langle x \mid y \rangle = \langle x \mid x \rangle - \lambda \langle y \mid x \rangle = \\ &= \langle x \mid x \rangle - \frac{\langle x \mid y \rangle \langle y \mid x \rangle}{\langle y \mid y \rangle} \end{aligned}$$

und somit

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 = \langle x \mid y \rangle \langle y \mid x \rangle \leq \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$$

woraus durch Quadratwurzelziehen die Behauptung

$$|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

folgt.  $\square$

Man kann nun für  $x, y \neq 0$  den von  $x$  und  $y$  eingeschlossenen Winkel definieren als  $\arccos \frac{\langle x|y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$ .

Mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung kann man nun nachweisen, daß  $\|\cdot\|_2$  die Eigenschaften einer **Norm** auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  hat.

**Satz VII.11.3** *Die Abbildung  $\|\cdot\|_2$  von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  nach  $\mathbb{R}$  erfüllt die Eigenschaften einer Norm, d.h.*

$$(N1) \quad \|x\|_2 \geq 0 \text{ und } \|x\|_2 = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_2$$

$$(N3) \quad \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

*Beweis:* Der Nachweis der ersten beiden Eigenschaften ist einfach und bleibt dem Leser überlassen.

Für den Nachweis der Ungleichung (N3) verwenden wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Seien  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle x + y | x + y \rangle &= \langle x | x \rangle + \langle y | y \rangle + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle \\ &= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle \\ &\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + |\langle x | y \rangle| + |\langle y | x \rangle| \\ &\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \\ &= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \end{aligned}$$

woraus nach Ziehen der Quadratwurzel die behauptete Ungleichung folgt.  $\square$

Man sieht leicht (Übung!), daß eine orthonormale Teilmenge  $S$  von  $\mathbb{C}^n$  notwendigerweise linear unabhängig ist. Also ist eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^n$  eine maximale orthonormale Menge.

Offenbar bilden die Koordinatenheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^n$ . Es gibt aber auch ein Verfahren, das für eine linear unabhängige Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  eine orthonormale Menge mit gleicher linearer Hülle konstruiert.

**Satz VII.11.4** *Seien die Vektoren  $b_1, \dots, b_m$  in  $\mathbb{C}^n$  linear unabhängig. Dann existiert eine orthonormale Menge  $\{v_1, \dots, v_m\}$  in  $\mathbb{C}^n$  mit  $\text{Sp}(\{b_1, \dots, b_m\}) = \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m\})$ .*

*Beweis:* Offenbar muß gelten  $m \leq n$ . Wir argumentieren mit Induktion über  $m$ . Der Fall  $m = 0$  ist trivial. Angenommen die Behauptung gelte für  $m < n$ . Seien  $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}$  linear unabhängig. Aufgrund der Induktionshypothese gibt es eine orthonormale Menge  $v_1, \dots, v_m$  mit  $\text{Sp}(\{b_1, \dots, b_m\}) = \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m\})$ .

Sei  $u_{m+1} := b_{m+1} - \sum_{k=1}^m \langle b_{m+1} \mid v_k \rangle v_k$  und  $v_{m+1} := \frac{u_{m+1}}{\|u_{m+1}\|_2}$ . Offenbar gilt für  $k = 1, \dots, m$ , daß  $\langle u_{m+1} \mid v_k \rangle = 0$  und somit auch  $\langle v_{m+1} \mid v_k \rangle = 0$ . Also ist  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$  orthonormal. Da  $\text{Sp}(\{b_1, \dots, b_m\}) = \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m\})$  und  $\text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}) = \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m, u_{m+1}\}) = \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m, b_{m+1}\})$ , folgt  $\text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}) = \text{Sp}(\{v_1, \dots, v_m, b_{m+1}\}) = \text{Sp}(\{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}\})$ .  $\square$

Aus dem Beweis dieses Satzes läßt sich folgende Konstruktion der  $v_1, \dots, v_m$  aus  $b_1, \dots, b_m$  ablesen

$$\begin{aligned} u_1 &:= b_1 & v_1 &:= \frac{u_1}{\|u_1\|_2} \\ &\vdots &&\vdots \\ u_m &= b_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle b_m \mid v_k \rangle v_k & v_m &:= \frac{u_m}{\|u_m\|_2} \end{aligned}$$

welche unter dem Namen *Gram-Schmidt Verfahren* bekannt ist.

Abschließend sei bemerkt, daß für eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{C}^n$  gilt, daß  $x = \sum_{k=1}^n \langle x \mid v_k \rangle v_k$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$ .

## VII.12 Symmetrische Matrizen und Quadratische Formen

**Definition VII.12.1** (symmetrisch, orthogonal, hermitesch, unitär)

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}_n^n$  heißt symmetrisch, wenn  $A = A^T$ , d.h.  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $1 \leq i < j \leq n$ , und  $A$  heißt orthogonal, wenn  $A^{-1} = A^T$ .

Für eine Matrix  $A = (a_{ij})$  in  $\mathbb{C}_n^n$  sei ihre adjungierte Matrix  $A^* = (a_{ij}^*) \in \mathbb{C}_n^n$  definiert als  $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ . Die Matrix  $A$  heißt hermitesch, wenn  $A^* = A$ , und  $A$  heißt unitär, wenn  $A^{-1} = A^*$ .

Für  $A \in \mathbb{R}_n^n$  ist ‘‘symmetrisch’’ äquivalent zu ‘‘hermitesch’’ und ‘‘orthogonal’’ äquivalent zu ‘‘unitär’’. Offenbar ist eine  $n \times n$  Matrix genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bzw. des  $\mathbb{C}^n$  bilden.

Der folgende Satz garantiert unter anderem die Diagonalisierbarkeit von symmetrischen und hermiteschen Matrizen.

**Satz VII.12.2** (Hauptachsentransformation)

Für jede symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}_n^n$  gibt es eine orthogonale Matrix  $S$ , sodaß  $S^{-1}AS$  in Diagonalform ist. Außerdem gibt es zu jeder unitären Matrix  $A \in \mathbb{C}_n^n$  eine hermitesch Matrix  $S$ , sodaß  $S^{-1}AS$  in Diagonalform ist.

*Beweis:* Zuerst beobachten wir, daß eine Matrix  $A \in \mathbb{C}_n^n$  genau dann hermitesch ist, wenn  $\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid Ay \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $A$  und  $x$  ein zugehöriger Eigenvektor. Es gilt dann  $\lambda \langle x \mid x \rangle = \langle \lambda x \mid x \rangle = \langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid Ax \rangle = \langle x \mid \lambda x \rangle = \overline{\lambda} \langle x \mid x \rangle$ , woraus folgt, daß  $\lambda$  reell ist, d.h.  $\lambda = \overline{\lambda}$ , da  $\langle x \mid x \rangle \neq 0$ .

Sei  $E = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \lambda x = Ax\}$  und  $V = E^\perp = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \forall y \in E \langle x \mid y \rangle = 0\}$ . Angenommen  $x \in V$  und  $y \in E$ . Dann gilt  $\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid Ay \rangle = \langle x \mid \lambda y \rangle = 0$ . Also ist  $Ax \in V$  für alle  $x \in V$ . Also ist  $A_{|V} : V \rightarrow V$  wieder ein hermitescher linearer Operator auf den wir die Induktionshypothese anwenden können. Man wähle eine Orthonormalbasis  $S_1$  für  $E$  und eine Orthonormalbasis  $S_2$  für  $E$  bestehend aus Eigenvektoren für  $A$ , die aufgrund der Induktionshypothese existiert. Dann ist  $S = S_1 \cup S_2$  eine Orthonormalbasis für  $\mathbb{C}^n$ , die ausschließlich aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.  $\square$

Wir diskutieren nun den in der Praxis wichtigen Fall symmetrischer  $2 \times 2$  Matrizen in folgendem

**Beispiel VII.12.3** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Wenn  $c = 0$ , dann ist  $A$  bereits in Diagonalform und man wählt  $S = I_2$ . Wir nehmen also o.B.d.A. an, daß  $c \neq 0$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist dann  $P_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b) - c^2 = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2$ . Also sind die Eigenwerte von  $A$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + c^2}$$

und  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , da  $c^2 > 0$  und somit auch  $\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + c^2} > 0$ . Ein zu  $\lambda_i$  gehöriger Eigenvektor  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$  ist bestimmt durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_i + cy_i &= \lambda_i x_i \\ cx_i + by_i &= \lambda_i y_i \end{aligned}$$

Da  $c \neq 0$ , gilt  $y_i = \frac{\lambda_i - a}{c} x_i$ . Also ist etwa  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ \frac{\lambda_i - a}{c} x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i - a \\ x_i \end{pmatrix}$  ein von 0 verschiedener Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$ . Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= c^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = c^2 + a^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a + \lambda_1 \lambda_2 = \\ &= c^2 + a^2 - (a + b)a + \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} - c^2 = \\ &= c^2 + a^2 - (a + b)a + ab - c^2 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist

$$S = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \end{pmatrix}$$

eine geeignete orthogonale Matrix, d.h.

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}_n^n$  induziert eine sogenannte “quadratische Form”

$$Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Beispielsweise ist  $Q_{I_n}(x) = x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2$  und es gilt  $\|x\|_2^2 = Q_{I_n}(x)$ . Die Matrix  $A$  heißt *positiv* bzw. *negativ definit*, wenn  $Q_A(x) > 0$  bzw.  $Q_A(x) < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Wegen Satz VII.12.2 kann man nun eine orthogonale Matrix  $S$  finden mit

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte (mit Vielfachheit) von  $A$  sind. Für einen Eigenwert  $\lambda$  spannen die  $i$ -ten Spalten von  $A$  mit  $\lambda_i = \lambda$  den Eigenraum von  $\lambda_i$  auf. Man sieht nun leicht, daß  $A$  positiv bzw. negativ definit ist, wenn alle  $\lambda_i > 0$  bzw. alle  $\lambda_i < 0$  sind. Die symmetrische Matrix  $A$  heißt *indefinit*, wenn  $A$  echt positive und echt negative Eigenwerte besitzt.

Abschließend präsentieren wir das Kriterium von Hurwitz, das es einem gestattet eine symmetrische Matrix auf positive Definitheit zu überprüfen ohne alle ihre Eigenwerte zu bestimmen.

#### Satz VII.12.4 (Hurwitzsches Kriterium)

Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}_n^n$  ist genau dann positiv definit, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis:* Wir nennen

$$M_k(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

den  $k$ -ten Hauptminor von  $A$ . Das Hurwitzsche Kriterium besagt also, daß eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit ist, wenn die Determinanten aller Hauptminoren echt positiv sind.

Angenommen  $A$  ist positiv definit. Dann sind alle ihre Hauptminoren auch positiv definit und haben somit eine echt positive Determinante.

Die Rückrichtung beweisen wir durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  ist die Behauptung klar. Sei nun  $A \in \mathbb{R}_{n+1}^{n+1}$  eine symmetrische Matrix, deren Hauptminoren

alle eine echt positive Determinante haben. Aufgrund der Induktionshypothese ist somit  $M_n(A)$  positiv definit. Es existiert somit eine Basis  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , sodaß die Darstellung von  $A$  bzgl. dieser Basis gleich

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_n & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

ist, d.h.  $v_i$  ist Eigenvektor zu  $\lambda_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , und  $v_i \cdot v_j = 0$  falls  $i \neq j$ . Wir betrachten nun die Basis  $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ , wobei  $u_i = v_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $u_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda_k} u_k$ . Es gilt dann für  $i = 1, \dots, n$ , daß  $u_i \cdot A u_{n+1} = u_i \cdot A v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{b_i}{\lambda_i} u_i \cdot A u_k = b_i - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda_k} \lambda_i \delta_{ik} = b_i - \frac{b_i}{\lambda_i} \lambda_i = 0$ . Also ist  $u_{n+1}$  Eigenvektor von  $A$  zu einem Eigenwert  $\lambda_{n+1}$ . Die Darstellung von  $A$  bzgl. der Basis  $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$  ist dann

$$A'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

Es gilt dann  $\lambda_1 \dots \lambda_n \lambda_{n+1} = \det A'' = \det A > 0$ . Da  $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det M_n(A) > 0$ , folgt dann  $\lambda_{n+1} > 0$ . Weil  $M_n(A)$  positiv definit ist, sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ . Also sind alle Eigenwerte von  $A$  echt positiv und somit ist  $A$  positiv definit.  $\square$

Um nun für eine vorgegebene symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}_n^n$  zu überprüfen, ob sie positiv definit, negativ definit oder indefinit ist, geht man wie folgt vor. Man berechnet  $\det M_1(A), \dots, \det M_n(A)$ . Wenn alle  $\det M_k(A)$  positiv sind, ist  $A$  positiv definit. Da  $A$  genau dann negativ definit ist, wenn  $-A$  positiv definit ist und  $\det M_k(-A) = (-1)^k \det M_k(A)$ , kann man feststellen, ob  $A$  negativ definit ist, indem man überprüft, ob  $\det M_k(A) > 0$  für gerade  $k$  und  $\det M_k(A) < 0$  für ungerade  $k$ . Wenn dies auch nicht der Fall ist, dann ist  $A$  indefinit, wenn  $\det A \neq 0$ , und andernfalls ist einer der Eigenwerte von  $A$  gleich 0. In diesem letzten Falle muß man alle Eigenwerte berechnen, um festzustellen, ob  $A$  nicht doch indefinit ist.

# VIII Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , wobei  $n$  und  $m$  beliebige natürliche Zahlen sind. Zuerst müssen wir klären, was es heißt, daß Folgen im  $\mathbb{R}^n$  konvergieren. Basierend darauf definieren wir, was es heißt, daß eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig bzw. differenzierbar ist. Es wird sich herausstellen, daß die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a \in D$  i.a. nicht mehr bloß eine Zahl, sondern vielmehr eine  $m \times n$  Matrix ist, die diejenige linear Abbildung beschreibt, die die Funktion  $x \mapsto f(x) - f(a)$  am “besten approximiert”. Unter Verwendung dieser Ableitungen werden wir Kriterien für die Existenz lokaler Extrema von Funktionen in mehreren reellen Veränderlichen angeben. Weiters diskutieren wir Bedingungen, unter denen implizit definierte Funktionen existieren und differenzierbar sind, nämlich den Satz über implizite Funktionen. Dieser wird verwendet, um die Methode der “Lagrangeschen Multiplikatoren” zu rechtfertigen, die es einem erlaubt Extrema unter Nebenbedingungen zu berechnen, eine Aufgabenstellung die in der Praxis vielfach auftritt.

## VIII.1 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Um über Konvergenz im Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  sprechen zu können, bedarf es eines Abstandsbegriffs, der den Absolutbetrag im Falle von  $\mathbb{R}$  auf geeignete Art und Weise verallgemeinert.

**Definition VIII.1.1** (Norm)

Eine Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , sodaß

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ und } \|x\| = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $C[0, 1]$  der stetigen Funktionen von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{R}$  hat man die Norm  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ , genannt *Supremumsnorm*, und die Norm  $\|f\|_1 =$

$\int_0^1 |f(x)| dx$ . Ohne Beweis führen wir hier auch die Norm  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$  an, die die Euklidische Norm verallgemeinert.

**Beispiel VIII.1.2** (Normen auf  $C[0, 1]$ )

Sei  $f_n \in C[0, 1]$  definiert als  $f_n(x) = x^n$ . Offenbar ist  $\|f_n\|_\infty = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Jedoch ist  $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

In folgendem Beispiel führen wir die Normen auf  $\mathbb{R}^n$  ein, die im Verlauf der Vorlesung betrachtet werden.

**Beispiel VIII.1.3** (Normen auf  $\mathbb{R}^n$ )

Daß  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  eine Norm ist, haben wir in Satz VII.11.3 gesehen. Andere Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

wofür der Nachweis reine Routine ist. Überdies erfüllt die Norm  $\|\cdot\|_\infty$  nicht nur (N3), sondern sogar die stärkere Ungleichung  $\|x + y\|_\infty \leq \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$ . Es gelten folgende Abschätzungen zwischen diesen Normen

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

für beliebige  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Für  $i \in \{1, 2, \infty\}$  sei  $d_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $d_i(x, y) = \|x - y\|_i$ . Man zeigt leicht, daß diese  $d_i$  sogenannte *Metriken* sind, d.h. Abbildungen  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die folgende drei Axiome erfüllen

(M1)  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$

(M2)  $d(x, y) = d(y, x)$

(M3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

wobei (M3) als *Dreiecksungleichung* bekannt ist.

Um den Begriff der Konvergenz befriedigend klären zu können, führen wir einige “topologische” Begriffe ein, wobei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm ist. Wir werden später zeigen, daß (die meisten) diese(r) Begriffe von der Wahl dieser Norm unabhängig sind.

**Definition VIII.1.4** (Inneres, Rand, Abschluß)

Für  $\varepsilon > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  nennen wir  $U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ .

Für  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei  $\overset{\circ}{M} := \{x \in M \mid \exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \subseteq M\}$  die Menge der inneren Punkte von  $M$ .

Ein Randpunkt von  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist ein  $x \in \mathbb{R}^n$ , sodaß jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  sowohl Punkte aus  $M$  als auch Punkte aus  $\mathbb{C}M$  enthält. Wir bezeichnen die Menge der Randpunkte von  $M$  mit  $\partial M$ .

Für  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  nennen wir  $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 \exists y \in M \ \|x - y\| < \varepsilon\}$  den Abschluß von  $M$ .

Obwohl natürlich  $U_\varepsilon(x)$  von der Wahl der Norm  $\|\cdot\|$  abhängt, sind  $\overset{\circ}{M}$ ,  $\partial M$  und  $\overline{M}$  unabhängig davon, ob wir für die Norm  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_1$  oder  $\|\cdot\|_\infty$  wählen.

**Beispiel VIII.1.5** Sei  $M := ]0, 1[ \cup ]1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\overset{\circ}{M} = ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \quad \partial M = \{0, 1, 2\} \quad \overline{M} = [0, 2]$$

und es gilt  $\overset{\circ}{\overline{M}} = ]0, 2[ \neq \overset{\circ}{M}$ . Also ist i.a. das Innere des Abschlusses einer offenen Menge nicht gleich ihrem Inneren.

**Definition VIII.1.6** (offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt)  
Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $M$

- offen, wenn  $M = \overset{\circ}{M}$
- abgeschlossen, wenn  $M = \overline{M}$
- beschränkt, wenn  $\exists r > 0 \forall x \in M \ \|x\| \leq r$
- kompakt, wenn  $M$  beschränkt und abgeschlossen ist.

Offenbar ist  $\overset{\circ}{M}$ , die größte in  $M$  enthaltene Menge und  $\overline{M}$  die kleinste  $M$  enthaltende abgeschlossene Menge. Der Rand  $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\complement M}$ .

**Beispiel VIII.1.7** Die Menge  $[0, 1[$  ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen, also nicht kompakt. Die Menge  $] - \infty, 0]$  ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt. Mengen der Gestalt  $[a, b]$  sind kompakt.

