→ Wird das H_0 ist wahr, dann abgelehnt ist höchstens α.
→ Wird von mind. $1-\alpha$ wo Ablehnen die richtige Entscheidung und somit H_0 zu mind. $1-\alpha$ falsch ist
→ Wenn H_0 nicht abgelehnt wird, ist keine Aussage über Wahrheit möglich.

Michael Schatz
Matr. 1576630

Testverfahren: $X_1, \dots X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma_0^2)$-verteilt (Erwartungswert)

Gauß-Test: → σ_0^2 bekannt.

a) $H_0: \mu = \mu_0$ b) $H_0: \mu \leq \mu_0$ c) $H_0: \mu \geq \mu_0$

Testgröße $T(X_1 \dots X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$

Ablehnung, falls a) $|T| > \mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$ b) $T > \mu_{1-\alpha}$ c) $T < \mu_\alpha$

→ bei Tests: α = Niveau

t-Test → σ^2 bekannt

a) $H_0: \mu = \mu_0$ b) $H_0: \mu \leq \mu_0$ c) $H_0: \mu \geq \mu_0$

Testgröße $T(X_1, \dots X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$

Ablehnung, falls a) $|T| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ b) $T > t_{n-1; 1-\alpha}$ c) $T < t_{n-1;\alpha}$

χ^2-Streuungstest: → μ unbekannt

a) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ b) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ c) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

Testgröße $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot S_{(n)}^2$

Ablehnung falls a) $T < \chi^2_{n-1; \frac{\alpha}{2}}$ oder $T > \chi^2_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ b) $T > \chi^2_{n-1, 1-\alpha}$

c) $T < \chi^2_{n-1;\alpha}$

Varianz / Erwartungswert

$\sin(x)$, $f'(x)$, $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$

Produktr. $uv = u'v + uv'$

Quotient $\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kette: $u(v) = u'(v)\, v'$
→ "innere mal äußere"

$lg(ab) = lg(a) + lg(b)$

$lg(\frac{a}{b}) = lg(a) - lg(b)$

$lg(a^b) = b \cdot lg(a)$

$lg(\sqrt[a]{b}) = \frac{lg(b)}{a}$

$ln(1) = 0$

$f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Partielle Integration:
$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$P(-a \leq X \leq a) = 0{,}9$
$\Leftrightarrow \Phi(a) - \Phi(-a) = 0{,}9$
$\Leftrightarrow \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 0{,}9$
$\Leftrightarrow \Phi(a) - 1 + \Phi(a) = 0{,}9$
$\Leftrightarrow 2\Phi(a) = 1{,}9$
$\Leftrightarrow \Phi(a) = 0{,}95$
$a = 1{,}645$

$P(-1 \leq Y \leq 1{,}8)$ $\mu = 2,\ \sigma^2 = 4,\ \sigma = 2$
$P(\frac{-1-\mu}{\sigma} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{1{,}8-\mu}{\sigma})$
$P(-\frac{3}{2} \leq \frac{Y-2}{2} \leq -\frac{1}{10})$
$\Phi(-\frac{1}{10}) - \Phi(-\frac{3}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{10}) - (1 - \Phi(\frac{3}{2}))$
$-\Phi(\frac{1}{10}) + \Phi(\frac{3}{2}) = -0{,}5398 + 0{,}9332$
$= 0{,}3934$

relativer Fehler $\left|\frac{\text{angen. Lösung} - \text{exakte Lösung}}{\text{exakte Lösung}}\right|$

exakter Fehler $|\text{exakte Lösung} - \text{angenäherte Lösung}|$

→ σ^2 liegt in $[4 \cdot 10^{-6}, 10^{-4}]$. Berechne scharfe obere Schranke für $P_{\sigma^2}(X \leq 0{,}32)$

$P_{\sigma^2}(X \leq 0{,}32) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0{,}32-\mu}{\sigma}) = P(\frac{X-0{,}33}{\sqrt{10^{-4}}} \leq \frac{-0{,}01}{\sqrt{10^{-4}}})$

