Lagrangesche Polynominterpolation

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_{k,n}(x) \qquad L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Grad

$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \delta_{ki} = y_i \qquad L_{k,n}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} =: \delta_{ki}$ Kronecker Symbol

Bsp:

i	0	1	2
x_i	a	b	c
y_i	d	e	f

$n=2$

$L_{0,2} = \frac{x-b}{a-b}\cdot\frac{x-c}{a-c} \qquad L_{1,2} = \frac{x-a}{b-a}\cdot\frac{x-c}{b-c}$

$L_{2,2} = \frac{x-a}{c-a}\cdot\frac{x-b}{c-b} \qquad P_2(x) = d\cdot L_{0,2} + e\cdot L_{1,2} + f\cdot L_{2,2}$

Newtonsche Polynominterpolation

$$P_n(x) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1}) \qquad \gamma_i = \overbrace{f[x_0,\ldots,x_i]}^{i\text{-te dividierte Differenz}}$$

$$f[x_j,\ldots,x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1},\ldots,x_{j+k}] - f[x_j,\ldots,x_{j+k-1}]}{x_k - x_j}$$

Schema:

$$\begin{array}{c|l} x_0 & f[x_0] = y_0 \;(\gamma_0) \quad \to f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \;(\gamma_1) \quad \to f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \ldots \;(\gamma_n)\\ x_1 & f[x_1] = y_1 \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_n & f[x_n] = y_n \end{array}$$

Fehlerabschätzung

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n+1} \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{=:\,\omega(x)\ \text{Knotenpolynom}}$$

Restglied der Interpolation

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \ldots \leq \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \underbrace{(b-a)^{n+1}}_{\max_{x\in[a,b]}|\omega(x)|} \Rightarrow \text{Korollar}$$

Wenn Stützpunkte äquidistant ($x_i = a+ih$, $h=(b-a)/n$):

Tschebyscheffabszisse ($\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)|$ wird minimal)

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot 2^{-n}$$

Spline Interpolation $s \in S_{\Delta,l}$

Zerlegung $\Delta = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ Werte $y_i \in \mathbb{R}$ $i=0,\ldots,n$

Interpolationsbed. $s(x_i) = y_i$, $i=0,\ldots,n$

Lineare Splines

- stetig & auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ ein Polynom s_i vom Grad ≤ 1
- Interpolationsbed. $s_i(x_i) = y_i \quad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} y_{i+1} \quad \forall x\in[x_i,x_{i+1}] \Rightarrow s(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i(x),\ x\in[a,b]$$

$$P_i(x) \begin{cases} 0 & \text{falls } x < x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{falls } x\in[x_{i-1},x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{falls } x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0 & \text{falls } x > x_{i+1} \end{cases}$$

Fehlerabschätzung: $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\, h_{max}^2 \qquad h_{max} = \max (x_{i+1} - x_i)$

Kubische Splines

- s'' stetig & stückweise linear $s'' \in S_{\Delta,1}$, $s \in S_{\Delta,3}$

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i} M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$$

Randbedingungen (Rb):

Natürliche: $s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$

Hermite: $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$

$$\frac{h_0}{3}M_0 + \frac{h_0}{6}M_1 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a), \quad \frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

- strikte Diagonaldominantes tridiagonales Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & \\ & & \ddots & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad h_i = x_{i+1} - x_i$$

Natürliche Rb.: $b_0 = b_n = \lambda_0 = \lambda_n = 0 \quad \mu_0 = \mu_n = 1$

$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i, \quad c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$

Fehlerabschätzung kubischer Splines

$h_{max} = \max h_i \quad h_{min} = \min h_i$

Natürliche Rb ($f''(a) = f''(b) = 0$)

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|\, h_{max}^4 \;; \quad |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|\, h_{max}^{4-k} \quad k=1,2$$

Hermite Rb.