**Definition VIII.1.8** (Konvergenz in  $\mathbb{R}^n$ )

Eine Folge  $(x_k)$  im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}^n$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k \geq N \ \|a - x_k\| < \varepsilon$$

wofür wir abkürzend  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  schreiben.

Der Konvergenzbegriff ändert sich nicht, ob wir  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_1$  oder  $\|\cdot\|_\infty$  wählen (Übung!). Das folgende Lemma führt die Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$  auf die Konvergenz in  $\mathbb{R}$  zurück.

**Lemma VIII.1.9** Eine Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  gegen  $a \in \mathbb{R}^n$ , wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis:* Da  $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ , folgt aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ , daß  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Für die Rückrichtung nehmen wir an  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .

Dann gibt es für alle  $i = 1, \dots, n$  ein  $N_i$ , sodaß  $\forall k \geq N_i |x_i^{(k)} - a_i|_\infty < \varepsilon$ . Sei  $N := \max_{1 \leq i \leq n} N_i$ . Es gilt dann für  $k \geq N$ , daß  $\|x^{(k)} - a\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$ .

Also gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ .  $\square$

**Satz VIII.1.10** (Bolzano-Weierstraß) *Jede Folge  $(x^{(k)})$  im  $\mathbb{R}^n$ , die bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  beschränkt ist, besitzt eine im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  konvergente Teilfolge.*

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über  $n$ .

Für  $n = 1$  müssen wir zeigen, daß jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei also  $(x_n)$  eine Folge, deren Glieder alle in  $[a, b]$  liegen.

Wir definieren eine Folge von Intervallen  $[a_n, b_n]$ , sodaß für alle  $n$  folgende Bedingungen gelten.

- (1)  $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$
- (2)  $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$
- (3) es gibt unendlich viele  $k$  mit  $x_k \in [a_n, b_n]$ .

Wir setzen  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ . Wenn für unendlich viele  $k$  gilt  $x_k \in [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ , dann setzen wir  $a_{n+1} = a_n$  und  $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ . Anderfalls setzen wir  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  und  $b_{n+1} = b_n$ .

Sei  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  rekursiv definiert als  $f(0) = 0$  und  $f(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid f(n) < k \wedge x_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ . Da  $f$  streng monoton wächst und  $(x_{f(n)})$  eine Cauchyfolge ist (da  $x_{f(n)} \in [a_n, b_n]$ ) ist, ist somit  $(x_{f(n)})$  eine konvergente Teilfolge von  $(x_n)$ .

Nehmen wie als Induktionhypothese an, die Behauptung gelte für  $n$ . Sei  $(\mathbf{x}^{(k)}, y_k)$  eine bzgl. der Supremumsnorm beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Dann ist  $(\mathbf{x}^{(k)})$  eine im Sinne der Supremumsnorm beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  und  $(y_k)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Aufgrund der Induktionhypothese existiert eine im Sinne der Supremumsnorm konvergente Teilfolge  $(\mathbf{x}^{(k_i)})$  der Folge  $(\mathbf{x}^{(k)})$ . Da auch die Folge  $(y_{k_i})$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt ist, existiert aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(y_{k_{i_j}})$ . Also konvergiert auch die Folge  $(\mathbf{x}_{k_{i_j}}, y_{k_{i_j}})$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Diese Folge ist also eine konvergente Teilfolge der Folge  $(\mathbf{x}^{(k)}, y_k)$ .  $\square$

Dieser im allgemeinen sehr nützliche Satz erlaubt uns zu beweisen, daß alle Normen in folgendem Sinne äquivalent sind.

**Satz VIII.1.11** Für jede Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  gibt es  $c, d > 0$ , sodaß

$$c \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq d \cdot \|x\|_\infty$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Beweis:* Für  $d$  wählen wir  $n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$ . Aufgrund von (N3) gilt für beliebige  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , daß

$$\|x\| \leq |x_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_n| \cdot \|e_n\| \leq d \cdot \|x\|_\infty$$

Wir definieren  $c$  als  $\inf\{\|x\| \mid \|x\|_\infty = 1\}$ . Wenn dieses  $c > 0$ , dann gilt für  $x \neq 0$ , daß

$$\|x\| = \|x\|_\infty \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \|x\|_\infty \cdot c = c \cdot \|x\|_\infty$$

und für  $x = 0$  gilt die Ungleichung trivialerweise.

Wir müssen also nur noch zeigen, daß  $c > 0$ . Sei  $(x_k)$  eine Folge in  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = c$ . Wegen Satz VIII.1.10 können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $(x_k)$  im Sinne der Supremumsnorm konvergiert. Der Grenzwert  $a$  dieser Folge ist notwendigerweise von 0 verschieden, da sonst  $\|x_k\|_\infty < 1$  für ein geeignetes  $k \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $\|a\| \neq 0$ . Da die Norm  $\|\cdot\|$  die Eigenschaft (N3) erfüllt, gilt  $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$  für alle  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Somit gilt für alle  $k$ , daß

$$\|a\| - \|x_k\| \leq \|a - x_k\| \leq d \cdot \|a - x_k\|_\infty$$

woraus folgt, daß  $c = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\| \neq 0$ . □

Da wir alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$  wie in Satz VIII.1.11 beschrieben gegeneinander abschätzen können,

**sind Begriffe wie offen, abgeschlossen, Rand und Konvergenz von der Wahl der Norm unabhängig.**

Wir beschließen diesen Unterabschnitt mit der Diskussion des Begriffs Häufungspunkt.

**Definition VIII.1.12** (Häufungspunkt)

Ein Häufungspunkt einer Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist ein  $x \in \mathbb{R}^n$ , sodaß in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  unendlich viele Punkte von  $M$  liegen. Wir bezeichnen die Menge der Häufungspunkte von  $M$  mit  $H(M)$ .

Man kann zeigen (Übung!), daß  $x$  genau dann Häufungspunkt von  $M$  ist, wenn in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  ein Punkt in  $M$  liegt, der von  $x$  verschieden ist. Eine weitere äquivalente Bedingung ist, daß eine Folge  $(x_n)$  in  $M \setminus \{x\}$  existiert mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Beispiel VIII.1.13** Für  $M = ([0, 1[ \times [0, 1]) \cup ([1, 2[ \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^2$  ist  $H(M) = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup [1, 2] \times \{1\}$ .

## VIII.2 Stetigkeit mehrstelliger reeller Funktionen

Wie schon im Falle reeller Funktionen in einer Variablen definieren wir den Begriff der Stetigkeit in Termen der Erhaltung von Folgenkonvergenz. Vorab erweitern wir Funktionsgrenzwerte auf den mehrdimensionalen Fall.

**Definition VIII.2.1** (Funktionsgrenzwert)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $a \in H(D)$ . Für  $b \in \mathbb{R}$  schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  als Abkürzung für die Behauptung, daß für alle Folgen  $(x_n)$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ .

**Beispiel VIII.2.2** Sei  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Sei  $(x_k, y_k)$  eine Folge in  $D$  mit Grenzwert  $(0,0)$ . Wenn  $x_k \neq 0$ , dann gilt

$$|f(x_k, y_k)| = \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \leq \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2} = y_k^2$$

und analog zeigt man

$$|f(x_k, y_k)| \leq x_k^2$$

falls  $y_k \neq 0$ . Da aber die Folgen  $(x_k^2)$  und  $(y_k^2)$  beide gegen 0 konvergieren, folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = 0$ . Somit haben wir gezeigt, daß  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .

Sei  $(z_k)$  eine gegen 0 konvergierende Folge in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k^2 - 0^2}{z_k^2 + 0^2} = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(0, z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^2 - z_k^2}{0^2 + z_k^2} = -1$$

woraus folgt, daß es kein  $b \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = b$ .

Wir können nun definieren, wann mehrstellige reelle Funktionen stetig sind.

**Definition VIII.2.3** (Stetigkeit mehrstelliger reeller Funktionen)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $f$  ist stetig in  $a \in D$ , wenn für alle Folgen  $(x_k)$  in  $D$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  gilt, daß  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ . Für  $M \subseteq D$  heißt  $f$  stetig in  $M$ , wenn  $f$  in allen  $a \in M$  stetig ist. Die Funktion  $f$  heißt stetig, wenn  $f$  in  $D$  stetig ist.

Wenn  $a \in D$  kein Häufungspunkt von  $D$  ist, ist offenbar  $f$  in  $a$  stetig. Wenn  $a \in D \cap H(D)$ , dann ist  $f$  in  $a$  stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Satz VIII.2.4** *Seien die Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig auf  $D$ . Dann sind  $f + g$  und  $f \cdot g$  auch auf  $D$  stetig. Außerdem ist die Funktion  $\frac{f}{g}$  auf ihrem Definitionsbereich  $D \setminus \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$  auch stetig.*

*Beweis:* Analog zum Beweis von Satz II.3.13.  $\square$

Analog zu Satz II.3.24 kann man folgenden Satz beweisen.

**Satz VIII.2.5** ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit)

*Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

*(unabhängig von der Wahl der Norm  $\|\cdot\|$ ) gilt.*

Die Stetigkeit von reellen Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  führen wir wie folgt auf die Stetigkeit der Koordinatenfunktionen  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  zurück, wobei  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  für  $x \in D$ .

**Definition VIII.2.6** *Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt stetig in  $a \in D$ , wenn alle  $f_i$  in  $a$  stetig sind. Für  $M \subseteq D$  heißt  $f$  in  $M$  stetig, wenn alle  $f_i$  in  $M$  stetig sind. Insbesondere heißt  $f$  stetig, wenn alle  $f_i$  stetig sind.*

Man kann leicht zeigen, daß stetige Funktionen unter Komposition abgeschlossen sind.

**Satz VIII.2.7** *Seien  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $D_g \subseteq \mathbb{R}^m$ , sodaß  $\{f(x) \mid x \in D_f\} \subseteq D_g$ . Wenn  $f$  und  $g$  stetig sind, dann ist auch  $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig.*

**Satz VIII.2.8** ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit)

*Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann stetig in  $a \in D$ , wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

*(unabhängig von der Wahl der Norm  $\|\cdot\|$ ) gilt.*

Als nächstes zeigen wir, daß lineare Funktionen stetig sind.

**Satz VIII.2.9** *Lineare Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind stetig.*

*Beweis:* Offenbar genügt es zu zeigen, daß lineare Funktionale  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Eine solche Funktion ist von der Gestalt  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ . Sei  $C := \sum_{i=1}^n |a_i|$ . Es gilt dann für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , daß  $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n |a_i x_i| \leq C \cdot \|x\|_\infty$ . Wegen der Linearität von  $f$  gilt dann aber auch

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq C \cdot \|x - y\|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Mithilfe von Satz VIII.2.5 ist es nun leicht zu zeigen (Übung!), daß  $f$  stetig ist.  $\square$

Folgender Satz ist auch in Anwendungen von größter Wichtigkeit.

**Satz VIII.2.10** *Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existieren  $a, b \in K$  mit*

$$f(a) = \sup_{x \in K} f(x) \quad \text{und} \quad f(b) = \inf_{x \in K} f(x)$$

und somit ist  $f$  insbesondere auch beschränkt.

*Beweis:* Sei  $(x_k)$  eine Folge in  $K$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sup_{x \in K} f(x)$ . Da  $K$  kompakt ist, existiert wegen Satz VIII.1.10 eine konvergente Teilfolge  $(x_{k_i})$  von  $(x_k)$ . Da  $K$  insbesondere abgeschlossen ist, ist  $a = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} \in K$ . Weil  $f$  stetig ist, gilt nun  $f(a) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sup_{x \in K} f(x)$ . Analog zeigt man die Existenz von  $b \in K$  mit  $f(b) = \inf_{x \in K} f(x)$ .

Da für alle  $x \in K$  gilt  $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$  ist  $f$  beschränkt.  $\square$

### VIII.3 Differenzieren mehrstelliger reeller Funktionen

Es erhebt sich die Frage, was es heißt, daß eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $a \in D$  differenzierbar ist. Wenn man versucht wie im Falle  $n = 1$ , die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a \in D \cap H(D)$  als

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

zu definieren, dann erhabt sich das Problem, daß man im  $\mathbb{R}^n$  nicht dividieren kann. Für einstellige reelle Funktionen gibt aber Satz III.1.6 eine Charakterisierung der Differenzierbarkeit, die in ihrer Formulierung jedwede Bezugnahme auf die Division vermeidet. Deshalb liegt es nahe diese Charakterisierung als Definition nehmen, wobei allerdings die Ableitung durch eine geeignete Matrix gegeben ist.

**Definition VIII.3.1** (Differenzierbarkeit mehrstelliger reeller Funktionen)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $a \in U$  differenzierbar, wenn es eine Matrix  $A \in \mathbb{R}_m^n$  und eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, sodaß folgende beide Bedingungen gelten

1.  $f(a + h) = f(a) + A \cdot h + \|h\| \cdot g(h)$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $a + h \in U$
2.  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$ .

Die Matrix  $A$  heißt Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Aufgrund von Satz VIII.1.11 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Norm  $\|\cdot\|$ . Man sieht auch leicht (Übung!), daß  $f$  an der Stelle  $a$  stetig ist, wenn  $f$  eine Ableitung an der Stelle  $a$  hat.

Außerdem ist die Ableitung eindeutig, sofern sie existiert, wie folgende Überlegung zeigt. Angenommen  $A' \in \mathbb{R}_m^n$  und  $g' : U \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen die beiden Bedingungen von Def. VIII.3.1. Dann gilt für alle  $h$  mit  $a + h \in U$ , daß  $(A - A') \cdot h = \|h\| \cdot (g'(h) - g(h))$  und somit  $(A - A') \cdot \frac{h}{\|h\|} = (g'(h) - g(h))$  falls  $h \neq 0$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| = 1$ . Es gibt dann eine gegen 0 konvergierende Folge reeller Zahlen  $\lambda_n$  mit  $a + \lambda_n \cdot x \in U$ , für die dann gilt  $(A - A') \cdot x = g'(\lambda_n \cdot h) - g(\lambda_n \cdot h)$ . Da aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \cdot h = 0$ , gilt  $(A - A') \cdot x = 0$ . Also ist  $(A - A') \cdot x = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und somit  $A = A'$ .

**Definition VIII.3.2** Wenn die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  existiert, bezeichnen wir sie mit  $D(f)(a)$  und nennen sie das totale Differential von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Die Def. VIII.3.1 zugrundeliegende Intuition ist, daß  $h \mapsto T_a(h) := f(a) + A \cdot h$  die **Tangentialebene** für  $f$  an der Stelle  $a$  beschreibt. Die beiden Bedingungen von Def. VIII.3.1 besagen nämlich, daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - T_a(h)}{\|h\|} = 0$$

und somit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \ 0 < \|h\| < \delta \wedge a + h \in U \Rightarrow \frac{\|f(a + h) - T_a(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$$

d.h., daß für  $\varepsilon > 0$  in einer genügend kleinen Umgebungen von  $a$  der Fehler  $\|f(a + h) - T_a(h)\|$  durch  $\varepsilon \cdot \|h\|$  beschränkt werden kann. In anderen Worten gesagt ist  $T_a$  die beste “lineare Approximation” an  $f$  an der Stelle  $a$ .

Es erhebt sich nun die Frage, wie man das totale Differential  $D(f)(a)$  berechnet, sofern es existiert. Zu diesem Zweck ist es wünschenswert die Einträge von  $D(f)(a)$  durch Ableitungen geeigneter einstelliger Funktionen anzugeben, wie in folgendem Satz geschieht.

**Satz VIII.3.3** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Wenn für  $a \in U$  die Ableitung  $D(f)(a)$  existiert, dann ist

$$D(f)(a)_{ij} = D_j(f_i)(a)$$

wobei

$$D_j(f_i)(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a)}{h}$$

welche wir als  $j$ -te partielle Ableitung der  $i$ -ten Koordinatenfunktion bezeichnen.<sup>18</sup>

*Beweis:* Einfache Übung! □

Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  folgt jedoch im allgemeinen nicht, daß  $f$  in  $a$  differenzierbar ist. Man sieht dies leicht anhand der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = 1$  falls  $x, y > 0$  und  $f(x, y) = 0$  sonst. Offenbar ist  $D_1(f)(0, 0) = D_2(f)(0, 0) = 0$ , obwohl  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ist, da  $D(f)(0, 0) = (0, 0)$  sein müßte, aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - f(0, 0)}{\|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\|} = \infty$ , obwohl  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - f(0, 0)}{\|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\|} = 0$  gelten müßte, wenn  $D(f)(0, 0) = (0, 0)$  wäre.

Folgender Satz jedoch stellt die Existenz des totalen Differentials unter ziemlich allgemeinen Annahmen sicher.

#### Satz VIII.3.4

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn alle  $D_i(f)$  existieren und in  $a \in U$  stetig sind, dann ist  $f$  in  $a$  differenzierbar, wobei  $D(f)(a) = (D_1(f)(a), \dots, D_n(f)(a))$ . Wenn für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  alle  $D_j(f_i)$  existieren und in  $a \in U$  stetig sind, dann ist  $f$  in  $a$  differenzierbar, wobei  $D(f)(a)_{ij} = D_j(f_i)(a)$  für alle  $a \in U$ .

*Beweis:* Weil  $U$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|_\infty < \varepsilon$ . Für  $i = 0, \dots, n$  definieren wir  $y^{(i)} = a + \sum_{k=1}^i x_k e_k$  wobei  $e_k$  der  $k$ -te Koordinateneinheitsvektor ist. Die Punkte  $y^{(i)}$  liegen alle in  $U_\varepsilon(a)$  und es gilt  $y^{(1)} = a$  und  $y^{(n)} = a + x$ . Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es für jedes  $i = 1, \dots, n$  ein  $\theta_i \in [0, 1]$  mit

$$f(y^{(i)}) - f(y^{(i-1)}) = D_i(f)(z^{(i)})x_i \quad \text{wobei } z^{(i)} = y^{(i-1)} + \theta_i x_i e_i$$

---

<sup>18</sup>Wenn  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist, dann schreiben wir für die  $i$ -te partielle Ableitung  $D_i(f)$  auch

$$D_i(f)(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h}$$

Wenn  $m = 1$ , dann nennt man  $D(f)(a)$  auch den Gradienten von  $f$  an der Stelle  $a$  und schreibt dafür  $\text{grad}(f)(a)$  bzw.  $\nabla(f)(a)$ .

und somit gilt

$$f(a+x) - f(a) = \sum_{i=1}^n D_i(f)(z^{(i)})x_i$$

Also gilt

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^n D_i(f)(a)x_i + \|x\|_\infty \cdot g(x)$$

wobei

$$g(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i(f)(z^{(i)}) - D_i(f)(a))x_i}{\|x\|_\infty}$$

Da die  $D_i(f)$  in  $a$  stetig sind, gilt  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  (wobei man beachte, daß die  $z^{(i)}$  von  $x$  abhängen!). Also ist  $f$  an der Stelle  $a$  differenzierbar mit  $D(f)(a) = (D_1(f)(a), \dots, D_n(f)(a))$ .