$= P(\frac{X-0{,}33}{\sqrt{10^{-4}}} \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}$

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

a) $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 3t^2 dt = [t^3]_0^x = x^3 - 0^3 = \underline{x^3}$

$P(\frac{1}{2} < x < 1) = F(1) - F(\frac{1}{2}) = 1^3 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8} = \underline{0{,}875}$

b) $E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 3x^3 = [\frac{3}{4}x^4]_0^1 = \frac{3}{4}1^4 - \frac{3}{4}0^4 = \underline{\frac{3}{4}}$

c) $P(\frac{1}{2} < x < 1) = P(-\frac{1}{4} < x - \frac{3}{4} < \frac{1}{4}) = P(|X - E(X)| < \frac{1}{4})$
$= 1 - P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{4})$

Nach Tschebyscheff Ungl. gilt nun: $P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{4}) \leq \frac{Var(X)}{(\frac{1}{4})^2}$

$\Leftrightarrow P(|X - \frac{3}{4}| \geq \frac{1}{4}) \leq \frac{\frac{3}{80}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Somit ist $P(\frac{1}{2} < x < 1) \geq 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Steife Differentialgleichungen $y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

expl. Euler: $u_{j+1} = u_j + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_j = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\right) u_j = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} u_j$

impl. Euler: $u_{j+1} = u_j + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_{j+1} \Leftrightarrow u_{j+1} - \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_{j+1} = u_j$

$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\right) u_{j+1} = u_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} u_{j+1} = u_j$

$\Leftrightarrow u_{j+1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} u_j \Leftrightarrow u_{j+1} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} u_j$

Gegeben sei Quad.formel $Q(f) = \frac{b-a}{10}\left(f(a) + 4f(a + \frac{b-a}{3}) + 4f(b - \frac{b-a}{3}) + f(b)\right)$

Bis zu welchem Grad k zur Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ ist sie exakt?

Grad k=0: $f(x) = x^0 = 1$
$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1 = [x]_a^b = b - a$
$Q(f) = \frac{b-a}{10}(1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1) = b - a$

Es gilt $I(f) = Q(f)$ für alle Polynome vom Grad $k = 0$!

Grad k=1: $f(x) = x$
$I(f) = \int_a^b f(x) = \int_a^b x\, dx = [\frac{1}{2}x^2]_a^b = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$
$Q(f) = \frac{b-a}{10}\left(a + 4(a + \frac{b-a}{3}) + 4(b - \frac{b-a}{3}) + b\right)$ ...

MLS: $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3}{x\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{9}{2}(\theta - \ln x)^2) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Für den Fall $x > 0$ gilt:

$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{3}{x_i\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{9}{2}(\theta - \ln x_i)^2)$

$= 3^n \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp(-\frac{9}{2}\sum_{i=1}^n (\theta - \ln x_i)^2) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$

Logarithmieren ergibt $\ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \ln(3^n) + \ln((2\pi)^{-\frac{n}{2}}) + \ln(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) - \frac{9}{2}\sum_{i=1}^n (\theta - \ln x_i)^2$

$= \dots - \frac{9}{2}(\sum_{i=1}^n \theta^2 - 2\theta \ln x_i + (\ln x_i)^2) = \dots - \frac{9}{2}(\sum_{i=1}^n \theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2)$

$= \dots - \frac{9}{2} \cdot n \cdot \theta^2 + 9\theta\sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{9}{2}\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 =: g(\theta)$

Diese Funktion gilt es zu maximieren, also:

$0 = \frac{dg}{d\theta}$

$0 = -9n\theta + 9\sum_{i=1}^n \ln x_i$

$9n\theta = 9\sum_{i=1}^n \ln x_i$

$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i =: \hat{\theta}$

Prüfe auf Maximum:

$\left.\frac{d^2 g}{d\theta^2}\right|_{\theta = \hat{\theta}} = -9n < 0$

→ Somit ist $T_n(X_1, \dots X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer