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|\, h_{max}^4 \;; \quad |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|\, h_{max}^{4-k} \quad k=1,2$$

Lineare Gleichungssysteme $Ax = b$

- Das LGS hat genau eine Lösung wenn gilt: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A,b)$ mit $\text{Rang}(B) = \text{Max}(r)$ der linearunabhängigen Zeilen/Spaltenvektoren $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$
- Das LGS hat eine eindeutige Lösung gdw. A invertierbar ist. $\det(A) \neq 0$
  $\Rightarrow x = A^{-1}b \to Ax = b$:= eindeutige Lösung

Gaußsche-Eliminationsverfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) = (A,b)$$

- Initialisierung $(A^1, b^1) = (A, b)$
- Pivotsuche
  - größte Wert in der Spalte $= r$ (Pivoelement) $a_{r1} \neq 0$
  - tausche so dass r an oberster Stelle
- Elimination
  - Subtrahiere geeignete Vielfache $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ · Zeile r
  - $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$
- Iteration wende obige Schritte für Untermatrix an $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{array}\right)$

$R := A^{(n)}$, $c := b^{(n)}$, $L := I + L^{(n)}$, $P = P^{n}\cdot\ldots\cdot P^{1}$ P^i = Permutation auf Einheitsmatrix

Vollständige Pivosuche

- größter Wert in der Matrix $= r$ (Pivoelement) Spalten & Zeilen vertauschung.
  $k \leq r \leq n$, $k \leq s \leq n$ mit $|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(k)}|$ $\quad (A^{(k+1)}, b^{(k+1)}) = L_k P_k (A^{(k)} Q_k, b^{(k)})$
  $Q = Q_1 \ldots Q_{n-1}$: Spaltenpermutat. $x = Qy$

$Ax = b \Leftrightarrow PAQy = Pb, x = Qy \Leftrightarrow PAQy = Pb \wedge x = Qy \Leftrightarrow L\underbrace{Ry}_{=z} = Pb,\ x = Qy$

Keine Pivosuche Notwendig:

- $A = A^T$ symmetrisch positiv definit: $x^TAx > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A ist strikt diagonaldominant $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1,\ldots,n$
- A ist eine M-Matrix $a_{ii} > 0$, $i = 1,\ldots,n$ $\quad a_{ij} \leq 0$, $i\neq j$ $\quad D^{-1}(A-D)$ hat EV vom Betrag < 1 ($D = \text{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$)

Cholesky-Verfahren

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\det(a_{11}) > 0$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \ldots$

- Test, dass positiv definit & Symmetrisch det. der Untermatrizen > 0

$LL^T = A \quad l_{jj} > 0 \qquad \tilde{L}\tilde{R} = A$ (eindeutige Dreieckszerlegung)

$Ly = b \quad L^Tx = y$

Für $j = 1\ldots n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \qquad l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

Für $i = j+1,\ldots,n$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\cdot l_{jk}}{l_{jj}} \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$$

- Abwandlung zum testen ob positiv definit
  Für $j = 1,\ldots,n$ $a = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$ Falls $a \leq 0 \Rightarrow$ nicht positiv definit $l_{jj} = \sqrt{a}$

Fehlerabschätzung & Rundungsfehler (Störeinfluss von Matrix & rechte Seite)

$\text{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

Kondition bestimmt Sensitivität bezüglich Störung von Matrix und rechter Seite

$Ax = b \quad (A+\Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq \left(\frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|\Delta A\|/\|A\|}\right)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$\Delta A = 0 \quad A(\tilde{x} - x) = \Delta b \quad \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

$\Delta b = 0 \quad (A+\Delta A)\tilde{x} = b \quad \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$

Nichtlineare Gleichungssysteme

$F(x) = 0 \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} : D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Newton-Verfahren

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar

- Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$
  Für $k = 0,1,\ldots$
  - Wenn $F(x^{(k)}) = 0$ STOP → Ergebnis $x^{(k)}$
  - Berechne Schritt $s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $\quad F'(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$
  - Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Konvergenz meist nur für Punkte welche nahe am 0 Punkt liegen

- Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$
  Für $k = 0,1,\ldots$
  - Wenn $F(x^{(k)}) = 0$ STOP → Ergebnis $x^{(k)}$
  - Berechne Schritt $s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $\quad F'(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$
  - Bestimme σ nach Armijo $\|F(x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)})\|_2^2 \leq \|F(x^{(k)})\|_2^2 \cdot (1 - 2\delta\sigma_k)$
    $\sigma \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ ($\delta = 10^{-3}$ gute wahl)

k	$x^{(k)}$	$-F(x^{(k)})$	$F'(x^{(k)})$	$s^{(k)}$	$x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$	$\|F(x^{(k+1)})\|_2^2$	$\leq$	$(1 - 2\cdot\delta\sigma_k)\cdot\|F(x^{(k)})\|_2^2$	σ_k	x^{k+1}

$s^{(k)} = -\frac{F(x^k)}{F'(x^k)} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$ Wenn σ immer 1 → lokale Newton $l = k$ abwählen σ immer 1 bleibt.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindimensionales

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

Numerische Integration

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

$I_n(f) = \int_a^b P_n(x)\,dx$

Newton-Cotes-Quadratur

Geschlossene ($x = a + sh$)

$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,n \quad h = \frac{b-a}{n} \qquad I_n(f) = h\cdot\sum_{i=0}^{n} a_{i,n} f(x_i)$

n	$a_{i,n}$	Name	Fehler
1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	Trapez	$(f^{(2)}(\xi)/12)\cdot h^3$
2	$\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$	Simpson	$(f^{(4)}(\xi)/90)\cdot h^5$
3	$\frac{3}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{3}{8}$	3/8 Regel	$(3f^{(4)}(\xi)/80)\cdot h^5$
4	$\frac{14}{45}$ $\frac{64}{45}$ $\frac{24}{45}$ $\frac{64}{45}$ $\frac{14}{45}$	Milne-Regel	$(8f^{(6)}(\xi)/945)\cdot h^7$

$\sum_{i=0}^{n} h a_{i,n} = b - a$

Exaktheit der Quadratur

$J(f) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_i)$ exakt vom Grad n, wenn alle Polynome von mindestens Grad n exakt integriert werden. d.h. $J(f) = I(f)$

Fehler: $E_n(f) := I(f) - I_n(f)$ mit $I(f)$ = exakte Lösung

Korollar $|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Offene

$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,n+1 \quad h = \frac{b-a}{n+2}$

n	$a_{i,n}$	
0	2	Rechteck Regel
1	$\frac{3}{2}$	
2	$\frac{8}{3}$ $-\frac{4}{3}$ $\frac{8}{3}$	

Anzahl Teilintervalle

$N = m\cdot n \quad H = \frac{b-a}{m} \quad h = \frac{H}{n}$

$x_i = a + ih \quad i = 0,\ldots,N$

$y_j = a + jH \quad j = 0,\ldots,m$

$I(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,dx$

Summierte

geschlossene Newton Cotes

$S_N^{(n)}(f) = h\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n} a_{i,n} f(x_{jn+i}) \qquad R_N^{(n)}(f) = I(f) - S_N^{(n)}(f) \Rightarrow$ Fehler

$$R_N^{(n)}(f) = \begin{cases} C(n) f^{(n+2)}(\xi)(b-a)h^{n+2} & \text{gerade } n \\ C(n) f^{(n+1)}(\xi)(b-a)h^{n} & \text{ungeraden } n \end{cases} \qquad f\in C^{n+2}([a,b])$$

S. Trapez (geschlossen $n=1$)

$S_N^{(n)}(f)\ \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_j) + f(x_{j+1})) \quad x_j = a + jh \quad R_N^{(n)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

S. Simpson (geschlossen $n=2$)

$S_N^{(n)}(f) = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})) \quad x_j = a + jh \quad R_N^{(n)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

S. Rechteck-Regel (offen, $n=0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$)

$\tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h\cdot\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) \quad x_j = a + jh \quad R_N^{(n)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$