Für  $m \geq 2$  folgt die Behauptung, indem man die bereits bewiesene Behauptung für  $m = 1$  auf die Koordinatenfunktionen anwendet.  $\square$

### Beispiel VIII.3.5

- (1) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x, y) = x + y$ . Offenbar ist  $D_1(f)(x, y) = 1 = D_2(f)(x, y)$ . Da  $D_1(f)$  und  $D_2(f)$  stetig sind, gilt aufgrund von Satz VIII.3.4, daß  $D(f)(x, y) = (1, 1)$ .
- (2) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x, y) = xy$ . Offenbar ist  $D_1(f)(x, y) = y$  und  $D_2(f)(x, y) = x$ . Da  $D_1(f)$  und  $D_2(f)$  stetig sind, gilt aufgrund von Satz VIII.3.4, daß  $D(f)(x, y) = (y, x)$ .
- (3) Sei  $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ . Offenbar ist  $D_1(f)(x, y) = \frac{1}{y}$  und  $D_2(f)(x, y) = \frac{-x}{y^2}$ . Da  $D_1(f)$  und  $D_2(f)$  auf  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  stetig sind, gilt aufgrund von Satz VIII.3.4, daß  $D(f)(x, y) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\right)$ .
- (4) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|_2$ . Es gilt  $D_i(f)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}$ . Da die  $D_i(f)$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  stetig sind, gilt aufgrund von Satz VIII.3.4, daß  $D(f)(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ . Man zeigt leicht (Übung!), daß  $f$  in 0 nicht differenzierbar ist.
- (5) Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und seien  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt aufgrund von Satz VIII.3.4 für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ , daß  $D(f)(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t))$ , da die  $D(f_i) = f'_i$  nach Annahme alle stetig sind.

**Satz VIII.3.6** (Kettenregel)

Seien  $U_1$  und  $U_2$  offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^{n_1}$  bzw.  $\mathbb{R}^{n_2}$  und  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  und  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$  mit  $\{f_1(x) \mid x \in U_1\} \subseteq U_2$  und  $\{f_2(y) \mid y \in U_2\} \subseteq U_3$ . Wenn  $f_1$  in  $a$  und  $f_2$  in  $f_1(a)$  differenzierbar sind, dann ist  $f_2 \circ f_1$  in  $a$  differenzierbar, wobei  $D(f_2 \circ f_1)(a) = D(f_2)(f_1(a)) \cdot D(f_1)(a)$ .

*Beweis:* Weil  $f_1$  in  $a$  und  $f_2$  in  $f_1(a)$  differenzierbar sind, gibt es Funktionen  $g_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  und  $g_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$ , sodaß

- (1)  $f_1(a + h) = f_1(a) + D(f_1)(a) \cdot h + \|h\|_\infty \cdot g_1(h)$  für  $h \in \mathbb{R}^{n_1}$  mit  $a + h \in U_1$
- (2)  $\lim_{h \rightarrow 0} g_1(h) = 0$
- (3)  $f_2(f_1(a) + k) = f_2(f_1(a)) + D(f_2)(f_1(a)) \cdot k + \|k\|_\infty \cdot g_2(k)$  für  $k \in \mathbb{R}^{n_2}$  mit  $f_1(a) + k \in U_2$
- (4)  $\lim_{k \rightarrow 0} g_2(k) = 0$ .

Für  $h \in \mathbb{R}^{n_1}$  mit  $a + h \in U_1$  gilt nun

$$\begin{aligned} f_2(f_1(a + h)) &= f_2(f_1(a) + \underbrace{D(f_1)(a) \cdot h + \|h\|_\infty \cdot g_1(h)}_{k_h :=}) = \\ &= f_2(f_1(a)) + D(f_2)(f_1(a)) \cdot k_h + \|k_h\|_\infty \cdot g_2(k_h) = \\ &= f_2(f_1(a)) + D(f_2)(f_1(a)) \cdot D(f_1)(a) \cdot h + \\ &\quad \underbrace{D(f_2)(f_1(a)) \cdot \|h\|_\infty \cdot g_1(h) + \|k_h\|_\infty \cdot g_2(k_h)}_{\tilde{g}(h) :=} \end{aligned}$$

Wir definieren  $g(h) := \frac{\tilde{g}(h)}{\|h\|}$ . Um zu zeigen, daß

$$D(f_2 \circ f_1)(a) = D(f_2)(f_1(a)) \cdot D(f_1)(a)$$

müssen wir noch nachweisen, daß  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$ . Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung, daß

$$(\dagger) \quad \|g(h)\| \leq \|D(f_2)(f_1(a)) \cdot g_1(h)\| + \frac{\|k_h\|}{\|h\|} \cdot \|g_2(k_h)\|$$

Der linke Summand geht aber gegen 0, da  $\lim_{h \rightarrow 0} g_1(h) = 0$  und wegen Satz VIII.2.9 lineare Abbildungen stetig sind. Aus (dem Beweis von) Satz VIII.2.9 folgt die Existenz einer Konstanten  $C_1 \geq 0$  mit  $\|D(f_1)(a) \cdot h\| \leq C_1 \cdot \|h\|$ . Da  $\lim_{h \rightarrow 0} g_1(h) = 0$  gibt es ein  $C_2 \geq 0$  und ein  $\delta > 0$ , sodaß  $\|g_1(h)\| \leq C_2$  falls  $\|h\| < \delta$ . Deshalb gilt für  $h$  mit  $\|h\| < \delta$ , daß  $\|k_h\| \leq (C_1 + C_2) \cdot \|h\|$ . Also gilt auch  $\lim_{h \rightarrow 0} k_h = 0$  und somit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|k_h\|}{\|h\|} \cdot \|g_2(k_h)\| = 0$ . Also gehen in der Ungleichung  $(\dagger)$  beide Summanden auf der rechten Seite gegen 0, wenn  $h$  gegen 0 geht, woraus folgt, daß  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$  wie behauptet.  $\square$

Wir illustrieren nun den Gebrauch der Kettenregel anhand diverser Beispiele.

### Beispiel VIII.3.7

- (1) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in U$  differenzierbar. Für  $h : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$  gilt dann aufgrund der Kettenregel und Beispiel VIII.3.5 (1), daß

$$D(h)(a)_i = (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} D_i(f)(a) \\ D_i(g)(a) \end{pmatrix} = D_i(f)(a) + D_i(g)(a)$$

- (2) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in U$  differenzierbar. Für  $h : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$  gilt dann aufgrund der Kettenregel und Beispiel VIII.3.5 (2), daß

$$\begin{aligned} D(h)(a)_i &= (g(a), f(a)) \cdot \begin{pmatrix} D_i(f)(a) \\ D_i(g)(a) \end{pmatrix} = \\ &= g(a) \cdot D_i(f)(a) + f(a) \cdot D_i(g)(a) = \\ &= D_i(f)(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot D_i(g)(a) \end{aligned}$$

- (3) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) \neq 0$  für  $x \in U$ . Seien weiters  $f$  und  $g$  in  $a \in U$  differenzierbar. Für  $h : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  gilt dann aufgrund der Kettenregel und Beispiel VIII.3.5 (3), daß

$$\begin{aligned} D(h)(a)_i &= \left( \frac{1}{g(a)}, \frac{-f(a)}{g(a)^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} D_i(f)(a) \\ D_i(g)(a) \end{pmatrix} = \frac{D_i(f)(a)}{g(a)} - f(a) \cdot \frac{D_i(g)(a)}{g(a)^2} = \\ &= \frac{D_i(f)(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot D_i(g)(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

- (4) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, wobei das Bild von  $p$  in  $U$  enthalten ist. Dann gilt aufgrund der Kettenregel, daß

$$(f \circ p)'(t) = \sum_{i=1}^n D_i(f)(p(t)) \cdot p'_i(t) = \langle D(f)(p(t)) \mid p'(t) \rangle$$

wobei  $p_i$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion von  $p$  ist und  $p'(t) = (p'_1(t), \dots, p'_n(t))$ .

Ein wichtiger Spezialfall von Beispiel VIII.3.7 (4) ist die sogenannte *Richtungsableitung* einer Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Für  $a \in U$  und  $u \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|u\|_2 = 1$  betrachten wir die Funktion  $p_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto t \cdot u$ . Dann ist die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  in Richtung  $u$  definiert als

$$D_u(f)(a) := (f \circ p)'(0) = \langle D(f)(a) \mid p'_u(0) \rangle = \langle D(f)(a) \mid u \rangle$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt dann, daß  $D_u(f)(a)$  den größten Wert annimmt, wenn der Winkel zwischen  $D(f)(a)$  und  $u$  gleich 0 ist. Somit weist der Gradient  $D(f)(a)$  in die **Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  im Punkt  $a$** .

## Mittelwertsatz für mehrstellige Funktionen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Nehmen wir weiter an, es seien  $x, y \in U$  mit  $x + t(y - x) \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann hat die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto x + t(y - x)$  ihr Bild in  $U$  und ist beliebig oft differenzierbar. Also ist  $f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit Ableitung  $(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^n D_i(f)(x + t(y - x)) \cdot (y_i - x_i)$ . Aufgrund von Satz III.2.3 gibt es dann ein  $\xi \in ]0, 1[$  mit

$$(1) \quad f(y) - f(x) = f(g(1)) - f(g(0)) = \sum_{i=1}^n D_i(f)(x + \xi(y - x)) \cdot (y_i - x_i)$$

Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt aber auch

$$(2) \quad f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 D_i(f)(x + t(y - x)) dt \cdot (y_i - x_i)$$

Wenn nun  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar ist, gilt ein Analogon von (1) selbst dann im allgemeinen nicht mehr, wenn  $n = 1$ , wie folgendes Beispiel zeigt. Sei  $U = \mathbb{R}$  und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Für  $x = y = 0$  gilt nun

$$f_1(1) - f_1(0) = f'_1(\xi_1) = 2\xi_1 \quad \text{und} \quad f_2(1) - f_2(0) = f'_2(\xi_2) = 3\xi_2^2$$

genau dann, wenn  $\xi_1 = \frac{1}{2}$  und  $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ . Also gibt es kein  $\xi \in [0, 1]$  mit  $f(1) - f(0) = f'(\xi)$ .

Jedoch lässt sich (2) folgendermaßen verallgemeinern.

**Satz VIII.3.8** (Mittelwertsatz der Diff.-rechnung für mehrstell. Funktionen)

*Sie  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar. Für  $x, y \in U$  mit  $x + t(y - x) \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt dann*

$$f(y) - f(x) = A(x, y) \cdot (y - x)$$

wobei  $A(x, y)$  die  $m \times n$  Matrix ist mit

$$A(x, y)_{ji} = \int_0^1 D_i(f_j)(x + t(y - x)) dt$$

für  $1 \leq j \leq m$  und  $1 \leq i \leq n$ .

*Beweis:* Folgt unmittelbar aus Anwendung von (2) auf die Komponenten  $f_j$  der Funktion  $f$ .  $\square$

## VIII.4 Höhere Partielle Ableitungen und Satz von Taylor

Wenn  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $D_i(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, kann man natürlich diese Funktion weiter partiell ableiten. Natürlich kann man ganz allgemein  $n$ -te partielle Ableitungen der Gestalt  $D_{i_n} \cdots D_{i_1}(f)$  betrachten. Die Funktion  $f$  heißt *n-mal stetig differenzierbar*, wenn alle  $n$ -ten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Im allgemeinen sind  $D_i D_j f$  und  $D_j D_i f$  verschieden. Jedoch gilt folgender Satz, den wir ohne Beweis hier anführen möchten.

**Satz VIII.4.1** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar, dann gilt  $D_i D_j f = D_j D_i f$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ .*

*Beweis:* Siehe Bd. 2 von [For]. □

Eine Konsequenz dieses Satzes ist, daß für  $(m+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt, daß

$$D_{i_1} \cdots D_{i_m} f = D_{i_{\pi(1)}} \cdots D_{i_{\pi(m)}} f$$

für beliebige Permutationen  $\pi$  von  $\{1, \dots, m\}$ . Etwas vereinfacht ausgedrückt kommt es bei hinreichend wohl sich verhaltenden Funktionen nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

Wir sind nun in der Lage den Satz von Taylor auf mehrstellige Funktionen zu verallgemeinern.

**Satz VIII.4.2** (Satz von Taylor)

*Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt für  $a \in U$  und  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $a + th \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ , daß*

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^k (f)(a) + R_{m+1}(a, h)$$

wobei  $R_{m+1}(a, h) = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^{m+1} (f)(a + th) dt$  bzw. nach Lagrange

$$R_{m+1}(a, h) = \frac{1}{(m+1)!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^{m+1} (f)(a + \xi h) \text{ für ein } \xi \in ]0, 1[.$$

*Beweis:* Sei  $a \in U$  und  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $a + th \in U$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Wir betrachten die Funktion  $g(t) = a + th$  und wenden Satz VI.3.1 auf  $f \circ g$  an, woraus sich ergibt, daß

$$f(a + h) = (f \circ g)(1) = \sum_{k=0}^m \frac{(f \circ g)^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m (f \circ g)^{(m+1)}(t) dt$$

bzw.

$$f(a+h) = (f \circ g)(1) = \sum_{k=0}^m \frac{(f \circ g)^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{1}{(m+1)!} (f \circ g)^{(m+1)}(\xi)$$

für ein  $\xi \in ]0, 1[$ .

Die Behauptung folgt nun, wenn wir zeigen können, daß für  $k = 0, \dots, m+1$  gilt

$$(f \circ g)^{(k)}(t) = \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^k (f)(a+th)$$

indem wir  $h = 0$  setzen. Für  $k = 0$  gilt die Aussage trivialerweise. Nehmen wir also an die Aussage gelte für  $k < m$ . Dann gilt aber die Aussage auch für  $k+1$ , da

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{(k+1)}(t) &= ((f \circ g)^{(k)})'(t) \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{\left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^k (f)(a+th)}{dt} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \\ &= \sum_{j=1}^n D_j \left( \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^k (f) \right) (a+th) \cdot h_j \stackrel{(*)}{=} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^{k+1} (f)(a+th) \end{aligned}$$

wobei wir im Schritt (\*) ausgenützt haben, daß die Reihenfolge partieller Ableitungen irrelevant ist (da  $f$  nach Voraussetzung  $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar ist).  $\square$

Folgendes Korollar wird uns im nächsten Abschnitt an wesentlicher Stelle von Nutzen sein.

**Korollar VIII.4.3** *Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar. Wenn  $a \in U$ , dann gilt für die durch die Gleichung*

$$\varphi(h) := f(a+h) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^k (f)(a)$$

*definierte Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , daß  $\lim_{\|h\|_2^{m+1}} \frac{\varphi(h)}{\|h\|_2^{m+1}} = 0$ .*

*Beweis:* Folgt aus der Lagrangeschen Darstellung des Restglieds und der Annahme, daß alle  $(m+1)$ -ten Ableitungen stetig sind.  $\square$

Falls die höheren partiellen Ableitungen von  $f$  in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  beschränkt sind und somit  $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(a, h) = 0$  für  $\|h\|_\infty < \varepsilon$ , dann stellt Satz VIII.4.2 sicher, daß

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n h_i D_i \right)^k (f)(a)$$

für  $\|h\|_\infty < \varepsilon$ .

## VIII.5 Lokale Extrema mehrstelliger reeller Funktionen

Wir diskutieren nun die Frage, wann hinreichend “gute” reelle Funktionen in mehreren Variablen ein lokales Extremum besitzen. Der Ordnung halber führen wir folgende Sprechweisen ein.

**Definition VIII.5.1** (lokale Extrema) *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  besitzt in  $a \in U$  ein*

- lokales Minimum, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodaß  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  und  $f(a) \leq f(x)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(a)$
- lokales Maximum, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodaß  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  und  $f(a) \geq f(x)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(a)$ .

*Wir sagen, daß  $f$  in  $a$  ein lokales Extremum besitzt, wenn  $f$  in  $a$  ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.*

*Die Funktion  $f$  besitzt in  $a \in U$  ein*

- isoliertes lokales Minimum, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodaß  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  und  $f(a) < f(x)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$
- isoliertes lokales Maximum, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodaß  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  und  $f(a) > f(x)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ .

*Wir sagen, daß  $f$  in  $a$  ein isoliertes lokales Extremum besitzt, wenn  $f$  in  $a$  ein isoliertes lokales Maximum oder ein isoliertes lokales Minimum besitzt.*

Offenbar besitzt  $f$  in  $a$  kein lokales Extremum, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$  Punkte  $a_1, a_2 \in U_\varepsilon(a)$  existieren mit  $f(a_1) < f(a) < f(a_2)$ . Einen solchen Punkt  $a$  nennen wir auch *Sattelpunkt*, da in jeder noch so kleinen Umgebung von  $a$  die Funktion  $f$  Werte sowohl unter- als auch oberhalb von  $f(a)$  annimmt.<sup>19</sup>

Folgender Satz gibt eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

**Satz VIII.5.2** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Wenn  $f$  in  $a \in U$  ein lokales Extremum hat, dann ist  $D(f)(a) = 0$ .*

*Beweis:* Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $g_i(t) := a + te_i$ . Wenn  $f$  in  $a$  ein lokales Extremum hat, dann hat  $f \circ g_i$  in 0 ebenfalls ein lokales Extremum und somit  $D_i(f)(a) = (f \circ g_i)'(0) = 0$ . Also ist  $D(f)(a) = 0$ , wenn  $f$  in  $a$  ein lokales Extremum hat.  $\square$

Wir nennen  $a$  mit  $D(f)(a) = 0$  *kritische Punkte von  $f$* . Um ein Kriterium zu formulieren, ob in einem kritischen Punkt ein lokales Extremum vorliegt, ist folgender Begriff vonnöten.

---

<sup>19</sup>Für  $n = 1$  ist ein Beispiel die Funktion  $f(x) = x^{2k+1}$ , die in 0 den Wert 0 hat aber in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 echt positive und echt negative Werte annimmt.

**Definition VIII.5.3** (Hesse-Matrix) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar. Dann ist die Hesse-Matrix für  $f$  im Punkt  $a \in U$  definiert als die  $n \times n$  Matrix

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} D_1 D_1(f)(a) & \cdots & D_1 D_n f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1(f)(a) & \cdots & D_n D_n f(a) \end{pmatrix}$$

Offenbar ist aufgrund von Satz VIII.4.1 die Hesse-Matrix  $H(f)(a)$  symmetrisch, wenn  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist.

Folgender Satz stellt hinreichende Bedingungen zur Verfügung, um das Vorliegen lokaler Maxima bzw. deren Absenz festzustellen.