Nachweis L-stabil: $S = \{q \in \mathbb{C} \mid |R(q)| < 1\} = \{q \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{1 + \frac{4}{3}q}{1 - \frac{5}{3}q}\right| < 1\}$
$= \{q \in \mathbb{C} \mid |1 + \frac{4}{3}q| < |1 - \frac{5}{3}q|\}$

Es gilt nun: $|1 + \frac{4}{3}q| < |1 - \frac{5}{3}q| \Leftrightarrow |1 + \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}bi|^2 < |1 - \frac{5}{3}a - \frac{5}{3}bi|^2 \Leftrightarrow (1 + \frac{4}{3}a)^2 + \frac{16}{81}b^2 < (1 - \frac{5}{3}a)^2 - \frac{25}{81}b^2$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{81}a^2 + \frac{16}{81}b^2 < 1 - \frac{10}{3}a + \frac{25}{81}a^2 + \frac{25}{81}b^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{81}a^2 + \frac{18}{3}a < \frac{9}{81}b^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{9}a^2 + 2a < \frac{1}{9}b^2$

$\Leftrightarrow -a^2 + 18a < b^2 \Leftrightarrow a(18 - a) < b^2$ Da $Re(q) = a < 0$ sein muss, ist der linke Term immer negativ.

Somit ist das Verfahren L-stabil!

Unabhängigkeit: unabhängig gdw. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ oder
$P(A \mid B) = P(A)$ oder
$P(B \mid A) = P(B)$

! Wenn $\neq$ dann sind A u. B abhängig

Michael Scholz
Matr. 1576630

Verteilung: Verteilungsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \ , \ x \in \mathbb{R}$

Bestimmung Verteilungsfunktion zu Zufallsvariable X^2: $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$
$= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

diskrete Verteilungen:

Geometrische Verteilung: $P(X = i) = (1-p)^{i-1} p \ , \ i = 1, 2, \ldots$

Binomialverteilung: $P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \ , \ i = 0, 1, \ldots, n$

$X \sim B(n,p) \Rightarrow E(X) = n \cdot p \ , \ Var(X) = np(1-p)$

Poissonverteilt: $P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \ , \ i = 0, 1, 2, \ldots \quad E(X) = \lambda \ , \ Var(X) = \lambda$

stetige Verteilung:

Rechteckverteilung: ($R(a,b)$-verteilt) Dichte: $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & , a < x < b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$

$\rightarrow Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Exponentialverteilt: Dichte: $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$

$\rightarrow Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \ , \ E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Normalverteilt: $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, $\rightarrow E(X) = \mu$, $\rightarrow Var(X) = \sigma^2$, $N(0,1)$ = Standard-Normalverteilung

Dichte: $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \ , \ t \in \mathbb{R}$

Verteilungsfunktion: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Erwartungswert: diskrete Verteilung: $E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$

stetige Verteilung: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

Rechenregeln: $E(aX) = aE(X) \mid E(aX+b) = aE(X) + b \mid E(h_1(X) + h_2(X)) = E(h_1(X)) + E(h_2(X))$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \mid Var(aX+b) = a^2 Var(X)$
$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$

Tschebyschevsche Ungleichung: $P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \ , \ c > 0$

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig, dann gilt $Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)$

Zentraler Grenzwertsatz: Ist $X_1, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu_i$, $Var(X_i) = \sigma_i^2$ so gilt: $\mu = \frac{1}{n} E(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n}(\mu_1 + \ldots + \mu_n)$, $\sigma^2 = \frac{1}{n^2} Var(X_1 + \ldots X_n) = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$

Konfidenzintervalle: Konfidenzniveau $= 1 - \alpha$ $\quad \overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_{(n)})^2$ ↳ empirische Varianz

Für μ bei bekannter Varianz $\sigma^2 = \sigma_0^2$: $I(X_1, \ldots, X_n) = \left[\overline{X}_{(n)} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \ , \ \overline{X}_{(n)} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$

$I(X_1, \ldots, X_n) = \left[\overline{X}_{(n)} - t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}} \ , \ \overline{X}_{(n)} + t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_{(n)}^2}{n}}\right]$ → Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2

Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem Erwartungswert $\mu = \mu_0$ → $I(X_1, \ldots X_n) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n; 1-\frac{\alpha}{2}}} \ , \ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n; \frac{\alpha}{2}}}\right]$

$I(X_1, \ldots X_n) = \left[\frac{(n-1) S_{(n)}^2}{\chi^2_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}} \ , \ \frac{(n-1) S_{(n)}^2}{\chi^2_{n-1; \frac{\alpha}{2}}}\right]$ ← Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem Erwartungswert

Michael Schutz
Matr. 1576630

Nichtlineare Gleichungssysteme:

Lokales Newton-Verfahren: Falls $F(x^{(k)}) = 0$ STOP mit Ergebnis $x^{(k)}$

$$s^{(k)} = \frac{-F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})} \quad \Big| \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

globalisiertes Newton-Verfahren: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)}$

Armijo-Regel: Wähle größtes $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..\}$ mit $\|F(x^{(k)} + \sigma_k s^{(k)})\|_2^2 \leq \|F(x^{(k)})\|_2^2 - 2\delta\sigma_k \|F(x^{(k)})\|_2^2$

→ Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar und F habe mind. eine reelle Nullstelle. Wenn F' in den Nullstellen von F nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.

→ Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar u. F habe mind. eine Nullstelle. Wenn F' in den Nullstellen nichtsingulär ist, dann gibt es zu jeder Nullstelle ein Intervall, sodass das lokale Newton-Verfahren für alle Startwerte aus diesem Intervall mind. superlinear konvergiert.

Anfangswertproblem:

$t_j = a + jh$, $h = \frac{b-a}{N}$, Diskretisierungsfehler: $e_j = y(t_j) - u_j$ allgemeine Form: $u_0 = y_0$, $u_{j+1} = u_j + h\phi(t_j, h, u_j, u_{j+1})$

BT → Verfahrensvorschrift

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

} 1. Zeile für k_1
} 2. Zeile für k_2

$$u_{j+1} = u_j + h \cdot (\tfrac{1}{4} k_1 + \tfrac{3}{4} k_2)$$

$$k_1 = f(t_j + \tfrac{1}{2} \cdot h, u_j + 0 \cdot hk_1 + 0 \cdot hk_2) = f(t_j + \tfrac{1}{2}h, u_j)$$

$$k_2 = f(t_j + \tfrac{1}{2}h, u_j + \tfrac{2}{3}hk_1 + 0\, hk_2) = f(t_j + \tfrac{1}{2}h, u_j + \tfrac{2}{3}hk_1)$$

explizites Euler-Verfahren: $u_0 = y_0 \mid u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j)$

implizites Euler-Verfahren: $u_0 = y_0 \mid u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1})$

Heun, erstes RK 2. Ordnung: $u_0 = y_0 \mid u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_j + hf(t_j, u_j)))$

RK4: $u_0 = y_0$

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(t_j, u_j)$$
$$k_2 = f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = f(t_{j+1}, u_j + hk_3)$$

Stabilitätsbetrachtung: Modellgleichung $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) < 0$

Stabilitätsfunktion: $u_{j+1} = R(q)u_j$ mit $q = \lambda h$ Stabilitätsgebiet $S = \{q \in \mathbb{C} \mid |R(q)| < 1\}$

Beispiel: $R(q) = \frac{(4+q)^2}{(4-q)^2} \to S = \{q \in \mathbb{C} \mid |R(q)| < 1\} = \left\{q \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{(4+q)^2}{(4-q)^2}\right| < 1\right\}$

$$= \{q \in \mathbb{C} \mid |(4+q)^2| < |(4-q)^2|\} = \{q \in \mathbb{C} \mid |4+q| < |4-q|\} \stackrel{?}{=} \{q \in \mathbb{C} \mid Re(q) < 0\}$$

Es gilt: $|4+q| < |4-q| \Leftrightarrow |4+q|^2 < |4-q|^2 \Leftrightarrow (4+a)^2 + b^2 < (4-a)^2 + b^2 \Leftrightarrow 16 + 8a + a^2 < 16 - 8a + a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 16a < 0 \Leftrightarrow Re(q) < a$ ⇒ Somit ist das Verfahren A-stabil

