Zahl der x_i mit $x_i < Z$ $\max\{i \mid x_i < z\}$

Beispiel:

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	3	4

$n = 2$

Lagrange

$$\sum_{k=0}^{n} y_k L_{k,n}(x) \quad \text{mit } L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$L_{0,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3} \qquad L_{1,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-3)}{-2}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{x(x-1)}{6} \qquad p_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{3} + 3 \cdot \frac{x(x-3)}{-2} + 4 \cdot \frac{x(x-1)}{6}$$

Fehlerabschätzung (Korollar 2.1.3)

$$\underbrace{\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|}_{\text{Fehler}} \leq \underbrace{\max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}_{\text{obere Schranke}}$$

Newton

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}), \quad y_i = f[x_0, \ldots, x_i]$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l|l}
x_0 = 0 & f[x_0] = \boxed{y_0 = 1} \\
x_1 = 1 & f[x_1] = y_1 = 3 \\
x_2 = 3 & f[x_2] = y_2 = 4
\end{array}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{3-1}{1-0} = \boxed{2 = y_1} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{1}{2} - 2}{3 - 0} = \boxed{-\frac{1}{2} = y_2}$$

$$p_2(x) = 1 + 2(x - \overset{x_0}{0}) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - \overset{x_0}{0})(x - \overset{x_1}{1})$$

lineare Splines

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

→ Idee: Verbinde gegebenen Punkte des Graphen mit Linien

Fehler: $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| h_{max}^2$ mit $h_{max} = \max_{i=0,\ldots,n-1} (x_{i+1} - x_i)$

kubische Splines

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1} - x)^3}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1}\right) + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad d_i = y_i = \frac{h_i^2}{6} M_i \qquad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

a) natürliche Randbedingungen: $s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$, $\mu_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$

b) hermitische Randbedingungen: $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, also

$$\frac{h_0}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a), \quad \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n - y_{n+1}}{h_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix}
\overset{(1)}{\mu_0} & \overset{(0)}{\lambda_0} & 0 & 0 \\
\frac{h_0}{6} & \frac{h_0 + h_1}{6} & \frac{h_1}{6} & 0 \cdots \\
 & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1} + h_i}{3} & \frac{h_i}{6} \\
\vdots & & \ddots & \ddots \\
0 & 0 & \underset{(0)}{\lambda_n} & \underset{(1)}{\mu_n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_0 = (0) \\
\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\
\vdots \\
\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \\
\vdots \\
b_n = (0)
\end{pmatrix}$$

Gaußsches-Eliminierungsverfahren:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \boxed{2} & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P_2 P_1 = \underset{P_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{P_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$LR = PA$$

Matrizen, die keine Pivotsuche erfordern:

- $A = A^T$ ist symmetrisch positiv definit, also $x^T A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A ist strikt diagonaldominant, d.h. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1, \ldots, n$
- A ist M-Matrix, d.h. die Beträge aller Eigenwerte sind < 1.

Integration (3.1) normal und

Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_i) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{mit } \alpha_{i,n} = \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{s - j}{i - j} \, ds$$

n	$\alpha_{i,n}$					Name
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$			Simpsons-Regel
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$		3/8-Regel
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$	Milne-Regel

Offene Newton-Cotes-Quadratur

$$\tilde{I}_n(f) = h \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$$

$$\text{mit } \tilde{\alpha}_{i,n} = \int_0^{n+2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{s - j}{i - j} \, ds$$

n	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			Name
0	2			Rechteck-Regel
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		
2	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	

→ Fehlerabschätzung wie bei Lagrange/Newton oben (→ Korollar 2.1.3)

summiert

Summierte Newton-Cotes-Formel: $N = m \cdot n$, $H = \frac{b-a}{m}$, $h = \frac{H}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N$

$y_j = a + jH$, $j = 0, \ldots, m$

$$S_N^{(n)}(f) = h \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_{jn+i}) \quad \text{mit } \alpha_{i,n} \text{ aus Tabelle (3.1) oben.}$$

Summierte Trapezregel ($n = 1$): $S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_j) + f(x_{j+1}))$, $x_j = a + jh$ Fehler: $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

Summierte Simpsons-Regel ($n = 2$): $S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}))$, $x_j = a + jh$ Fehler: $-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

Summierte Rechteck-Regel ($n = 0, 2m = N, h = \frac{b-a}{N}$): $\tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h \sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})$, $x_j = a + jh$ Fehler: $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

Zahl der x_i mit $x_i < z$ $\max\{i \mid x_i < z\}$?

