Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
27.-31.05.10

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf"

Gruppenübung

Aufgabe G24 (Grundlegende Definitionen)
Betrachten Sie die folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

$$M_1 := \mathbb{R}\ , \qquad M_2 := \emptyset\ , \qquad M_3 := [a,b)\ ,$$
$$M_4 := \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\ ,$$
$$M_5 := \mathbb{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}\ ,$$
$$M_6 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1, \quad |x-1| < 2\}\ ,$$
$$M_7 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 < 4\}\ ,$$
$$M_8 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sin x\}\ .$$

(a) Kreuzen Sie diejenigen Eigenschaften an, die für die ensprechende Menge zutreffen.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_7	M_8
offen									
abgeschlossen									
kompakt									

(b) Geben Sie jeweils den Rand, das Innere und die abgeschlossene Hülle.

(c) Geben Sie alle Häufungspunkte der jeweiligen Menge an.

Hinweis: Es ist oft hilfreich sich die Menge durch eine Skizze zu veranschaulichen.

Aufgabe G25 (Einheitskugel)
Es sei V ein Vektorraum und $||\cdot||$ eine gegebene Norm. Dann ist $\overline{B_V} = \{x \in V : ||x|| \le 1\}$ die Einheitskugel in V.

(a) Skizzieren Sie die Einheitskugel bezüglich der Normen $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ im $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel abgeschlossen ist.

Aufgabe G26 (Normabschätzungen)

(a) Zeigen Sie, dass die in Beispiel VIII.1.3 beschriebenen Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$ im $\mathbb{R}^n$ die Bedingungen (N1), (N2) und (N3) erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ zwischen diesen Normen gelten:

$$||\cdot||_\infty \le ||\cdot||_1 \le n \cdot ||\cdot||_\infty \qquad \text{und} \qquad ||\cdot||_\infty \le ||\cdot||_2 \le \sqrt{n} \cdot ||\cdot||_\infty$$

Aufgabe G27 (Abschluss einer Menge)

Es gibt eine alternative Beschreibung des Abschlusses einer Menge: Der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge M ist die Menge aller möglichen Grenzwerte von Folgen mit Elementen in M. Formal bedeutet dies:

$$a \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, x_k \in M \; a = \lim_{k\to\infty} x_k$$

Zeigen Sie, dass diese Definition äquivalent zu der Definition der Vorlesung ist.

Hausübung

Aufgabe H25 (Normkonvergenz) (3 Punkte)

Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß eine Folge genau dann bezüglich $||\cdot||$ konvergiert, wenn sie bezüglich $||\cdot||_\infty$ konvergiert.

Aufgabe H26 (Stetigkeit) (3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$h(x,y) := \begin{cases} y + x\cos(1/y) & \text{falls } y \neq 0, \\ 0 & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$