**Satz VIII.5.4** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar. Sei  $a \in U$  mit  $D(f)(a) = 0$ . Dann gilt

- (1) Wenn  $H(f)(a)$  positiv definit ist, dann liegt in  $a$  ein isoliertes lokales Minimum von  $f$  vor.
- (2) Wenn  $H(f)(a)$  negativ definit ist, dann liegt in  $a$  ein isoliertes lokales Maximum von  $f$  vor.
- (3) Wenn  $H(f)(a)$  indefinit ist, dann liegt in  $a$  kein lokales Extremum vor.

*Beweis:* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an,  $U$  sei von der Gestalt  $U_\varepsilon(a)$ . Aufgrund von Satz VIII.4.2 gilt dann für alle  $x \in U$ , daß

$$f(x) = f(a) + D(f)(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T H(f)(a + \xi h)(x - a)$$

für ein  $\xi \in ]0, 1[$ . Da nach Annahme  $D(f)(a) = 0$ , vereinfacht dies zu

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x - a)^T H(f)(a + \xi h)(x - a) = f(a) + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} D_i D_j(f)(a + \xi h)(x - a)_i (x - a)_j$$

Außerdem gilt aufgrund von Kor. VIII.4.3 für die Fehlerfunktion  $\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x - a)^T H(f)(a)(x - a)$ , daß  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\|x - a\|_2^2}$ .

Wir behandeln zuerst (1). Sei also  $A := H(f)(a)$  als positiv definit angenommen. Es gilt dann  $x^T A x > 0$  für  $x \in S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ . Da  $S$  kompakt ist und  $x \mapsto x^T A x$  stetig ist, gilt aufgrund von Satz VIII.2.10, daß  $\alpha := \inf_{x \in S} x^T A x > 0$ .

Wir zeigen, daß nun

$$(*) \quad x^T A x \geq \alpha \|x\|_2^2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Die Ungleichung gilt natürlich für  $x = 0$ . Wenn  $x \neq 0$ , setzen wir  $y := \frac{x}{\|x\|_2} \in S$ . Also gilt  $y^T A y \geq \alpha$ . Da aber  $y^T A y = \frac{1}{\|x\|_2^2} x^T A x$ , folgt nun  $y^T A y \geq \alpha \|x\|_2^2$ .

Da  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\|x-a\|_2^2} = 0$ , gibt es ein  $\delta > 0$ , sodaß

$$|\varphi(x)| < \frac{\alpha}{4} \|x-a\|_2^2$$

falls  $\|x-a\|_2 < \delta$ . Also gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^T A(x-a) + \varphi(x) \geq f(a) + \frac{\alpha}{2} \|x-a\|_2^2 - |\varphi(x)| \\ &\geq f(a) + \frac{\alpha}{2} \|x-a\|_2^2 - \frac{\alpha}{4} \|x-a\|_2^2 = f(a) + \frac{\alpha}{4} \|x-a\|_2^2 \\ &> f(a) \end{aligned}$$

wenn  $0 < \|x-a\|_2 < \delta$ .

Somit haben wir gezeigt, daß  $f$  in  $a$  ein isoliertes lokales Minimum hat.

Die Behauptung (2) folgt aus (1), indem man (1) auf  $-f$  anwendet.

Für (3) nehmen wir an, daß  $A := H(f)(a)$  indefinit sei. Es gibt dann  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|_2 = 1 = \|y\|_2$ , sodaß  $x^T Ax > 0$  und  $y^T Ay < 0$ . Ähnlich wie im Beweis von (1) kann man zeigen, daß ein  $\delta > 0$  existiert, sodaß für alle  $t \in [0, \delta]$  gilt, daß  $f(a+tx) > f(a)$  und  $f(a+ty) < f(a)$ . Somit haben wir gezeigt,  $f$  in  $a$  kein lokales Extremum hat.  $\square$

Wir illustrieren nun die Anwendung dieses Satzes in folgendem

### Beispiel VIII.5.5

- (1) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto c + x^2 + y^2$ . Da  $D(f)(x, y) = (2x, 2y)$ , ist  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$ . Da  $D_1 D_2(f)(x, y) = 0 = D_2 D_1 f(x, y)$  und  $D_1 D_1 f(x, y) = 2 = D_2 D_2 f(x, y)$  ist

$$H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da alle Eigenwerte dieser Matrix echt positiv sind, liegt in  $(0, 0)$  aufgrund von Satz VIII.5.4 ein isoliertes lokales Minimum der Funktion  $f$  vor, was aber auch leicht direkt zu beweisen ist.

- (2) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto c - x^2 - y^2$ . Da  $D(f)(x, y) = (-2x, -2y)$ , ist  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$ . Da  $D_1 D_2(f)(x, y) = 0 = D_2 D_1 f(x, y)$  und  $D_1 D_1 f(x, y) = -2 = D_2 D_2 f(x, y)$ , ist

$$H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Da alle Eigenwerte dieser Matrix echt negativ sind, liegt in  $(0, 0)$  aufgrund von Satz VIII.5.4 ein isoliertes lokales Maximum der Funktion  $f$  vor, was aber auch leicht direkt zu beweisen ist.

- (3) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto c + x^2 - y^2$ . Da  $D(f)(x, y) = (2x, -2y)$ , ist  $(0, 0)$  der einzige kritische Punkt von  $f$ . Da  $D_1 D_2(f)(x, y) = 0 = D_2 D_1(f)(x, y)$  und  $D_1 D_1(f)(x, y) = 2$  und  $D_2 D_2(f)(x, y) = -2$ , ist

$$H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit, also liegt aufgrund von Satz VIII.5.4 in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum der Funktion  $f$  vor.

Tatsächlich liefert in  $(0, 0)$  ein Sattelpunkt vor, da die Einschränkung von  $f$  auf die  $x$ -Achse in  $(0, 0)$  ein isoliertes lokales Maximum und die Einschränkung von  $f$  auf die  $y$ -Achse in  $(0, 0)$  ein isoliertes lokales Minimum hat. In jeder noch so kleinen Umgebung von  $(0, 0)$  nimmt also die Funktion  $f$  Werte  $> c$  und Werte  $< c$  an.

- (4) Betrachten wir die Funktionen  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_1(x, y) = x^2 + y^4 \quad f_2(x, y) = x^2 \quad f_3(x, y) = x^2 + y^3$$

Wie man leicht nachrechnet, verschwindet der Gradient aller drei Funktionen im Punkt  $(0, 0)$  und

$$H(f_i)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also hat in allen drei Fällen die Hesse-Matrix im Punkt  $(0, 0)$  den Eigenwert 0 und somit kann man mithilfe von Satz VIII.5.4 keine Aussage über die Natur eines solchen kritischen Punkts machen, denn

- 1)  $f_1$  hat in  $(0, 0)$  ein isoliertes lokales Minimum
- 2)  $f_2$  hat in  $(0, 0)$  ein lokales Minimum, das aber nicht isoliert ist
- 3)  $f_3$  hat in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum.

Wir betrachten nun ein “realistisches” Beispiel.

### Beispiel VIII.5.6

Wir betrachten Quader mit konstantem Volumen  $c > 0$  und fragen uns, welcher davon die kleinste Oberfläche hat. Die Seitenlängen eines Quaders seien gegeben durch  $x, y, z > 0$ . Dann ist sein Volumen  $xyz$  und seine Oberfläche  $2(xy + xz + yz)$ . Unter der Annahme, daß das Volumen  $xyz$  gleich  $c$  ist, ergibt sich  $z = \frac{c}{xy}$  und die Oberfläche ist  $2(xy + \frac{c}{x} + \frac{c}{y})$ . Wir müssen also untersuchen, wo die Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2\left(xy + \frac{c}{x} + \frac{c}{y}\right)$$

ein Minimum annimmt.

Zu diesem Zweck bestimmen wir vorerst die kritischen Punkte von  $f$ . Die ersten partiellen Ableitungen von  $f$  sind  $D_1(f)(x, y) = 2(y - \frac{c}{x^2})$  und  $D_2(f)(x, y) = 2(x - \frac{c}{y^2})$ . Da  $x, y > 0$ , ist  $D(f)(x, y) = 0$  genau, dann, wenn  $x^2y = c = xy^2$ , d.h. wenn  $x = y = c^{\frac{1}{3}}$  (da aus  $x^2y = xy^2$  folgt  $x = y$ ). Die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  sind

$$D_1 D_1 f(x, y) = \frac{4c}{x^3} \quad D_2 D_2 f(x, y) = \frac{4c}{x^3} \quad D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y) = 2$$

und somit ist

$$H(f)(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit, wie man leicht mit dem Hurwitzschen Kriterium feststellt. Somit hat nach Satz VIII.5.4 die Funktion  $f$  im Punkt  $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$  ein isoliertes lokales Minimum. Wenn  $x = y = c^{\frac{1}{3}}$ , dann ist auch  $z = \frac{c}{xy} = c^{\frac{1}{3}}$ .

Wenn nun  $f$  ein globales Minimum hat, dann muß es auch ein lokales Minimum sein und somit im Punkt  $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$  angenommen werden. Es gibt aber keinen allgemeinen Grund, warum ein lokales Minimum auch ein globales Minimum sein muß. Um zu zeigen, daß dies dennoch der Fall ist, gehen wir folgendermaßen vor. Für  $a > 0$  betrachten wir die Einschränkung von  $f$  auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = a \wedge x, y > 0\}$  und untersuchen, wo  $f$  auf dieser Menge ihr globales Minimum annimmt.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Funktion

$$g_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t, \frac{a}{t}) = 2(a + \frac{c}{t} + \frac{c}{a}t)$$

und untersuchen, wo diese ihr globales Minimum annimmt. Wenn wir

$$g'_a(t) = 2\left(\frac{c}{a} - \frac{c}{t^2}\right)$$

gleich 0 setzen, erhalten wir als eindeutige Lösung  $a^{\frac{1}{2}}$ . Da

$$\begin{aligned} g_a(a^{\frac{1}{2}}) < g_a(t) &\Leftrightarrow 2\left(a + \frac{2c}{a^{\frac{1}{2}}}\right) < 2\left(a + \frac{c}{t} + \frac{c}{a}t\right) \\ &\Leftrightarrow a + \frac{2c}{a^{\frac{1}{2}}} < a + \frac{c}{t} + \frac{c}{a}t \\ &\Leftrightarrow \frac{2c}{a^{\frac{1}{2}}} < \frac{c}{t} + \frac{c}{a}t \\ &\Leftrightarrow 2ta^{\frac{1}{2}} < a + t^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < a - 2ta^{\frac{1}{2}} + t^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < (t - a^{\frac{1}{2}})^2 \\ &\Leftrightarrow t \neq a^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

hat  $g_a$  ein isoliertes globales Minimum in  $a^{\frac{1}{2}}$ .

Wir suchen nun das Minimum der Funktion

$$h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : a \mapsto g_a(a^{\frac{1}{2}}) = 2 \left( a + \frac{2c}{a^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Ihre Ableitung ist  $h'(a) = 2 \left( 1 - ca^{-\frac{3}{2}} \right)$  und somit gilt

$$h'(a) \square 0 \Leftrightarrow 1 - ca^{-\frac{3}{2}} \square 0 \Leftrightarrow 1 \square ca^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{2}} \square c \Leftrightarrow a \square c^{\frac{2}{3}}$$

wenn man für  $\square <, >$  oder  $=$  einsetzt. Somit ist  $h$  auf  $]0, c^{\frac{2}{3}}[$  stark monoton fallend und auf  $]c^{\frac{2}{3}}, \infty[$  stark monoton wachsend.

Also hat  $h$  in  $c^{\frac{2}{3}}$  sein isoliertes globales Minimum. Da das isolierte globale Minimum von  $g_{c^{\frac{2}{3}}}$  in  $(c^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{3}}$  liegt, haben wir bewiesen, daß  $f$  in  $(c^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{3}})$  sein isoliertes globales Minimum hat.

Also ist der Quader mit Volumen  $c$ , der die kleinste Oberfläche hat, der Würfel mit Seitenlänge  $c^{\frac{1}{3}}$ .

## VIII.6 Satz über implizite und inverse Funktionen

Oft wird eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  implizit durch eine Gleichung  $g(x, y) = 0$  beschrieben, wobei  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  und man mit  $y$  den Funktionswert  $f(x)$  im Sinn hat. Ein Beispiel ist die Kreisgleichung  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , die man nach  $y$  auflösen kann, indem man  $y = \sqrt{1 - x^2}$  oder  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  setzt.

Der folgende Satz gibt Bedingungen an, unter denen implizit definierte Funktionen lokal existieren. Der Beweis ist ziemlich aufwendig und würde den Rahmen der Vorlesung sprengen. In Bd.2 von [For] findet man jedoch eine ausführliche Darstellung des Arguments.

### Satz VIII.6.1 (Impliziter Funktionensatz)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  offen und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar. Seien  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ , sodaß  $(a, b) \in U$  und  $D_{\bar{y}}(g)(a, b)$  invertierbar ist, wobei  $D_{\bar{y}}(g)(a, b)$  diejenige  $m \times m$  Matrix ist, deren Eintrag in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte gleich  $D_{n+j}(g_i)(a, b)$  ist. Dann existieren offene Umgebungen  $V$  und  $W$  von  $a$  bzw.  $b$  mit  $V \times W \subseteq U$  und eine differenzierbare Funktion  $f : V \rightarrow W$ , sodaß

$$(1) \quad f(a) = b \text{ und}$$

$$(2) \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } y \in W \text{ gilt } f(x) = y \text{ genau dann, wenn } g(x, y) = 0$$

d.h. in der offenen Umgebung  $V \times W$  löst  $f$  die Gleichung  $g(x, y) = 0$  eindeutig nach  $y$  auf.

Wegen der Kettenregel gilt

$$D(g)(x, f(x)) \cdot \begin{pmatrix} I_n \\ D(f)(x) \end{pmatrix}$$

d.h.  $D_{\vec{x}}(g)(x, f(x)) + D_{\vec{y}}(g)(x, f(x)) \cdot D(f)(x) = 0$ , woraus folgt, daß

$$D(f)(a) = -D_{\vec{y}}(g)(a, b)^{-1} \cdot D_{\vec{x}}(g)(a, b)$$

indem man  $x = a$  und  $y = f(a) = b$  setzt und ausnützt, daß  $D_{\vec{y}}(g)(a, b)$  als invertierbar angenommen wurde.

### Beispiel VIII.6.2

- (1) Wir betrachten  $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$  für  $r > 0$ . Offenbar beschreibt die Gleichung  $g(x, y) = 0$  die Menge aller Punkte auf dem Kreis mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $(0, 0)$ . Da  $D_x(g)(x, y) = 2x$  und  $D_y(g)(x, y) = 2y$ , gilt aufgrund von Satz VIII.6.1, daß  $g(x, y) = 0$  in einem Punkt  $(a, b)$  lokal eindeutig nach  $y$  auflösbar ist, wenn  $b \neq 0$ , und eindeutig nach  $x$  auflösbar ist, wenn  $a \neq 0$ .

Tatsächlich lässt sich in den Punkten  $(r, 0)$  und  $(-r, 0)$  die Gleichung nicht eindeutig nach  $y$  auflösen. Ebenso lässt sich in den Punkten  $(0, r)$  und  $(0, -r)$  die Gleichung nicht eindeutig nach  $x$  auflösen.

Für eine Funktion  $f$  mit  $x^2 + f(x)^2 - r^2 = 0$  gilt aufgrund von Satz VIII.6.1, daß

$$D(f)(x) = -D_y(g)(x, y)^{-1} \cdot D_x(g)(x, y) = -\frac{1}{2y} \cdot 2x = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f(x)}$$

- (2) Betrachten wir die Gleichung  $g(x, y) = x^2 - y = 0$ . Trivialerweise kann man eindeutig nach  $y$  auflösen. Da  $D_x(g)(x, y) = 2x$ , lässt sich die Gleichung für  $x \neq 0$  lokal eindeutig nach  $x$  auflösen. Für  $x = 0$  ist dies jedoch nicht der Fall, da für  $y$  nahe bei 0 sowohl  $\sqrt{y}$  als auch  $-\sqrt{y}$  ein mögliches  $x$  ist.

Für eine Funktion  $f$  mit  $f(y)^2 - y = 0$  gilt aufgrund von Satz VIII.6.1, daß

$$D(f)(y) = -D_x(g)(x, y)^{-1} \cdot D_y(g)(x, y) = -\frac{1}{2x} \cdot (-1) = \frac{1}{2f(y)}$$

- (3) Wir betrachten  $g(x, y) = x - \sin y = 0$ . Es gilt  $D_x(g)(x, y) = 1$  und  $D_y(g)(x, y) = -\cos y$ . Also lässt sich die Gleichung für  $y$  mit  $\cos y \neq 0$  lokal eindeutig nach  $y$  auflösen durch  $f(x) = \arcsin x$ . Es gilt aufgrund von Satz VIII.6.1, daß  $\arcsin'(x) = \frac{-1}{-\cos y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$ , wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß es mit dem von  $\cos y$  übereinstimmt.

Eine weitere Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist folgender Satz, der Bedingungen angibt, unter welchen eine Funktion lokal invertierbar ist.

**Satz VIII.6.3** (Inverser Funktionensatz)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Wenn für ein  $a \in U$  die Ableitung  $D(f)(a)$  invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen  $V$  und  $W$  von  $a$  bzw.  $b = f(a)$ , sodaß  $V \subseteq U$  und  $f : V \rightarrow W$  eine Bijektion ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion  $f^{-1} : W \rightarrow V$  und  $D(f^{-1})(b) = D(f)(a)^{-1}$ .

*Beweis:* Auf der offenen Menge  $\mathbb{R}^n \times U$  betrachten wir die Funktion  $g : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R} : (y, x) \mapsto y - f(x)$ . Offenbar ist  $g$  stetig differenzierbar, da  $f$  stetig differenzierbar ist. Es gilt  $g(b, a) = g(f(a), a) = f(a) - f(a) = 0$  und  $D_{\vec{x}}(g)(b, a) = -D(f)(a)$ , da  $D(f)(a)$  invertierbar ist. Aufgrund des impliziten Funktionensatzes gibt es offene Umgebungen  $W'$  und  $W$  von  $b$  bzw.  $a$  mit  $W' \times W \subseteq \mathbb{R}^n \times U$  und einer differenzierbaren Funktion  $h : W' \rightarrow W$ , sodaß

- (1)  $h(b) = a$  und
- (2) für alle  $y \in W'$  gibt es genau ein  $x \in W$  mit  $g(y, x) = y - f(x) = 0$ , nämlich  $h(y)$ .

Die Menge  $U = W \cap f^{-1}(W')$  ist offen, da  $f$  stetig ist. Wegen (2) ist die Einschränkung von  $h$  auf  $U$  eine Bijektion  $h|_U : U \rightarrow V$  und wegen  $f(h(y)) = y$  gilt  $h = f^{-1}$  auf  $W'$ .