Eigenwerte / Eigenvektoren:

Vektoriteration: $z^{(k+1)} = \frac{Bz^{(k)}}{\|Bz^{(k)}\|}$ Rayleighquotient: $R(z^{(k)}, B) \frac{(z^{(k)})^H B z^{(k)}}{(z^{(k)})^H z^{(k)}}$ $H = -T$

Vektorit. nach v. Mises: Wahl $B = A$. Liefert betragsmäßig größten Eigenwert.

nach Wielandt: $z^{(k+1)} = \frac{\tilde{z}^{(k+1)}}{\|\tilde{z}^{(k+1)}\|}$ mit $\tilde{z}^{(k+1)} = (A - \mu I)^{-1} z^{(k)}$ → man braucht gute Näherung μ eines Eigenwertes λ_i

→ Spektrum von A = alle Eigenwerte von A.

Satz 7.1.4: Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ beliebig. Es gilt $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ mit $K_i := \left\{\mu \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\right\}$ $i = 1, \dots, n$

→ Ist die Vereinigung G_1 von k Gerschgorin-Kreisen disjunkt von der Vereinigung G_2 der restlichen $n-k$ G.-Kreisen, dann enthält G_1 genau k Eigenwerte u. G_2 genau $n-k$ Eigenwerte von A.

Komplexe Zahl: $z = a + b \cdot i$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Shift-Strategie im **QR**-Verfahren bringt höhere Konvergenzgeschwindigkeit des QR-Verfahrens

Lagemaßzahlen:

arithm. Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ **Median:** $\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n}{2})}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

p-Quantil: $x_p = \begin{cases} x_{(np)}, & \text{falls } np \text{ ganzzahlig} \\ x_{([np]+1)} & \text{falls } np \text{ nicht ganzzahlig} \end{cases}$ Runde auf nächste Ganzzahl auf

Streuungsmaße:

emp. Varianz: $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ Spannweite: $v = x_{(n)} - x_{(1)}$

emp. Streuung: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{s^2}$ Quartilsabstand: $q = x_{0.75} - x_{0.25}$

Zweidimensional:

emp. Kovarianz: $s_{xy} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ emp. Korrelationskoeffizient: $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$

↳ es gilt immer: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

Regressionsgerade: $y = \hat{a}x + \hat{b}$ mit $\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ und $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$

Kombinatorik:

Geordnete Probe mit Wiederholung ("Auswahl mit zurücklegen"): n^k Bsp: 3x Würfeln: $6^3 = 216$ Möglichkeiten

Geordnete Probe ohne Wiederholung ("Auswahl ohne zurücklegen"): $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Ungeordnete Probe ohne Wiederholung: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: A unter Bedingung B: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Formel v. Bayes: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$

Michael Scholz
Matr. 1576630

Polynominterpolation:
→ Ein Interpolationspolynom p_n, das die Interpolationsbedingung erfüllt, existiert immer, ist aber nicht immer eindeutig.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	3	4

Lagrange: $L_{0,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ $\quad L_{1,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad \Rightarrow p_2(x) = y_0 \cdot L_{0,2}(x) + y_1 \cdot L_{1,2}(x) + y_2 \cdot L_{2,2}(x)$

Newton:

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$
$\quad \frac{3-1}{1-0} = 2$
$x_1 = 1 \quad y_1 = 3 \qquad \frac{\frac{1}{2}-2}{3-0} = -\frac{1}{2}$
$\quad \frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}$
$x_2 = 3 \quad y_2 = 4$

$\Rightarrow p_2(x) = 1 + 2(x-x_0) + (-\frac{1}{2})(x-x_0)(x-x_1) = 1 + 2(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)(x-1)$

Fehler: $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \le \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Tschebyscheffabszissen: $x_i = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad i = 0,\dots,n$

Lineare Splines: Zu jeder Zerlegung Δ von $[a,b]$ u. Werten existiert genau ein interpolierender linearer Spline.