Lagrange

$$\sum_{k=0}^{n} y_k L_{k,n}(x) \quad \text{mit} \quad L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Beispiel:

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	3	4

$n = 2$

$$L_{0,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3} \qquad L_{1,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-3)}{-2}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{x(x-1)}{6} \qquad p_2(x) = 1\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{3} + 3\cdot\frac{x(x-3)}{-2} + 4\cdot\frac{x(x-1)}{6}$$

Fehlerabschätzung Korollar 2.1.3)

$$\underbrace{\max_{x\in[a,b]} |f(x)-p_n(x)|}_{\text{Fehler}} \le \underbrace{\max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{obere Schranke}}$$

Newton

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1}), \quad y_i = f[x_0,\ldots,x_i]$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l|l}
x_0 = 0 & f[x_0] = \boxed{y_0 = 1} \\
x_1 = 1 & f[x_1] = y_1 = 3 \\
x_2 = 3 & f[x_2] = y_2 = 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
f[x_0,x_1] = \frac{3-1}{1-0} = \boxed{2 = y_1} \\
f[x_1,x_2] = \frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}
\end{array}
\quad
f[x_1,x_2,x_3] = \frac{\frac{1}{2}-2}{3-0} = \boxed{-\frac{1}{2} = y_2}$$

$$p_2(x) = 1 + 2(x-\overset{x_0}{0}) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-\overset{x_0}{0})(x-\overset{x_1}{1})$$

lineare Splines

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} y_{i+1} \quad \forall x\in[x_i,x_{i+1}]$$

→ Idee: Verbinde gegebenen Punkte des Graphen mit Linien

Fehler: $\max_{x\in[a,b]} |f(x)-s(x)| \le \frac{1}{8}\max_{x\in[a,b]} |f''(x)| h_{max}^2$ mit $h_{max} = \max_{i=0,\ldots,n-1}(x_{i+1}-x_i)$

kubische Splines

$$s_i(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i} M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$$

$$h_i = x_{i+1}-x_i \qquad d_i = y_i = \frac{h_i^2}{6} M_i \qquad c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)$$

a) natürliche Randbedingungen: $s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$, $\mu_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$

b) hermitische Randbedingungen: $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, also

$$\frac{h_0}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a), \qquad \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n - y_{n+1}}{h_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix}
\overset{(1)}{\mu_0} & \overset{(0)}{\lambda_0} & 0 & 0 \\
\frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{6} & \frac{h_1}{6} & 0 \cdots \\
\ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} \\
\vdots & & \ddots & \ddots \\
0 & 0 & \underset{(0)}{\lambda_n} & \underset{(1)}{\mu_n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_0 = (0) \\
\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\
\vdots \\
\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\
\vdots \\
b_n = (0)
\end{pmatrix}$$

Gaußsches-Eliminierungsverfahren:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \boxed{2} & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P_2 P_1 = \underset{P_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{P_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$LR = PA$

Matrizen, die keine Pivotsuche erfordern:

- $A = A^T$ ist symmetrisch positiv definit, also $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A ist strikt diagonaldominant, d.h. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1,\ldots,n$
- A ist M-Matrix, d.h. die Beträge aller Eigenwerte sind < 1.

Integration (3.1) normal und

Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

$$I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_i) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

mit $\alpha_{i,n} = \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\, ds$

n	$\alpha_{i,n}$					Name
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$			Simpsons-Regel
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$		3/8-Regel
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$	Milne-Regel

Offene Newton-Cotes-Quadratur

$$\tilde{I}_n(f) = h\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$$

mit $\tilde{\alpha}_{i,n} = \int_0^{n+2} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{s-j}{i-j}\, ds$

n	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			Name
0	2			Rechteck-Regel
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		
2	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	

→ Fehlerabschätzung wie bei Lagrange/Newton oben (→ Korollar 2.1.3)

Summiert

Summierte Newton-Cotes-Formel: $N = m\cdot n$, $H = \frac{b-a}{m}$, $h = \frac{H}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,N$

$i = a + jH$, $j = 0,\ldots,m$

$$S_N^{(n)}(f) = h\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_{jn+1})$$ mit $\alpha_{i,n}$ aus Tabelle (3.1) oben.

Summierte Trapezregel ($n=1$): $S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left(f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$, $x_j = a + jh$ Fehler: $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

Summierte Simpsons-Regel ($n=2$): $S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{m-1}\left(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\right)$, $x_j = a + jh$ Fehler: $-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

Summierte Rechteck-Regel ($n = 0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$): $\tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})$, $x_j = a + jh$ Fehler: $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

Bild der x_i mit $x_i \in \mathbb{Z}$ … Max … Jacobi-Matrix

Lagrange

$$\sum_{k=0}^{n} y_k L_{k,n}(x) \quad \text{mit } L_{k,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Beispiel

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	3	4

$n = 2$

$$L_{0,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3} \qquad L_{1,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-3)}{-2}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{x(x-1)}{6} \qquad p_2(x) = 1\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{3} + 3\cdot\frac{x(x-3)}{-2} + 4\cdot\frac{x(x-1)}{6}$$

Newton

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1}), \quad \gamma_i = f[x_0,\ldots,x_i]$$

Beispiel

$x_0 = 0 \mid f[x_0] = \boxed{y_0 = 1}$

$x_1 = 1 \mid f[x_1] = y_1 = 3$

$x_2 = 3 \mid f[x_2] = y_2 = 4$

$$f[x_0,x_1] = \frac{3-1}{1-0} = \boxed{2 = \gamma_1} \qquad f[x_1,x_2] = \frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\frac{1}{2}-2}{3-0} = \boxed{-\frac{1}{2} = \gamma_2}$$

$$p_2(x) = 1 + 2(x-\overset{x_0}{0}) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-\overset{x_0}{0})(x-\overset{x_1}{1})$$

lineare Splines

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} y_{i+1} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