Aufgrund der Kettenregel gilt

$$I_n = D(f \circ h)(y) = D(f)(h(y)) \cdot D(h)(y)$$

und somit insbesondere

$$I_n = D(f)(a) \cdot D(h)(b)$$

indem wir  $b$  für  $y$  einsetzen. Also gilt

$$D(f^{-1})(b) = D(h)(b) = D(f)(a)^{-1}$$

wie behauptet. □

**Beispiel VIII.6.4** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

mit Ableitung

$$D(f)(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Da  $\det D(f)(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r$ , ist aufgrund des inversen Funktionensatzes die Funktion  $f$  lokal invertierbar für Argumente mit  $r \neq 0$ .

Wenn  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  von  $(0, 0)$  verschieden ist, dann ist die Ableitung von  $f^{-1}$  in diesem Punkt wegen Satz VIII.6.3

$$\begin{aligned}
D(f^{-1})(x, y) &= D(f)(r, \varphi)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{r} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r^2} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## VIII.7 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Bei vielen Problemen aus der Praxis, insbesondere in der Ökonomie, erweist es sich als notwendig zu untersuchen, wo eine  $n$ -stellige Funktion  $f$  auf der Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$  extremal wird, d.h. man sucht nach Extremwerten von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$ .

Eine notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema unter Nebenbedingungen stellt folgender Satz bereit.

**Satz VIII.7.1** (Lagrangesche Multiplikatoren)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Wenn  $f$  in  $a$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$  hat und  $D(g)(a) \neq 0$ , dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , den sogenannten Lagrangeschen Multiplikator, mit  $D(f)(a) = \lambda \cdot D(g)(a)$ .

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $D_n(g)(a) \neq 0$ . Sei  $a = (a', a_n)$ . Wegen Satz VIII.6.1 gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $a'$  und eine differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(a') = a_n$  und  $g(x', h(x')) = 0$  für alle  $x' \in U$ . Offenbar hat dann die Funktion  $x' \mapsto f(x', h(x'))$  ein lokales Extremum in  $a'$ . Also gilt für  $1 \leq i < n$ , daß

- (1)  $D_i(f)(a) + D_n(f)(a) \cdot D_i(h)(a') = 0$
- (2)  $D_i(g)(a) + D_n(g)(a) \cdot D_i(h)(a') = 0$ .

Sei  $\lambda := \frac{D_n(f)(a)}{D_n(g)(a)}$ . Es gilt dann für  $1 \leq i < n$ , daß

$$D_i(f)(a) \stackrel{(1)}{=} -D_n(f)(a) \cdot D_i(h)(a') \stackrel{(2)}{=} D_n(f)(a) \cdot D_n(g)(a)^{-1} \cdot D_i(g)(a) = \lambda \cdot D_i(g)(a)$$

und da  $D_n(f)(a) = \lambda \cdot D_n(g)(a)$  aufgrund der Definition von  $\lambda$  gilt, folgt nun, daß  $D(f)(a) = \lambda \cdot D(g)(a)$  wie behauptet.  $\square$

**Bemerkung**

Rein formal ist die Aussage  $D(f)(a) = \lambda \cdot D(g)(a)$  äquivalent dazu, daß  $D(L)(a, \lambda) = 0$  wobei  $L(a, \lambda) = f(a) - \lambda \cdot g(a)$ . In dieser Formulierung findet man Satz VIII.7.1 oft in der Literatur.

### Beispiel VIII.7.2

- (1) Wir wollen die Extrema der Funktion  $f(x, y) = xy$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  bestimmen, d.h. für welche Punkte auf dem Einheitskreis die Funktion  $f$  extremal wird. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die in Frage kommenden "kritischen" Punkte mithilfe von Satz VIII.7.1. Die Ableitungen von  $f$  und  $g$  sind

$$D(f)(x, y) = (y, x) \quad \text{und} \quad D(g)(x, y) = (2x, 2y)$$

Wenn  $D(f)(x, y) = \lambda \cdot D(g)(x, y)$ , dann  $y = 2\lambda x$  und  $x = 2\lambda y$  und somit  $x = 4\lambda^2 x$  und  $y = 4\lambda^2 y$ . Somit ist  $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ , d.h.  $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ . Im Falle  $\lambda = \frac{1}{2}$  erhalten wir  $x = y$  und im Falle  $\lambda = -\frac{1}{2}$  erhalten wir  $x = -y$ . D.h. die in Frage kommenden Punkte sind die Paare der Gestalt  $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Wenn beide Komponenten das gleiche Vorzeichen haben nimmt  $f$  den Wert  $\frac{1}{2}$  an und andernfalls nimmt  $f$  den Wert  $-\frac{1}{2}$  an.

Da  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$  kompakt ist, nimmt wegen Satz VIII.2.10 die Funktion  $f$  auf  $K$  ihren größten und ihren kleinsten Wert auch tatsächlich an. Da diese Punkte sich unter den kritischen Punkten befinden müssen, ergibt sich zwangsläufig, daß  $f$  seinen maximalen Wert in den Punkten  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  und  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  und seinen minimalen Wert in den Punkten  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  und  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  annimmt.

- (2) Unter den Rechtecken mit konstantem Umfang  $U \geq 0$  wollen wir dasjenige bestimmen, das den größten Flächeninhalt hat. Wir suchen also das Extremum von  $f(x, y) = xy$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 2x + 2y - U = 0$ . Es gilt

$$D(f)(x, y) = (y, x) \quad \text{und} \quad D(g)(x, y) = (2, 2)$$

Die Menge  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ und } g(x, y) = 0\}$  ist kompakt und deshalb nimmt die stetige Funktion  $f$  ihr Maximum in einem Punkt  $(x_0, y_0)$  an. Da  $f(x, y) = 0$ , wenn  $x = 0$  oder  $y = 0$ , und  $f(x_0, y_0) > 0$ , hat  $f$  in  $(x_0, y_0)$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$ . Eine notwendige Bedingung dafür ist aufgrund von Satz VIII.7.1, daß  $(y, x) = D(f)(x, y) = \lambda D(g)(x, y) = (2\lambda, 2\lambda)$  für einen geeigneten Lagrangeschen Multiplikator  $\lambda$ , d.h.  $x = y$ . Also ist  $x_0 = y_0 = \frac{U}{4}$ .

- (3) Sei  $U > 0$  der vorgegebene Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen  $x, y, z \geq 0$ , d.h.  $x + y + z - U = 0$  und  $x, y, z \leq \frac{U}{2}$ . Wir wollen nun feststellen, welches dieser Dreiecke mit Umfang  $U$  den größten Flächeninhalt hat. Zu diesem Zweck verwenden wir die (hier ohne Beweis angegebene) Heronsche Formel  $F = \sqrt{\frac{U}{2} \left( \frac{U}{2} - x \right) \left( \frac{U}{2} - y \right) \left( \frac{U}{2} - z \right)}$  für den Flächeninhalt  $F$  eines Dreiecks mit Seiten  $x, y, z$  und Umfang  $U$ .

Es ist günstiger folgendes äquivalente Optimierungsproblem zu lösen: für  $c > 0$  bestimme das Maximum von  $f(x, y, z) = (c - x)(c - y)(c - z)$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y, z) = x + y + z - 2c = 0$  und  $x, y, z \geq 0$  (wobei man  $c = \frac{U}{2}$  setzt, um das ursprüngliche Problem zu lösen). Die Menge  $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0 \text{ und } x, y, z \geq 0\}$  ist kompakt. Da  $f$  stetig ist, nimmt sie ihr Maximum in einem Punkt  $(x_0, y_0, z_0) \in K$  an. Da die Funktion  $f$  am Rand von  $K$  konstant 0 ist und  $f(x_0, y_0, z_0) > 0$ , muß die Funktion  $f$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x, y, z) = 0$  haben.

Es ist

$$D(f)(x, y, z) = (-(c - y)(c - z), -(c - x)(c - z), (c - x)(c - y))$$

und

$$D(g)(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

und somit ist  $D(f)(x, y, z) = \lambda D(g)(x, y, z)$  äquivalent zu

$$(c - y)(c - z) = (c - x)(c - z) = (c - x)(c - y)$$

Diese Bedingung ist für  $(x, y, z) \in K$  genau dann erfüllt, wenn  $x = y = z = \frac{2c}{3}$ . Also ist  $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{2c}{3}$ .

Also hat ein Dreieck mit Umfang  $U$  maximalen Flächeninhalt, wenn alle drei Seiten gleich sind, und dieser Flächeninhalt ist gleich  $\sqrt{\frac{U}{2}}(\frac{U}{6})^3 = \frac{U^2}{12\sqrt{3}}$ .

## IX Differentialgleichungen

Differentialgleichung sind Gleichungen, in denen die Ableitungen ein oder mehrerer Funktionen in bezug gesetzt werden, wobei auch höhere und/oder partielle Ableitungen in Betracht kommen. Eine Differentialgleichung heißt *gewöhnlich*, wenn die in Betracht gezogenen Funktionen alle einstellig sind, d.h. keine partiellen Ableitungen vorkommen. Andernfalls spricht man von einer *partiellen Differentialgleichung*.

In Rahmen unserer Betrachtungen diskutieren wir (so gut wie ausschließlich) gewöhnliche Differentialgleichungen. In solchen werden die Ableitungen ein oder mehrerer einstelliger reellwertiger Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  in bezug gesetzt. Die Funktionen  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  interpretiert man meist — aber nicht immer — als *Ortsfunktionen*, die einem  $t$  im Zeitintervall  $I$  einen Ort  $f_i(t)$  zuordnen. Die Ableitung  $f'_i(t)$  interpretiert man als *Geschwindigkeit* zum Zeitpunkt  $t$  und  $f''_i(t)$  als *Beschleunigung* zum Zeitpunkt  $t$  (also die “Änderungsrate der Geschwindigkeit”). Wenn sich ein Punkt mit Masse  $m$  (notwendigerweise  $> 0$ ) im Zeitintervall  $I$  bewegt, wie es die Ortsfunktionen  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben, dann wirkt auf diesen Massenpunkt zum Zeitpunkt  $t$  die *Kraft*

$$F(t) = m \cdot \begin{pmatrix} f''_1(t) \\ \vdots \\ f''_n(t) \end{pmatrix}$$

was der Physiker als

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

auszudrücken beliebt.

**Beispiel IX.0.3** Wir betrachten einen Satelliten, der auf einer Kreisbahn mit Radius  $r > 0$  die Erde umrundet, und fragen uns mit welcher Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dies geschieht. Die Bewegung des Satelliten sei beschrieben durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Es eine Konstante  $c > 0$ , sodaß

$$f''(t) = -c \frac{f(t)}{\|f(t)\|_2^3}$$

zu allen Zeitpunkten  $t$  gilt, da aufgrund des Newtonschen Gravitationsgesetzes die Kraft auf den Satelliten in Richtung des Mittelpunkts der Erde wirkt und umgekehrt proportional zum Abstand des Satelliten zum Erdmittelpunkt ist. Da  $\|f(t)\|_2 = r$ , lässt sich die Differentialgleichung umschreiben als

$$-\omega^2 f(t) = f''(t) = -\frac{c}{r^3} f(t)$$

woraus folgt, daß  $\omega = \sqrt{\frac{c}{r^3}}$ . Man rechnet auch leicht nach, daß die Funktion

$$f(t) = \sqrt{\frac{c}{r^3}} \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}$$

tatsächlich die geforderte Differentialgleichung erfüllt.

In der Physik und Ingenieurwissenschaften werden oft Bewegungen von (Systemen von) Massenpunkten dadurch beschrieben, daß man fordert, daß ihre Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (bzw. die auf sie wirkenden Kräfte) eine bestimmte Gleichung erfüllen, die man oft als *Bewegungsgesetz* bezeichnet. Obige Differentialgleichung formuliert ein Bewegungsgesetz, wo die Kraft eine Funktion des Ortes ist. Dieser Fall rein ortsabhängiger Kräfte ist in der Physik häufig anzutreffen.

Wir betrachten nun ganz einfache Differentialgleichungen, die erklären, warum Exponentialfunktion und Schwingungen in der Natur auftreten.

#### Beispiel IX.0.4

(1) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(t) = a \cdot f(t)$$

die zum Ausdruck bringt, daß die Geschwindigkeit proportional zum Ort ist. Aufgrund von Satz III.4.4 wissen wir, daß eine der Differentialgleichung genügende Funktion  $f$  von der Gestalt  $f(t) = c \cdot \exp(at)$  sein muß. Wenn man nun zusätzlich eine Anfangsbedingung  $f(t_0) = b$  fordert, dann muß gelten  $b = f(t_0) = c \cdot \exp(at_0)$ . Somit ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) = a \cdot f(t) \quad \text{mit} \quad f(t_0) = b$$

die Funktion

$$f(t) = \frac{b}{\exp(at_0)} \exp(at) = b \exp(a(t - t_0))$$

(2) Betrachten wir die Differentialgleichung

$$f''(t) = -c^2 f(t)$$

die besagt, daß die Beschleunigung negativ proportional zum Ort ist. Offenbar sind

$$f_1(t) = \cos ct \quad \text{und} \quad f_2(t) = \sin ct$$

Lösungen dieser Differentialgleichung. Da alle Lösungen der Differentialgleichung unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen sind, sind auch alle Linearkombinationen  $a_1 f_1 + a_2 f_2$  Lösungen der Differentialgleichung. Wir werden später sehen, daß jede Lösung der Differentialgleichung  $f''(t) = -c^2 \cdot f(t)$  die Gestalt  $f(t) = a_1 \cos ct + a_2 \sin ct$  hat.

Wenn man zusätzlich die Anfangsbedingungen

$$f(0) = b_1 \quad \text{und} \quad f'(0) = b_2$$

fordert, d.h.  $a_1 = b_1$  und  $ca_2 = b_2$ , ergibt sich als eindeutige Lösung die Funktion

$$f(t) = b_1 \cos ct + \frac{b_2}{c} \sin ct$$

sofern  $c \neq 0$ . Wenn  $c = 0$ , dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gerade die konstanten Funktionen. Durch eine Anfangsbedingung  $f(t_0) = b$  ist diese eindeutig festgelegt. Natürlich ist dann  $f' = 0$ .

Bei den in diesen Beispielen betrachteten Differentialgleichungen handelt es sich um Systeme *linearer* Differentialgleichungen, für die es eine umfassende Lösungstheorie gibt, was leider für allgemeinere Differentialgleichungen nicht der Fall ist.

Obwohl in sehr vielen Anwendungen gewöhnliche Differentialgleichungen als implizite Beschreibungen von Ortsfunktionen verwendet werden, sind sie auch in anderen Bereichen von Nutzen, z.B. zur Beschreibung von nichtlinearem Wachstumsverhalten wie in folgendem Beispiel, das dem Buch [HKW] entnommen ist.

### Beispiel IX.0.5

Sei  $f(t)$  die Größe einer Population zum Zeitpunkt  $t$ . Die Wachstumsrate der Population kann z.B. von der Größe der Population auf folgende Weise abhängen

$$f'(t) = af(t)^2 - bf(t)$$

wobei  $a, b \neq 0$ . Wenn man annimmt, daß die Population nie verschwindet, kann man den Ansatz  $f = \frac{1}{g}$  machen, woraus man aufgrund der Kettenregel folgende Dgl. für  $g$  erhält

$$-\frac{g'(t)}{g(t)^2} = \frac{a - bg(t)}{g(t)^2}$$

die sich zu der sehr einfachen linearen Dgl.

$$g'(t) = bg(t) - a$$

vereinfacht, da wir  $g > 0$  angenommen haben. Eine Lösung dafür erhalten wir durch den Ansatz  $g(t) = c \exp(\alpha t) + d$ . Wenn  $\alpha$  oder  $c$  gleich 0 sind, dann ist  $g$

konstant mit Wert  $\frac{a}{b}$ , da  $0 = g'(t) = bg(t) - a$ . Nehmen wir also o.B.d.A. an, daß sowohl  $\alpha$  als auch  $c$  von 0 verschieden sind. Es gilt

$$\alpha c \exp(\alpha t) = g'(t) = bg(t) - a = bc \exp(\alpha t) + bd - a$$

und somit

$$(\alpha c - bc) \exp(\alpha t) = bd - a$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Da  $\alpha \neq 0$ , muß gelten  $\alpha c - bc = 0$  und somit auch  $bd - a = 0$ . Da aber auch  $c \neq 0$ , folgt  $\alpha = b$ . Also ist  $g(t) = c \exp(bt) + \frac{a}{b}$  und somit

$$f(t) = \frac{1}{c \exp(bt) + \frac{a}{b}} = \frac{b}{bc \exp(bt) + a}$$

Wenn man noch eine Anfangsbedingung  $f(0) = y_0$  vorgegeben hat, dann erhält man aus  $y_0 = f(0) = \frac{b}{bc+a}$ , daß

$$c = \frac{b - ay_0}{by_0}$$

und somit

$$f(t) = \frac{by_0}{(b - ay_0) \exp(bt) + ay_0}$$

als Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) = af(t)^2 - bf(t) \quad \text{mit} \quad f(0) = y_0$$

Wir haben bislang keine präzise Definition von gewöhnlichen Differentialgleichungen angegeben, sondern nur konkrete Beispiele betrachtet. Folgende Definition soll dem abhelfen.

**Definition IX.0.6** (System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung)  
Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ .<sup>20</sup> Eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  ist, heißt (lokale) Lösung der Differentialgleichung  $y'(t) = f(t, y(t))$ , wenn

- (1)  $\{(t, y(t)) \mid t \in I\} \subseteq G$  und
- (2)  $y'(t) = f(t, y(t))$  für alle  $t \in I$ .

Auf den ersten Blick scheint dies die meisten der Beispiele auszuschließen, die wir bisher betrachtet haben, da höhere, nämlich zweite, Ableitungen involviert waren. Es lässt sich jedoch eine gewöhnlich Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung der Gestalt

$$y^{(n)}(t) = f(t, y^{(0)}(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

---

<sup>20</sup>Wir schreiben  $G$  für ‘‘Gebiet’’.

folgendermaßen in ein System erster Ordnung umschreiben

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= y_2(t) \\ &\vdots \\ y'_{n-1}(t) &= y_n(t) \\ y'_n(t) &= f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{aligned}$$

wobei  $y_k$  der Ableitung  $y^{(k-1)}$  entspricht. Ein System 2. Ordnung

$$\begin{aligned} x''_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ x''_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

wie in Beispiel IX.0.3 lässt sich umschreiben in ein System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= y_1(t) \\ x'_2(t) &= y_2(t) \\ y'_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ y'_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

wobei die  $x_i$  den  $f_i$  und die  $y_i$  den  $f'_i$  entsprechen.

In Abschnitt IX.1 werden wir nachweisen, daß unter relativ milden Annahmen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

wie in Definition IX.0.6 lokal eine eindeutig Lösung existiert, wenn man zusätzlich eine Anfangsbedingung

$$y(t_0) = c$$

vorgibt.