$s(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$ mit $\ell_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{falls } x\in[x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{falls } x\in[x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{falls } x > x_{i+1} \end{cases}$

Fehler: $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \le \frac{1}{8}\max_{x\in[a,b]} |f''(x)| h_{max}^2$ mit $h_{max} = \max_{i=0,\dots,n-1} x_{i+1} - x_i$

Kubische Splines: M_i bestimmen → c_i bestimmen → d_i bestimmen → s_i bestimmen

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 = 0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ b_n = 0 \end{pmatrix}$$

$c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i) \quad | \quad h_i = x_{i+1} - x_i$

$d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i$

$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i} M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$

1. Natürliche Randbedingung: $s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$, $\mu_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$

Fehler: $|f(x) - s(x)| \le \frac{h_{max}}{h_{min}} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4$

2. Hermite Randbedingung: $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, also $\frac{h_0}{3}M_0 + \frac{h_0}{6}M_1 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a)$,

$\frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$ $\quad$ Fehler: $|f(x) - s(x)| \le \frac{5}{384}\sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4$

Numerische Integration:
→ Eine Integrationsformel $J(f)$ zur num. Appr. heisst exakt vom Grad n, falls sie alle Polynome bis mind. Grad n exakt integriert.

Geschlossene Newton-Cotes-Formel: $x_i = a + ih, \ i = 0,\dots,n, \ h = \frac{b-a}{n}$ $\quad I_n(f) = h\sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} f(x_i)$

n	$\alpha_{i,n}$				Fehler	Name
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}h^3$	Trapezregel
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	Simpson-Regel
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5$	$\frac{3}{8}$-Regel

Fehler: $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_n(x)\,dx\right| \le$ Fehler aus Tabelle

Offene Newton-Cotes-Formel: $\tilde{I}_n(f) = h\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$

n	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			Fehler	
0	2			$\frac{f^{(2)}(\xi)}{3}h^3$	→ Rechteck-Regel
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3f^{(2)}(\xi)}{4}h^3$	
2	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{28f^{(4)}(\xi)}{90}h^5$	

$N = m\cdot n, \ H = \frac{b-a}{m}, \ h = \frac{b-a}{m\cdot n}, \ x_i = a + ih$

Summierte Trapezregel: $n = 1$

$S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_j) + f(x_{j+1})), \quad x_j = a + jh$

Fehler: $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

Summierte Simpson-Regel: $n = 2$ $\quad S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{m-1}(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})), \quad x_j = a + jh$ $\quad$ Fehler: $R_N^{(2)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

Summierte Rechteck-Regel: $n = 0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$ $\quad \tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h\sum_{j=1}^m f(x_{2j-1}), \quad x_j = a + jh$ $\quad$ Fehler: $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

Lineare Gleichungssysteme:
Das LGS hat eine Lösung gdw. $\text{rang}(A) = \text{rang}(A, b)$. Das LGS hat eine eindeutige Lösung gdw. A invertierbar (gleichbedeutend mit $\det(A) \ne 0$). Lösung lautet dann $x = A^{-1}b$

Matrizen, die keine Pivotsuche brauchen: $A = A^T$ ist symmetrisch positiv definit. A ist strikt diagonaldominant = Beträge auf Diagonalen sind jeweils größer als Summe der Beträge der restlichen Zeile. A ist M-Matrix.

Cholesky-Verfahren: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (sym) positiv definit, dann gibt es eine eindeutige Cholesky-Zerlegung. Das Ch.-Verf. kann bei sym. Matrizen als Test auf positive Definitheit verwendet werden.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2} \quad \ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}}$

→ Cholesky Verfahren nutzt Symmetrie und braucht deshalb nur etwa die Hälfte der Operationen gegenüber Gauß.

Konditionszahl: $\text{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \le \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|\Delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$

$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \le \text{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ ←→ nur rechte Seite gestört

$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$ ←→ nur linke Seite gestört

Zum Lösen von $Ax = b$
1. Löse $Ly = b$
2. Löse $L^T x = y$

$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$ induziert $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ induziert $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (Spaltensummennorm)

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ induziert $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (Zeilensummennorm)