## IX.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

In diesem Abschnitt geben wir ziemlich allgemeine Bedingungen an, unter denen für *Anfangswertprobleme* der Gestalt

$$y'(x) = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

*lokal eindeutige Lösungen* existieren. Um diese Bedingungen formulieren zu können, bedarf es folgender Begriffsbildung

**Definition IX.1.1** (Lipschitz-Bedingung)

Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann genügt  $f$  in  $G$  einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante  $L \geq 0$ , wenn

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

für alle  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in G$ . Die Funktion  $f$  genügt lokal einer Lipschitz-Bedingung, wenn für alle  $(a, b) \in G$  eine offene Umgebung  $U$  von  $(a, b)$  existiert, sodaß  $f$  in  $G \cap U$  eine Lipschitz-Bedingung mit (im allgemeinen von  $U$  abhängiger) Lipschitz-Konstante  $L \geq 0$  genügt.

Folgendes Lemma gibt eine sehr allgemeine hinreichende Bedingung dafür an, daß  $f$  lokal einer Lipschitzbedingung genügt.

**Lemma IX.1.2** Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto f(x, y)$  eine Funktion, die in den Variablen  $y = y_1, \dots, y_n$  stetig differenzierbar ist. Dann genügt  $f$  lokal einer Lipschitzbedingung.

*Beweis:* Sei  $(a, b) \in G$ . Da  $G$  offen ist, gibt es ein  $r > 0$ , sodaß  $V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - a|, \|y - b\|_\infty \leq r\}$  eine Teilmenge von  $G$  ist.

Für  $A \in \mathbb{R}_n^n$  sei  $\|A\|$  das Maximum der  $\|\cdot\|_1$  Normen der Zeilen von  $A$ . Aus dem Beweis von Satz VIII.2.9 folgt, daß  $\|Ax\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|x\|_\infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt.

Da  $D_y(f)$  nach Voraussetzung stetig und  $V$  kompakt ist, existiert aufgrund von Satz VIII.2.10 das Supremum  $L := \sup_{(x,y) \in V} \|D_y(f)(x, y)\|$ . Aus Satz VIII.3.8 folgt

nun, daß

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_\infty \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

für alle  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in V$ . Insbesondere gilt dies auch im Inneren von  $V$ .

Somit haben wir nachgewiesen, daß  $f$  lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.  $\square$

Also genügt eine sehr weite Klasse von Funktionen lokal einer Lipschitz-Bedingung, was wichtig ist, da nachfolgende Existenz- und Eindeutigkeitssätze dies zur Voraussetzung haben.

**Satz IX.1.3** (Eindeutigkeit lokaler Lösungen)

Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein offenes Gebiet und die Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung. Seien weiters  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ , wobei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  ist. Wenn für ein  $x_0 \in I$  gilt, daß  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ , dann sind  $\varphi$  und  $\psi$  gleich.

*Beweis:*

a) Wir zeigen zuerst, daß zu jedem  $a \in I$  mit  $\varphi(a) = \psi(a)$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodaß  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in I$  mit  $|x - a| \leq \varepsilon$ . Durch Integration der Gleichungen

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{und} \quad \psi'(x) = f(x, \psi(x))$$

folgt wegen  $\varphi(a) = \psi(a)$ , daß

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt$$

Da  $f$  lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, gibt es  $L, \delta > 0$ , sodaß

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L \cdot \|\varphi(t) - \psi(t)\|$$

für alle  $t \in I$  mit  $|t - a| \leq \delta$ . Daraus folgt, daß

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq L \cdot \left| \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\| dt \right|$$

für  $x \in I$  mit  $|x - a| \leq \delta$ . Setzt man

$$M(x) := \sup\{\|\varphi(t) - \psi(t)\| \mid |t - a| \leq |x - a|\}$$

so gilt für alle  $\xi \in I$  mit  $|\xi - a| \leq |x - a| \leq \delta$ , daß

$$\|\varphi(\xi) - \psi(\xi)\| \leq L \cdot |\xi - a|M(\xi) \leq L \cdot |x - a|M(x)$$

Daraus folgt aber

$$M(x) \leq L \cdot |x - a|M(x)$$

Sei  $\varepsilon := \min(\delta, \frac{1}{2L})$ . Dann gilt für  $x \in I$  mit  $|x - a| \leq \varepsilon$ , daß

$$M(x) \leq L \cdot |x - a|M(x) \leq L\varepsilon M(x) \leq \frac{1}{2}M(x)$$

und somit  $M(x) = 0$ . Das bedeutet aber  $\varphi(x) = \psi(x)$  für  $x \in I$  mit  $|x - a| < \varepsilon$ .

b) Wir zeigen, daß  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in I$  mit  $x \geq x_0$ . Sei

$$x_1 := \sup\{\xi \in I \mid \varphi|_{[x_0, \xi]} = \psi|_{[x_0, \xi]}\}$$

Wenn  $x_1$  unendlich oder gleich dem rechten Randpunkt von  $I$  ist, sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $[x_1, x_1 + \delta] \subseteq I$ . Da  $\varphi$  und  $\psi$  stetig sind, gilt  $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ . Aufgrund von a) gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in I$  mit  $|x - x_1| \leq \varepsilon$ . Dies ist aber im Widerspruch zur Definition von  $x_1$ . Daher gilt  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in I$  mit  $x \geq x_0$ .

c) Analog zu b) zeigt man, daß  $\varphi(x) = \psi(x)$  für alle  $x \in I$  mit  $x \leq x_0$ .  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, daß ohne Annahme einer lokalen Lipschitz-Bedingung die Eindeutigkeit i.a. nicht gewährleistet ist. Für das Anfangswertproblem

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit } y(0) = 0$$

sind nämlich  $\varphi_1(x) = 0$  und  $\varphi_2(x) = \frac{x^3}{27}$  zwei verschiedene Lösungen.

Als nächstes beweisen wir, daß unter der Annahme, daß  $G$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  lokal einer Lipschitzbedingung genügt, lokale Lösungen für Anfangswertprobleme der Gestalt  $y' = f(x, y)$  mit  $y(a) = c$  für  $(a, c) \in G$  existieren. Aufgrund von Satz IX.1.3 sind diese lokalen Lösungen eindeutig.

**Satz IX.1.4** (Existenz-Satz von Picard-Lindelöf)

Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein offenes Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem  $(a, c) \in G$  ein  $\varepsilon > 0$  und eine Lösung  $\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ , die der Anfangsbedingung  $\varphi(a) = c$  genügt.

*Beweis:*

- a) Weil  $G$  offen ist und  $f$  lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, gibt es ein  $r > 0$ , sodaß die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r \text{ und } \|y - c\| \leq r\}$$

in  $G$  als Teilmenge enthalten ist und  $f$  in  $V$  einer Lipschitz-Bedingung bzgl. einer geeigneten Lipschitz-Konstanten  $L \geq 0$  genügt. Da  $V$  kompakt und  $f$  stetig ist, existiert ein  $M > 0$  mit  $\|f(x, y)\| \leq M$  für alle  $(x, y) \in V$ . Wir setzen  $\varepsilon = \min(r, \frac{r}{M})$  und  $I = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ .

- b) Eine stetige Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist offenbar genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn

$$(\dagger) \quad \varphi(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \quad \text{für alle } x \in I$$

gilt. Mithilfe des sogenannten *Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens* konstruieren(!) wir nun eine Folge von stetigen Funktionen  $\varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , von der wir zeigen können, daß sie gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Wir setzen  $\varphi_0(x) = c$  und definieren rekursiv

$$\varphi_{k+1}(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt$$

für  $x \in I$ . Um zu zeigen, daß für alle  $k$  der Graph von  $\varphi(k)$  in  $V$  liegt, müssen wir zeigen, daß

$$\|\varphi_k(x) - c\| \leq r$$

für alle  $x \in I$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dies gilt trivialerweise für  $k = 0$ . Außerdem gilt für beliebige  $k \in \mathbb{N}_0$ , daß

$$\|\varphi_{k+1}(x) - c\| = \left\| \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt \right\| \leq |x - a| \cdot M \leq \varepsilon M \leq r$$

für alle  $x \in I$ .

c) Als nächstes zeigen wir durch Induktion über  $k$ , daß

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \leq ML^k \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Die Behauptung gilt für  $k = 0$ , da  $\left\| \int_a^x f(t, c) dt \right\| \leq M|x-a|$ . Nehmen wir als Induktionshypothese an, die Behauptung gelte für  $k$ . Dann gilt für alle  $x \in I$ , daß

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k+2}(x) - \varphi_{k+1}(x)\| &= \left\| \int_a^x f(t, \varphi_{k+1}(t)) - f(t, \varphi_k(t)) dt \right\| \\ &\leq \int_a^x L \cdot \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\| dt \quad (\text{wegen Ind. Hyp.}) \\ &\leq ML^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \int_a^x |t-a|^{k+1} dt \\ &= ML^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{k+2} |x-a|^{k+2} \\ &= ML^{k+1} \frac{|x-a|^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

d) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)$  besitzt wegen c) auf  $I$  die konvergente Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} ML^k \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$ . Also konvergiert wegen Satz VI.1.4 die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Somit konvergiert auch die Funktionenfolge  $\varphi_k$  auf  $I$  gleichmäßig gegen  $\varphi$ . Da die  $\varphi_k$  alle stetig sind, ist aufgrund von Satz VI.1.6 die Grenzfunktion  $\varphi$  auch stetig.

Außerdem gilt für alle  $x \in I$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ , daß

$$\|f(x, \varphi(x)) - f(x, \varphi_k(x))\| \leq L \cdot \|\varphi(x) - \varphi_k(x)\|$$

woraus folgt, daß die Folge  $f(x, \varphi_k(x))$  gleichmäßig gegen  $f(x, \varphi(x))$  konvergiert.

Deshalb konvergiert für  $x \in I$  aufgrund von Satz VI.1.8 die Folge  $\int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt$

gegen  $\int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$ , woraus folgt, daß

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} c + \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$$

d.h.  $\varphi$  Bedingung ( $\dagger$ ) erfüllt wie behauptet.  $\square$

## IX.2 Elementare Lösungsmethoden

Die Existenz und Eindeutigkeitsätze für lokale Lösungen, die wir im vorigen Abschnitt IX.1 kennengelernt haben, gestatten einem im allgemeinen nicht Lösungen für Anfangswertprobleme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad y(t_0) = c$$

explizit anzugeben, auch wenn  $f$  eine einfach hinschreibbare Funktion ist. Auch in vielen praktischen Fällen ist dies nicht möglich und man muß sich mit numerisch berechneten Näherungen zufrieden geben. Jedoch kann man in vielen speziellen Fällen Lösungen explizit angeben. Einige der wichtigsten diskutieren wir in diesem Abschnitt.

### IX.2.1 Trennung der Variablen

Sei  $I$  und  $J$  offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, wobei vorausgesetzt sei, daß  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in J$ . Wir betrachten im Gebiet  $G = I \times J$  die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

mit “getrennten Variablen”.

**Satz IX.2.1** (Trennung der Variablen)

*Die obigen Bezeichnungen seien beibehalten. Sei  $a \in I$  und  $b \in J$ . Wir definieren Funktionen  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad G(y) = \int_b^y \frac{1}{g(t)} dt$$

*Sei  $I_0$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  mit  $a \in I_0 \subseteq I$  und  $F[I_0] \subseteq G[J]$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\varphi : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung  $y'(x) = f(x)g(y)$  mit Anfangsbedingung  $y(a) = b$  und diese Lösung genügt der Bedingung*

$$G(\varphi(x)) = F(x)$$

*für alle  $x \in I_0$ .*

*Beweis:* Da  $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$  für  $x \in I_0$ , gilt auch  $\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$  für  $x \in I_0$ , da  $g$  niemals den Wert 0 annimmt. Durch Integration erhalten wir

$$G(\varphi(x)) = \int_b^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)} dt = \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_a^x f(t) dt = F(x)$$

für  $x \in I_0$ .

Da  $G' = \frac{1}{g}$  immer von 0 verschieden ist, hat  $G$  eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion  $H = G^{-1}$ . Indem man  $H$  auf  $G(\varphi(x)) = F(x)$  anwendet, erhält man  $\varphi(x) = H(G(\varphi(x))) = H(F(x))$  für  $x \in I_0$ . Somit ist also die Lösung auf  $I_0$  eindeutig bestimmt.

Die Funktion  $\varphi : I_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto H(G(\varphi(x))) = H(F(x))$  erfüllt die Bedingung  $\varphi(a) = H(G(\varphi(a))) = H(F(a)) = H(0) = b$  (da  $G(b) = 0$ ). Außerdem erfüllt  $\varphi$  die Differentialgleichung, denn aus  $\varphi(x) = H(F(x))$  folgt  $G(\varphi(x)) = F(x)$ , woraus durch Differenzieren folgt, daß

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x) = f(x)$$

und somit  $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$ .  $\square$

Im Falle, daß  $G$  (lokal) invertierbar ist, kann man aus  $G(\varphi(x)) = F(x)$  die Lösung als  $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$  bestimmen. Dies ist beispielsweise der Fall im nächsten Unterabschnitt über lineare Differentialgleichungen, wo sich  $G$  als  $\ln$  herauststellen wird und somit durch  $\exp$  invertiert werden kann.

Ein weiteres Beispiel ist die Differentialgleichung  $y' = y^2$ , deren Lösung mithilfe von Satz IX.2.1 wir als Übung(!) empfehlen.

**Bemerkung** In etwas altmodischer und leicht inexakter, jedoch von manchen als intuitiv empfundener Notation lässt sich Satz IX.2.1 folgendermaßen herleiten. Aus  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$  folgt  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$  und somit  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c$ . Indem man letztere Gleichung nach  $y$  auflöst erhält man eine Lösung. Die Konstante  $c$  kann man dann aus einer geeigneten Anfangsbedingung ermitteln.

### IX.2.2 Lineare Differentialgleichungen

Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und seien  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nennt man

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

eine *lineare Differentialgleichung* und sie heißt *homogen*, wenn  $b(x) = 0$ .

Wir behandeln zuerst den homogenen Fall.

**Satz IX.2.2** Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x)y(x)$$

mit Anfangsbedingung  $y(x_0) = c$  hat die eindeutige Lösung

$$y(x) = c \exp \left( \int_{x_0}^x a(t) dt \right)$$

*Beweis:* Da  $a(x)y$  in  $y$  stetig differenzierbar ist, ist die Lösung eindeutig. Es gilt  $y(x_0) = c \exp(0) = c$  und

$$y'(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \cdot a(x) = y(x)a(x)$$

Alternativ hätten wir auch mit Satz IX.2.1 argumentieren können (Übung!), wobei allerdings der triviale Fall  $c = 0$  extra zu behandeln gewesen wäre.  $\square$

Wir schreiten nun zur Lösung des inhomogenen Problems  $y' = a(x)y + b(x)$ . Sei  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$ , die in dem Sinne nichttrivial ist, daß  $\varphi(x_0) \neq 0$  für ein  $x_0 \in I$ . Aufgrund von Satz IX.1.3 ist dann  $\varphi \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Somit lässt sich eine beliebige Lösung  $\psi$  von  $y' = a(x)y + b(x)$  schreiben als

$$\psi(x) = \varphi(x)u(x) \quad (x \in I)$$

für eine geeignete stetig differenzierbare Funktion  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gilt dann

$$\varphi'u + \varphi u' = \psi' = a\psi + b = a\varphi u + b$$

und, da  $\varphi' = a\varphi$ , daß  $u' = \frac{b}{\varphi}$  und somit

$$u(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt + d$$

wobei sich  $d$  aus einer Anfangsbedingung  $y(x_0) = c$  ermitteln lässt.

Wir fassen diese Überlegungen in folgendem Satz zusammen.

**Satz IX.2.3** (Variation der Konstanten)

Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und seien  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann existiert zu beliebigem  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$  genau eine Lösung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$y' = a(x)y + b(x) \quad y(x_0) = c$$

natürlich

$$\psi(x) = \varphi(x) \left( c + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right)$$

wobei

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

*Beweis:* Es gilt  $\psi(x_0) = \varphi(x_0) \cdot c = \exp(0) = c = c$ , also erfüllt  $\psi$  die Anfangsbedingung, und  $\psi$  erfüllt die Differentialgleichung, da

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \varphi'(x) \left( c + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) + \varphi(x) \cdot \frac{b(x)}{\varphi(x)} \\ &= a(x)\varphi(x) \left( c + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right) + b(x) \\ &= a(x)\psi(x) + b(x)\end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit ausgenutzt haben, daß  $\varphi$  Lösung des homogenen Problems ist.  $\square$

Man nennt diese Methode ‘‘Variation der Konstanten’’, da die Lösung des homogenen Problems die Gestalt  $\varphi(x)c$  mit einer Konstanten  $c$  hat und man die Lösung des inhomogenen Problems dadurch ermittelt, daß man die Konstante  $c$  durch eine geeignete ‘‘variable’’ Funktion  $u(x)$  ersetzt.

**Beispiel IX.2.4** Wir betrachten das inhomogene lineare Problem

$$y' = 2xy + x^3$$

wobei  $a(x) = 2x$  und  $b(x) = x^3$ . Aufgrund von Satz IX.2.2 hat das homogene Problem die nichttriviale Lösung

$$\varphi(x) = \exp \left( \int_0^x 2t dt \right) = \exp(x^2)$$

Deshalb hat aufgrund von Satz IX.2.3 das lineare inhomogene Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x) \quad y(0) = c$$

die Lösung

$$\psi(x) = \exp(x^2) \left( c + \int_0^x t^3 \exp(-t^2) dt \right)$$

Mithilfe der Substitution  $s = t^2$  und partieller Integration erhält man

$$\int_0^x t^3 \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1) \exp(-x^2)$$

und somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\psi(x) = \left( c + \frac{1}{2} \right) \exp(x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

### IX.2.3 Die Differentialgleichung $x'' = f(x)$

Wenn die auf einen sich im eindimensionalen Raum bewegenden Massenpunkt wirkende Kraft ausschließlich vom Ort des Massenpunkts abhängt, so wird seine Bewegung durch eine Differentialgleichung der Gestalt

$$x'' = f(x)$$

beschrieben, wobei  $x$  die Ortsfunktion des Massenpunkts ist. Des weiteren seien die Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{und} \quad x'(t_0) = v_0$$

vorgegeben, d.h. Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0$ .

Wir können nun die sogenannte *Potentialfunktion*

$$U(x) := - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

betrachten. Unter Verwendung selbiger lässt sich die Differentialgleichung umschreiben als

$$x''(t) = -U'(x(t))$$

woraus sich durch Multiplikation mit  $x'(t)$  die Gleichung

$$x''(t)x'(t) + U'(x(t))x'(t) = 0$$

ergibt. Durch Integration erhalten wir

$$\frac{x'(t)^2}{2} + U(x(t)) = E$$

für eine geeignete Konstante  $E$ , die sich aus den Anfangsbedingungen als

$$E = \frac{x'(t_0)^2}{2} + U(x(t_0)) = \frac{v_0^2}{2}$$

bestimmen lässt, da  $x(t_0) = x_0$  und  $U(x_0) = 0$ .<sup>21</sup> Da  $\frac{x'(t)^2}{2} \geq 0$ , gilt immer  $U(x) \leq E$ . Deshalb lässt sich die Differentialgleichung umschreiben als

$$x'(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))} \quad \text{bzw.} \quad x'(t) = -\sqrt{2(E - U(x(t)))}$$

---

<sup>21</sup>In der Physik bezeichnet man  $\frac{x'(t)^2}{2}$  als *kinetische Energie* und  $U(x(t))$  als *potentielle Energie*. Daß ihre Summe gleich der konstanten Gesamtenergie  $E$  ist, kennt man unter dem Namen *Energieerhaltungssatz*.

je nachdem, ob  $x'(t)$  im betrachteten Zeitintervall als  $\geq 0$  oder  $\leq 0$  angenommen wird. Diese Differentialgleichung ist vom Typ getrennte Variable und somit lässt sich Satz IX.2.1 auf sie anwenden. Dabei erhält man für den Fall  $x' \geq 0$

$$t - t_0 = G(x(t)) \quad \text{wobei} \quad G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$$

unter Ausnutzung der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$ . Wenn  $G$  invertierbar ist, erhält man die Funktion

$$x(t) = G^{-1}(t - t_0)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Ein typisches Beispiel ist die Bewegung eines Körpers (Massenpunkts) im Schwerkraftfeld der Erde, die der Differentialgleichung

$$x''(t) = \frac{-cx}{|x|^3}$$

für eine geeignete Konstante  $c > 0$  genügt. Im Falle  $x > 0$  vereinfacht sich die Differentialgleichung zu

$$x''(t) = \frac{-c}{x^2}$$

Wenn man  $x(0) = r > 0$  (Erdradius) vorgibt, dann ist

$$U(x) = - \int_r^x \frac{-c}{\xi^2} d\xi = \int_r^x \frac{c}{\xi^2} d\xi = c \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right)$$

Wenn man nun zusätzlich eine Anfangsgeschwindigkeit  $x'(0) = v$  vorgibt, dann ist  $E = \frac{v^2}{2}$ . Also ist dann

$$G(x) = \int_r^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} = \int_r^x \frac{d\xi}{\sqrt{v^2 - \frac{2c}{r} + \frac{2c}{\xi}}}$$

Da diese Funktion auf  $[r, \infty[$  monoton steigend und somit invertierbar ist, ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) = \frac{-c}{x^2} \quad x(0) = r \quad x'(0) = v$$

gegeben durch

$$x(t) = G^{-1}(t)$$

wobei  $G$  wie oben berechnet wird. Man kann diese Überlegungen dazu verwenden (Übung!), um die minimale Geschwindigkeit zu bestimmen, die benötigt wird, um das Schwerkraftfeld der Erde zu verlassen, wenn man auf der Erdoberfläche startet.

### IX.3 Systeme linearer Differentialgleichungen

Unter einem *System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung* verstehen wir eine Gleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}_n^n$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen sind und  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  ist. Es ist in Hinblick auf späterer Betrachtungen (siehe Abschnitt IX.5) zweckmäßig, neben Systemen reeller linearer Differentialgleichungen auch Systeme *komplexwertiger* linearer Differentialgleichungen zu betrachten, wo  $A : I \rightarrow \mathbb{C}_n^n$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  aber  $I$  noch immer ein Intervall in  $\mathbb{R}$  ist. Natürlich ist dann  $A(x)y$  als Multiplikation von Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{C}$  zu verstehen. Man kann jedoch ein komplexwertiges System von  $n$  linearen Differentialgleichungen als ein reellwertiges System von  $2n$  linearen Differentialgleichungen auffassen (da die Multiplikation mit einer komplexen Zahl eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  induziert). Im weiteren schreiben wir  $\mathbb{K}$  statt  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ . Folgendes Lemma, das die Produktregel auf komplexwertige Funktionen ausweitet, ist im weiteren hilfreich.

**Lemma IX.3.1** *Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

für alle  $x \in I$ .

*Beweis:* Seien  $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodaß

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$$

für  $x \in I$ . Es gilt

$$h(x) := f(x) \cdot g(x) = (f_1(x)g_1(x) - f_2(x)g_2(x)) + i(f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x))$$

für  $x \in I$ . Man rechnet nun leicht nach, daß

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

für  $x \in I$ . □

Im allgemeinen garantiert der Satz IX.1.4 bloß die Existenz einer lokalen Lösung.<sup>22</sup> Im Falle linearer Differentialgleichungen haben wir jedoch folgendes stärkere Resultat.

---

<sup>22</sup>Beispielsweise hat das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 \quad y(0) = c$$

keine globale Lösung, wenn  $c \neq 0$  (Übung!).

**Satz IX.3.2** Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und seien

$$A : I \rightarrow \mathbb{K}_n^n \quad \text{und} \quad b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

stetige Funktionen. Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{K}^n$  genau eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b \quad y(x_0) = c$$

*Beweis:* Sei  $f : I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : (x, y) \mapsto A(x)y + b(x)$ . Für jedes kompakte Intervall  $J \subseteq I$  genügt die Einschränkung von  $f$  auf  $J \times \mathbb{K}^n$  einer globalen Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante  $L = \sup_{x \in J} \|A(x)\|$ . Somit folgt aus Satz IX.1.3 die Eindeutigkeit der Lösung.

Die Lösung des Anfangswertproblems existiert auf  $J$  und wird mittels des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens konstruiert. Wir definieren

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{k+1}(x) = c + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_k(t)) dt$$

für  $x \in J$ . Da  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  stetig sind und  $J$  kompakt ist, existiert  $K := \sup_{x \in J} \|\varphi_0(x) - \varphi_1(x)\|$ . Durch Induktion über  $k$  zeigt man leicht, daß

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \leq K \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!}$$

für alle  $x \in J$ . Somit konvergiert die Folge  $(\varphi_k)$  auf  $J$  gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Wie im Beweis von Satz IX.1.4 zeigt man, daß  $\varphi$  eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

Die Behauptung für das offene Intervall  $I$  folgt nun, da man  $I$  durch immer größere kompakte Intervalle  $J$  ausschöpfen kann.  $\square$

Wenn  $b = 0$  ist, nennt man das System linearer Differentialgleichungen *homogen* und andernfalls *inhomogen*. Offenbar bildet die Menge der Lösungen eines homogenen Systems einer Vektorraum. Der nächste Satz gibt eine einfache Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit von Lösungen, woraus folgt, daß der Lösungsraum Dimension  $n$  hat.

**Satz IX.3.3** Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{K}_n^n$  stetig. Die Menge  $L_H$  aller Lösungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  von  $y' = A(x)y$  bildet einen  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für ein  $k$ -Tupel  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in L_H$  sind folgende Aussagen äquivalent

- i)  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  sind linear unabhängig in  $L_H$
- ii) es existiert ein  $x_0 \in I$ , sodaß  $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_k(x_0)$  in  $\mathbb{K}^n$  linear unabhängig sind

iii) für alle  $x \in I$  sind  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$  linear unabhängig in  $\mathbb{K}^n$ .

*Beweis:* Klarerweise gelten die Implikationen iii)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  i). Angenommen es gilt i), aber für ein  $x \in I$  sind  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$  linear abhängig in  $\mathbb{K}^n$ . Dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , sodaß nicht alle  $\lambda_i$  gleich 0 sind aber  $\lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_k\varphi_k(x) = 0$ . Aufgrund von Satz IX.3.2 ist dann  $\lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_k\varphi_k = 0$  im Widerspruch zur Annahme, daß  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear unabhängig sind. Also haben wir i)  $\Rightarrow$  iii) gezeigt.

Sei  $x_0 \in I$  und seien  $e_1, \dots, e_n$  die  $n$  linear unabhängigen Einheitsvektoren des  $\mathbb{K}^n$ . Sei  $\varphi_i$  die aufgrund von Satz IX.3.2 eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y \quad \text{mit} \quad y(x_0) = e_i$$

Dann sind aufgrund der Äquivalenz von i) und ii) die Lösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear unabhängig in  $L_H$ .  $\square$

Wir nennen eine linear unabhängige Menge  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  von Lösungen ein *Fundamentalsystem* von  $y' = A(x)y$ .

**Beispiel IX.3.4** Wie betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y'_1 &= -\omega y_2 \\ y'_2 &= \omega y_1 \end{aligned}$$

wobei  $\omega \in \mathbb{R}$  eine Konstante ist. In Matrizenschreibweise sieht die folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Man errät leicht die Lösungen

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix} \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin \omega x \\ \cos \omega x \end{pmatrix}$$

und aufgrund von Satz IX.3.3 bilden sie auch ein Fundamentalsystem, da

$$\det \Phi(x) = \det(y_1(x) \mid y_2(x)) = \det \begin{pmatrix} \cos \omega x & -\sin \omega x \\ \sin \omega x & \cos \omega x \end{pmatrix} = 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Satz IX.3.5** Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und seien  $A : I \rightarrow \mathbb{K}_n^n$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetige Funktionen. Sei  $L_H$  die Menge der Lösungen des homogenen Systems  $y' = A(x)y$  und  $L_I$  die Menge der Lösungen des inhomogenen Systems  $y' = A(x)y + b(x)$ . Dann gilt für beliebige  $\psi \in L_I$ , daß  $L_I = \psi + L_H$ .

*Beweis:* Seien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  in  $L_I$ , dann ist  $\varphi := \psi_2 - \psi_1$  in  $L_H$ . Wenn  $\psi \in L_I$  und  $\varphi \in L_H$ , dann ist auch  $\psi + \varphi \in L_I$ .  $\square$

**Satz IX.3.6** Unter den Annahmen von Satz IX.3.5 sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Fundamentalsystem für das homogene Problem  $y' = A(x)y$  und  $\Phi(x) = (\varphi_1(x) | \dots | \varphi_n(x))$ . Dann ist eine Lösung des inhomogenen Systems  $y' = A(x)y + b(x)$  gegeben durch

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) \quad \text{wobei} \quad u(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1}b(t) dt + \text{const.}$$

wobei  $x_0$  ein beliebiges Element von  $I$  ist.

*Beweis:* Da  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Fundamentalsystem ist, ist aufgrund von Satz IX.3.3 die Matrix  $\Phi(x)$  für alle  $x \in I$  invertierbar.

Zur Lösung des inhomogenen Problems machen wir den Ansatz  $\psi = \Phi u$ . Es gilt dann

- (1)  $\psi' = \Phi'u + \Phi u'$  wegen der Produktregel und
- (2)  $A\psi + b = A\Phi u + b$ .

Es gilt dann wegen  $\Phi' = A\Phi$ , daß

$$\begin{aligned} \psi' &= A\psi + b &\Leftrightarrow \\ \Phi'u + \Phi u' &= A\Phi u + b &\Leftrightarrow \\ \Phi u' &= b &\Leftrightarrow \\ u' &= \Phi^{-1}b \end{aligned}$$

wobei die letzte Bedingung äquivalent ist zu  $u(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1}b(t) dt + \text{const.}$   $\square$

**Beispiel IX.3.7** In Fortführung von Bsp. IX.3.4 betrachten wir das inhomogene System

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Aus Bsp. IX.3.4 wissen wir, daß

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das assoziierte homogene Problem ist. Wir verwenden nun Satz IX.3.6, um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu berechnen. Es gilt

$$\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}$$

Also ist

$$u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} dt + \text{const.}$$

Mithilfe partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \sin x - x \cos x \\ \int x \cos x \, dx &= \cos x + x \sin x \end{aligned}$$

und somit kann man

$$u(x) = \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix}$$

wählen. Damit ergibt sich eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems als

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist daher

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## IX.4 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine besonders einfache Lösungstheorie hat man für Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung  $y'(x) = Ay(x) + b(x)$ , wo  $A$  nicht von  $x$  abhängt, d.h. die Koeffizienten konstant sind.

Um den entsprechenden Satz formulieren zu können, brauchen wir vorab folgendes Lemma.

**Lemma IX.4.1** Sei  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  eine komplexe Zahl. Dann ist die Ableitung der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \exp(\lambda t)$  gleich  $f'(t) = \lambda \exp(\lambda t)$ .

*Beweis:* Wenn wir  $f$  differenzieren, fassen wir  $f$  als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^2$  auf, d.h.

$$f(t) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) \cos(\lambda_2 t) \\ \exp(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

und somit erhalten wir

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) \cos(\lambda_2 t) - \lambda_2 \exp(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t) + \lambda_2 \exp(\lambda_1 t) \cos(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

Man rechnet aber leicht nach, daß  $f'_1(t) + i f'_2(t) = \lambda \cdot (f_1(t) + i f_2(t))$  und somit  $f'(t) = \lambda \cdot \exp(\lambda t)$  wie behauptet.  $\square$

**Satz IX.4.2** Sei  $A \in \mathbb{C}_n^n$  und  $a$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , dann ist

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n : t \mapsto \exp(\lambda t) \cdot a$$

eine Lösung von  $y' = Ay$ .

*Beweis:* Da  $Aa = \lambda a$ , gilt

$$\varphi'(t) = \lambda \cdot \exp(\lambda t) \cdot a = \exp(\lambda t) \cdot \lambda \cdot a = \exp(\lambda t) \cdot Aa = A(\exp(\lambda t) \cdot a) = A\varphi(t)$$

und somit ist  $\varphi$  eine Lösung.  $\square$

Wenn nun  $A$  diagonalisierbar ist, erhält man sogar ein Fundamentalsystem.

**Korollar IX.4.3** Sei  $A \in \mathbb{C}_n^n$  und  $a_1, \dots, a_n$  eine Basis von Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann bilden die Funktionen

$$\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n : t \mapsto \exp(\lambda_k t) \cdot a_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$ .

*Beweis:* Wegen Satz IX.4.2 sind alle  $\varphi_k$  Lösungen und wegen Satz IX.3.2 sind sie linear unabhängig, da  $\varphi_1(0) = a_1, \dots, \varphi_n(0) = a_n$  nach Voraussetzung linear unabhängig sind.  $\square$

**Beispiel IX.4.4** Betrachten wir wiederum das System

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

d.h. den Spezialfall von Bsp. IX.3.4 mit  $\omega = 1$ . Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$  mit zugehörigen Eigenvektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Deshalb sind aufgrund von Satz IX.4.2 sowohl

$$\varphi_1(t) = \exp(\lambda_1 t) a_1 = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \sin t - i \cos t \end{pmatrix}$$

als auch

$$\varphi_2(t) = \exp(\lambda_2 t) a_1 = (\cos t - i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t \\ \sin t + i \cos t \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich die beiden linear unabhängigen reellen Lösungen

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

ablesen.

## IX.5 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine Differentialgleichung der Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x) \quad (a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C})$$

nennt man *lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Sie heißt homogen, wenn  $b(x) = 0$ , und andernfalls inhomogen. Solche Differentialgleichung lassen sich natürlich umschreiben in lineare Systeme 1. Ordnung, für die wir im vorigen Abschnitt die Lösungstheorie diskutiert haben. Deshalb haben lineare Differentialgleichungen eindeutige Lösungen, sofern man Anfangswerte  $y(x_0) = c_0, y'(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$  vorgibt. Bei der Lösungstheorie im vorigen Abschnitt haben die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix eine entscheidende Rolle gespielt (Satz IX.4.2 und Corollar IX.4.3).

Im nun vorliegenden spezielleren Fall wird sich hingegen herausstellen, daß die Nullstellen des assoziierten Polynoms

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + a_{n-2}T^{n-2} + \cdots + a_1T + a_0$$

die entscheidende Rolle spielen werden. Wir bezeichnen die Variable des Polynoms  $P$  mit  $T$ , weil wir für sie nicht bloß Zahlen, sondern auch “Operatoren” (oft mit  $T$  bezeichnet) einsetzen werden, typischerweise den “Differentialoperator”  $D$ , der differenzierbare Funktionen  $f$  auf  $D(f)$  abbildet, wobei  $D(f)(x) = f'(x)$ . Dabei wird die Multiplikation als Hintereinanderausführung von Operatoren interpretiert. Amüsanter- und nützlicherweise gelten für die mit  $D$  instanzierten Polynome die üblichen Rechengesetze wie z.B.

$$(P_1 + P_2)(D) = P_1(D) + P_2(D) \quad (P_1 P_2)(D) = P_1(D) P_2(D)$$

Unter Verwendung dieser Notation schreibt man für

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b$$

abkürzend

$$P(D)y = b$$

wobei  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + a_{n-2}T^{n-2} + \cdots + a_1T + a_0$ . Wenn eine Funktion  $f$  durch einen Ausdruck  $e(x)$  definiert wird als  $f(x) = e(x)$ , dann schreiben wir oft  $P(D)e(x)$  für  $P(D)(f)(x)$  wie in den folgenden Lemmata.

**Lemma IX.5.1** *Sei  $P(T)$  ein Polynom und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt*

$$P(D)\exp(\lambda x) = P(\lambda)\exp(\lambda x)$$

*Beweis:* Sei  $P(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$ . Dann gilt

$$P(D)(\exp(\lambda x)) = \sum_{k=0}^n a_k D^k \exp(\lambda x) \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \exp(\lambda x) = P(\exp(\lambda x))$$

wobei  $(*)$  aufgrund von Lemma IX.4.1 gilt.  $\square$

**Lemma IX.5.2** *Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt für jede auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$   $k$ -mal differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , daß*

$$(D - \lambda)^k(f(x)\exp(\lambda x)) = f^{(k)}(x)\exp(\lambda x)$$

für alle  $x \in I$ .

*Beweis:* Der Beweis geht mit Induktion über  $k$ . Für  $k = 0$  ist die Behauptung trivialerweise wahr. Wir nehmen als Induktionshypothese an, die Behauptung gelte für  $k$ . Es gilt dann für  $(k+1)$ -mal differenzierbar Funktionen  $f$ , daß

$$\begin{aligned} (D - \lambda)^{k+1} &= (D - \lambda)(D - \lambda)^k(f(x)\exp(\lambda x)) \\ &\stackrel{(IH)}{=} (D - \lambda)(f^{(k)}(x)\exp(\lambda x)) \\ &= D(f^{(k)}(x)\exp(\lambda x)) - \lambda f^{(k)}(x)\exp(\lambda x) \\ &\stackrel{\text{IX.4.1}}{=} f^{(k+1)}(x)\exp(\lambda x) + \lambda f^{(k)}(x)\exp(\lambda x) - \lambda f^{(k)}(x)\exp(\lambda x) \\ &= f^{(k+1)}(x)\exp(\lambda x) \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt bewiesen ist.  $\square$

**Lemma IX.5.3** Sei  $P$  ein Polynom mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $P(\lambda) \neq 0$ . Wenn  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Polynomfunktion vom Grad  $k$  ist, dann gilt

$$P(D)(g(x) \exp(\lambda x)) = h(x) \exp(\lambda x)$$

wobei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  wieder eine Polynomfunktion vom Grad  $k$  ist.

*Beweis:* Man kann das Polynom nach Potenzen von  $T - \lambda$  umordnen, d.h.

$$P(T) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu (T - \lambda)^\nu$$

für geeignete Koeffizienten  $a_\nu \in \mathbb{C}$ . Da  $P(\lambda) \neq 0$ , gilt  $a_0 \neq 0$ . Nach Lemma IX.5.2 gilt dann

$$\begin{aligned} P(D)(g(x) \exp(\lambda x)) &= \sum_{\nu=0}^n a_\nu (D - \lambda)^\nu (g(x) \exp(\lambda x)) \\ &= \sum_{\nu=0}^n a_\nu g^{(\nu)}(x) \exp(\lambda x) \\ &= h(x) \exp(\lambda x) \end{aligned}$$

wobei  $h(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu u g^{(\nu)}(x)$ . Da  $a_0 \neq 0$ , ist  $h$  wiederum eine Polynomfunktion vom Grad  $k$ .  $\square$

Basierend darauf können wir nun folgenden Satz beweisen.

**Satz IX.5.4** Sei  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$  ein Polynom und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  paarweise verschiedene Nullstellen von  $P$  mit Vielfachheiten  $k_1, \dots, k_r$ . Dann bilden die Funktionen  $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\varphi_{jm}(x) := x^m \exp(\lambda_j x) \quad (1 \leq j \leq r, 0 \leq m < k_j)$$

ein Fundamentalsystem für die homogene lineare Differentialgleichung

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

$n$ -ter Ordnung.

*Beweis:* Wir zeigen zuerst, daß alle  $\varphi_{jm}$  Lösungen sind. Da  $\lambda_j$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $k_j$  ist, gilt

$$P(T) = Q_j(T)(T - \lambda_j)^{k_j}$$

für ein geeignetes Polynom  $Q_j$ . Es gilt dann, daß

$$P(D)\varphi_{jm}(x) = Q_j(D)(D - \lambda_j)^{k_j}(x^m \exp(\lambda_j x)) \stackrel{\text{IX.5.2}}{=} Q_j(D)((D^{k_j}x^m) \exp(\lambda_j x)) = 0$$

da  $m < k_j$ .

Wir zeigen nun, daß die  $\varphi_{jm}$  linear unabhängig sind. Eine Linearkombination der  $\varphi_{jm}$  hat die Gestalt

$$\sum_{j=1}^r g_j(x) \exp(\lambda x)$$

wobei  $g_j$  ein Polynom mit Grad  $< k_j$  ist. Für die lineare Unabhängigkeit müssen wir zeigen, daß die Linearkombination nur dann gleich der Nullfunktion ist, wenn alle  $g_j$  verschwinden. Wir zeigen dies durch Induktion über  $r$ .

Falls  $g_1(x) \exp(\lambda_1 x) = 0$ , dann ist  $g_1(x) = 0$ , da  $\exp(\lambda_1 x) \neq 0$ .

Wir nehmen als Induktionshypothese an, die Behauptung gelte für  $r$ . Angenommen  $\sum_{j=1}^{r+1} g_j(x) \exp(\lambda_j x) = 0$  gelte für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wenn eines der Polynome verschwindet, verschwinden auch die restlichen aufgrund der Induktionshypothese. Andernfalls, d.h. wenn alle  $g_j$  nicht verschwinden, wenden wir  $(D - \lambda_{r+1})^{k_{r+1}}$  auf die Gleichung an und erhalten aufgrund von Lemmata IX.5.2 und IX.5.3

$$\sum_{j=1}^r h_j(x) \exp(\lambda_j x) = 0$$

wobei die  $h_1, \dots, h_r$  wiederum Polynome sind, die nicht verschwinden. Dies ist aber nach Induktionshypothese nicht möglich. Also haben wir gezeigt, daß alle  $h_j$  verschwinden.  $\square$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo alle alle Koeffizienten  $a_i$  in

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + y = 0$$

reell sind. Wenn  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  eine komplexe Lösung ist, dann sind  $f_1$  und  $f_2$  reelle Lösungen. Wenn  $\lambda$  eine reelle Nullstelle des assoziierten Polynoms  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$  mit Vielfachheit  $k$  ist, dann trägt diese Nullstelle die reellen Lösungen

$$x^m \exp(\lambda x) \quad (0 \leq m < k)$$

bei. Wenn  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  eine echt komplexe Nullstelle von  $P$  ist, dann ist auch  $\bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$  eine echt komplexe Nullstelle von  $P$ . Außerdem haben dann  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  dieselbe Vielfachheit  $k$ . Die Nullstelle  $\lambda$  gibt Anlaß zu den reellen Lösungen

$$x^m \exp(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x) \quad \text{und} \quad x^m \exp(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x) \quad (0 \leq m < k)$$

wohingegen die Nullstelle  $\bar{\lambda}$  Anlaß gibt zu den Lösungen

$$x^m \exp(\lambda_1 x) \cos(-\lambda_2 x) \quad \text{und} \quad x^m \exp(\lambda_1 x) \sin(-\lambda_2 x) \quad (0 \leq m < k)$$

Es gilt aber

$$x^m \exp(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x) = x^m \exp(\lambda_1 x) \cos(-\lambda_2 x)$$

und

$$x^m \exp(\lambda_1 x) \sin(-\lambda_2 x) = -x^m \exp(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x)$$

woraus folgt, daß die lineare Hülle des Beitrags von  $\lambda$  zu den reellen Lösungen gleich der linearen Hülle des Beitrag von  $\bar{\lambda}$  zu den reellen Lösungen ist. Somit haben wir  $n$  reelle Lösungen gefunden, die den gesamten reellen Lösungsraum aufspannen und linear unabhängig sind, da der Lösungsraum nach Satz IX.3.3 Dimension  $n$  hat. Also bilden diese Funktionen ein Fundamentalsystem für die reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Aus diesen Überlegungen folgt folgender

**Satz IX.5.5** *Sei  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + y = 0$  eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$  das assoziierte Polynom. Dann ist ein Fundamentalsystem für die reellen Lösungen gegeben durch*

(1) *die Funktionen*

$$x^m \exp(\lambda x) \quad (0 \leq m < k)$$

*wobei  $\lambda$  eine reelle Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $k$  ist und*

(2) *die Funktionen*

$$x^m \exp(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x) \quad \text{und} \quad x^m \exp(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x) \quad (0 \leq m < k)$$

*wobei  $\lambda_1 + i\lambda_2$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $k$  ist und  $\lambda_2 > 0$ .*

Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten reellen Koeffizienten lassen sich also sämtlich Lösungen aus ganzzahligen Potenzen, Exponential- und Winkelfunktionen zusammensetzen, d.h. mithilfe elementarer Funktionen ausdrücken.

**Beispiel IX.5.6** (gedämpfte Schwingung)

*In der Physik betrachtet man folgende Differentialgleichung*

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

*wobei  $\omega_0 > 0$  und  $\mu \geq 0$ . Dabei wird  $2\mu$  als **Dämpfungsfaktor** bezeichnet. Wenn  $\mu = 0$ , dann ist*

$$x_1(t) = \cos \omega_0 t \quad x_2(t) = \sin \omega_0 t$$

*ein Fundamentalsystem für die entsprechende Differentialgleichung und somit können wir  $\omega_0$  als **Frequenz** der Schwingung auffassen.*

*Die Nullstellen des assoziierten Polynoms  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2$  sind*

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Wir unterscheiden nun die Fälle, wo  $\mu^2 - \omega_0^2$  echt kleiner, gleich oder echt größer 0 ist.

1. Fall :  $0 < \mu < \omega_0$

In diesem Fall haben wir zwei komplexe Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega$$

wobei  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ . Also haben wir das reelle Fundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = \exp(-\mu t) \cos(\omega t) \quad \varphi_2(t) = \exp(-\mu t) \sin(\omega t)$$

2. Fall :  $\mu = \omega_0$

Das Polynom besitzt die Nullstelle  $-\mu$  mit Vielfachheit 2. Also haben wir das reelle Fundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = \exp(-\mu t) \quad \varphi_2(t) = t \exp(-\mu t)$$

3. Fall :  $\mu > \omega_0$

Das Polynom hat die beiden reellen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

Da  $\mu > \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ , sind beide Nullstellen negativ. Wir schreiben  $\mu_j$  für  $-\lambda_j$ . Also haben wir das reelle Fundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = \exp(-\mu_1 t) \quad \varphi_2(t) = \exp(-\mu_2 t)$$

### Physikalische Interpretation

Bei kleiner Dämpfung (1. Fall) ergeben sich Schwingungen, deren Amplituden mit dem Faktor  $\exp(-\mu t)$  abnehmen, wobei sich die Frequenz von  $\omega_0$  zu  $\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$  verkleinert. Bei größerer Dämpfung (2. und 3. Fall) tritt keine Schwingung mehr auf.

Um Lösungen für inhomogene Probleme der Gestalt

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b$$

zu finden, kann man die Sätze IX.5.4 bzw. IX.5.5 mit Satz IX.3.6 kombinieren, da man  $P(D)y = b$  in folgendes inhomogene lineare System 1. Ordnung umschreiben kann

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= y_n \\ y'_n &= -a_{n-1}y_n + \cdots - a_1y_2 - a_0y_1 + b \end{aligned}$$

wobei natürlich  $y_1, \dots, y_n$  das System genau dann löst, wenn  $y_1$  die inhomogene Differentialgleichung löst und  $y'_k = y_{k+1}$  für  $1 \leq k < n$ .

Wenn nun  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Fundamentalsystem für das homogene System  $P(D)y = 0$  ist, dann bilden

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi'_1 \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi'_n \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das homogene lineare System 1. Ordnung. Somit ist die sogenannte *Wronski Matrix*

$$W(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

für alle  $x$  invertierbar und wir erhalten mit Satz IX.3.6

$$\psi(x) = W(x)u(x) \quad \text{wobei } u(x) = \int_{x_0}^x W(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} dt$$

als Lösung des inhomogenen Systems.

Wenn jedoch das Störglied  $b$  eine besondere Gestalt hat, kann man einfacher vorgehen, wie folgender Satz vorschlägt.

**Satz IX.5.7** Sei  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{C}$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion der Gestalt

$$b(x) = f(x) \exp(\lambda x)$$

wobei  $f$  ein Polynom vom Grad  $m$  mit komplexen Koeffizienten und  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $k$  ist. Wir lassen auch den Fall  $k = 0$  zu, wo  $\lambda$  keine Nullstelle von  $P$  ist. Der Fall  $k > 0$  wird als “Resonanzfall” bezeichnet.

Dann besitzt

$$P(D)y = b$$

eine Lösung der Gestalt

$$\psi(x) = h(x)x^k \exp(\lambda x)$$

wobei  $h(x)$  ein Polynom vom Grad  $m$  ist.

*Beweis:* Nach Voraussetzung gilt  $P(T) = Q(T)(T - \lambda)^k$  für ein Polynom  $Q$  mit  $Q(\lambda) \neq 0$ . Wir beweisen nun die Behauptung mit Induktion über  $m$ .

Im Fall  $m = 0$ , liegt eine Differentialgleichung der Gestalt

$$P(D)y = c \exp(\lambda x)$$

vor. Eine spezielle Lösung ist gegeben durch

$$\psi(x) = \frac{c}{k!Q(\lambda)} x^k \exp(\lambda x)$$

denn aufgrund der Lemmata IX.5.1 und IX.5.2 gilt

$$\begin{aligned} P(D)(x^k \exp(\lambda x)) &= Q(D)(D - \lambda)^k (x^k \exp(\lambda x)) \\ &= Q(D)(k! \exp(\lambda x)) \\ &= k!Q(\lambda) \exp(\lambda x) \end{aligned}$$

Wir nehmen als Induktionshypothese an, die Aussage gelte für  $m$ . Aufgrund der Lemmata IX.5.2 und IX.5.3 gilt, daß

$$\begin{aligned} P(D)(x^{m+k+1} \exp(\lambda x)) &= Q(D)(D - \lambda)^k (x^{m+k+1} \exp(\lambda x)) \\ &= Q(D) \left( \frac{(m+k+1)!}{(m+1)!} x^{m+1} \exp(\lambda x) \right) \\ &= g(x) \exp(\lambda x) \end{aligned}$$

wobei  $g$  ein Polynom vom Grad  $m + 1$  ist. Für ein geeignetes  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist dann  $f_1 = f - cg$  ein Polynom vom Grad  $m$ . Nach Induktionshypothese existiert ein Polynom  $h_1(x)$  vom Grad  $m$  mit

$$P(D)(h_1(x)x^k \exp(\lambda x)) = f_1(x) \exp(\lambda x)$$

Für  $h(x) = h_1(x) + cx^{m+1}$  gilt nun

$$P(D)(h(x)x^k \exp(\lambda x)) = (f_1(x) + cg(x)) \exp(\lambda x) = f(x) \exp(\lambda x)$$

Da  $h(x)$  ein Polynom vom Grad  $m + 1$  ist, haben wir die Behauptung für  $m + 1$  bewiesen.  $\square$

Dieser Satz erlaubt uns auch die Existenz reeller Lösungen nachzuweisen, wenn die Koeffizienten von  $P$  reell sind, denn, wenn  $\psi$  eine komplexe Lösung von  $P(D)y = b$  ist, dann ist der Realteil  $\Re(\psi)$  von  $\psi$  eine reelle Lösung von  $P(D)y = \Re(b)$  und der Imaginärteil  $\Im(\psi)$  von  $\psi$  eine reelle Lösung von  $P(D)y = \Im(b)$ .

**Beispiel IX.5.8** *Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = a \cos(\omega_0 t)$$

wobei  $\omega_0$  und  $a$  reell sind und  $\omega_0 > 0$ . Es genügt also eine komplexe Lösung für

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = a \exp(i\omega_0 t)$$

zu finden, da deren Realteil das ursprüngliche Problem löst.

Das assoziierte Polynom  $P(T) = T^2 + \omega_0^2$  hat die einfache Nullstelle  $i\omega_0$ . Aufgrund von Satz IX.5.7 hat das Problem eine Lösung der Gestalt  $\psi(t) = ct \exp(i\omega_0 t)$ . Wir bestimmen nun ein geeignetes  $c$  durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung. Es gilt

$$\psi'(t) = c \exp(i\omega_0 t) + i\omega_0 c t \exp(i\omega_0 t)$$

und somit

$$\psi''(t) = i\omega_0 c \exp(i\omega_0 t) + i\omega_0 c \exp(i\omega_0 t) - \omega_0^2 c t \exp(i\omega_0 t)$$

also

$$P(D)\psi(t) = 2i\omega_0 c \exp(i\omega_0 t)$$

Aus  $2i\omega_0 c \exp(i\omega_0 t) = a \exp(i\omega_0 t)$  folgt  $c = \frac{a}{2i\omega_0}$ . Die inhomogene Differentialgleichung  $P(D)\psi(t) = a \exp(i\omega_0 t)$  ist also erfüllt für die Funktion

$$\psi(t) = \frac{a}{2i\omega_0} t \exp(i\omega_0 t)$$

Also besitzt  $P(D)x = a \cos(\omega_0 t)$  die reelle Lösung

$$\varphi(t) = \Re(\psi(t)) = \frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Im Falle  $a \neq 0$  gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = \infty$ . Da alle Lösungen des homogenen Problems beschränkt sind, gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = \infty$  für beliebige Lösungen  $\varphi$  der Differentialgleichung  $P(D)x = a \cos(\omega_0 t)$ , sofern  $a \neq 0$ . Man nennt dieses Phänomen ‘‘Resonanzkatastrophe’’.

Wie wir in diesem Beispiel gesehen haben, bestimmt man die Koeffizienten des Polynoms  $h$ , dessen Existenz durch Satz IX.5.7 gewährleistet wird, durch Einsetzen von  $h(x)x^k \exp(\lambda x)$  in die Differentialgleichung  $P(D)y = b$ .

Für den reellen Fall lässt sich dieses Verfahren wie folgt formulieren.

**Satz IX.5.9** Sei  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion der Gestalt

$$b(x) = p(x) \exp(\alpha x) \cos(\beta x) \quad \text{bzw.} \quad b(x) = p(x) \exp(\alpha x) \sin(\beta x)$$

wobei  $p$  ein Polynom vom Grad  $m$  mit reellen Koeffizienten und  $\alpha + i\beta$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $k$  ist. Wir lassen auch hier den Fall  $k = 0$  zu, wo  $\alpha + i\beta$  keine Nullstelle von  $P$  ist.

Dann besitzt

$$P(D)y = b$$

eine Lösung der Gestalt

$$\psi(x) = x^k \cdot \exp(\alpha x) \cdot (\cos(\beta x)(A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0) + \sin(\beta x)(B_m x^m + \dots + B_1 x + B_0))$$

für geeignete reelle Zahlen  $A_i$  und  $B_j$ .

*Beweis:* Der Real- bzw. Imaginärteil der von Satz IX.5.7 garantierten Lösung von  $P(D)y = p(x) \exp((\alpha + i\beta)x)$  ist offensichtlich von der behaupteten Form.  $\square$

Wir illustrieren die Methode anhand des folgenden Beispiels.

**Beispiel IX.5.10** Wir betrachten die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y''' - 4y'' + 8y' - 8y + 4y = 4x^2$$

mit dem assoziierten Polynom

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - (1+i))^2(\lambda - (1-i))^2$$

In der allgemeinen Störfunktion  $b(x) = p(x) \cdot \exp(\alpha x) \cdot \cos(\beta x)$  ist  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  und  $p(x) = 4x^2$  zu setzen. Da  $\alpha + i\beta = 0$  keine Nullstelle des assoziierten Polynoms ist, d.h.  $k = 0$ , wählen wir gemäß Satz IX.5.9 den Ansatz

$$y(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$4A_2 \cdot x^2 + (-16A_2 + 4A_1) \cdot x + (16A_2 - 8A_1 + 4A_0) = 4x^2$$

woraus mit Koeffizientenvergleich folgt, daß  $A_2 = 1$ ,  $A_1 = 4$ ,  $A_0 = 4$ . Somit ist

$$y(x) = x^2 + 4x + 4$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

## Literatur

- [FLSW] Karl Graf Finck von Finckenstein, Jürgen Lehn, Helmut Schellhaas, Helmut Wegmann *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure* 2 Bde Teubner 2000.
- [For] O. Forster *Analysis* 3 Bde Vieweg Verlag.
- [HKW] P. Hauck, W. Küchlin und M. Wolff *Mathematik und für Informatik und Bioinformatik* Springer Verlag 2004. siehe auch <http://mfb.informatik.uni-tuebingen.de/book/>
- [HMV] A. Hoffmann, B. Marx, W. Vogt *Mathematik für Ingenieure* 2 Bde Pearson Studium 2006.
- [MV] K. Meyberg, P. Vachenauer *Höhere Mathematik* 2 Bde. Springer 1990.