→ lineare Verbindung zwischen Punkte aus Beispiel mit Linien

$$\text{Fehler: } \max_{x\in[a,b]} |f(x)-s(x)| \le \frac{1}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\, h_{max}^2 \quad \text{mit } h_{max} = \max_{i=0,\ldots,n-1} (x_{i+1}-x_i)$$

Abschätzung Fehler $f \in C^{n+1}[a,b]$:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-p_n(x)| \le \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

kubische Splines

$$s(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{(x_{i+1}-x)^3}{x_{i+1}-x_i} M_i + \frac{(x-x_i)^3}{x_{i+1}-x_i} M_{i+1}\right) + c_i(x-x_i) + d_i$$

$$h_i := x_{i+1}-x_i \qquad d_i = y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \qquad c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)$$

a) natürliche Randbedingungen: $s''(a) = s''(b) = 0$, also $M_0 = M_n = 0$, $\mu_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$

b) hermitische Randbedingungen: $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, also

$$\frac{h_0}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 = \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a), \qquad \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} = f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} \overset{(1)}{\mu_0} & \overset{(0)}{\lambda_0} & 0 & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{6} & \frac{h_1}{6} & 0 \ \cdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \underset{(0)}{\lambda_n} & \underset{(1)}{\mu_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 = (0) \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \\ b_n = (0) \end{pmatrix}$$

Gaußsches-Eliminierungsverfahren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \boxed{2} & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$LR = PA$

Matrizen, die keine Pivotsuche erfordern:

- $A = A^T$ ist symmetrisch positiv definit, also $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A ist strikt diagonaldominant, d.h. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1,\ldots,n$
- A ist M-Matrix, d.h. die Beträge alle Eigenwerte sind < 1.

Integration

Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_i) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{mit } \alpha_{i,n} = \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\, ds$$

(2.1)

n	$\alpha_{i,n}$					Name
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$			Simpsons-Regel
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$		3/8-Regel
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$	Milne-Regel

Offene Newton-Cotes-Quadratur

$$\tilde{I}_n(f) = h \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{i,n} f(x_i)$$

$$\text{mit } \tilde{\alpha}_{i,n} = \int_0^{n+2} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{s-j}{i-j}\, ds$$

n	$\tilde{\alpha}_{i,n}$			Name
0	2			Rechteck-Regel
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		
2	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	

→ Fehlerabschätzung wie bei Lagrangepolynomen oder (→ Vorlesung 2.1.2)

Summierte

Summierte Newton-Cotes-Formel: $N = m\cdot n$, $H = \frac{b-a}{m}$, $h = \frac{H}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,N$; $y_j = a + jH$, $j = 0,\ldots,m$

$$S_N^{(n)}(f) = h \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n} f(x_{jn+i}) \quad \text{mit } \alpha_{i,n} \text{ aus Tabelle (2.1) oben}$$

Summierte Trapezregel ($n=1$): $S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \left(f(x_j) + f(x_{j+1})\right)$, $x_j = a + jh$ Fehler $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

Summierte Simpsons-Regel ($n=2$): $S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{m-1} \left(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\right)$, $x_j = a + jh$ Fehler $-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

Summierte Rechteck-Regel ($n=0$, $2m = N$, $h = \frac{b-a}{N}$): $\tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h \sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1})$, $x_j = a + jh$ Fehler $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

Cholesky-Verfahren Berechnet eine Zerlegung $LL^T=A$

Für $j=1,\dots,n$

$$l_{jj}=\sqrt{a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Für $i=j+1,\dots,n$

$$l_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}l_{ik}}{l_{jj}}$$

Berechne die Werte der Reihe nach

$$L=\begin{pmatrix}1&&\\2&4&\\3&5&6\end{pmatrix}$$

→ um Verfahren anwenden zu können, muss die Matrix positiv definit sein. gdw. alle Eigenwerte der Hauptminoren >0.

Jacobi-Matrix

$$F'(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x)&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots&&\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x)&\cdots&\frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}$$

Normen

$\|x\|_2=\sqrt{x^Tx}$ induziert $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$ induziert $\|A\|_1=\max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$ (Spaltensummennorm)

$\|x\|_\infty=\max_{i=1,\dots,n}|x_i|$ induziert $\|A\|_\infty=\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$ (Zeilensummennorm)

$\text{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ **Konditionszahl**

Newton Wähle Startpunkt $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$

Für $k=0,1,\dots$

1. Falls $F(x^{(k)})=0$ Stop mit Ergebnis $x^{(k)}$
2. Berechne den Newton-Schritt $s^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ durch lösen der Newton Gleichung.
$$F'(x^{(k)})s^{(k)}=-F(x^{(k)})$$
3. setze $x^{(k+1)}=x^{(k)}+s^{(k)}$ lokales Verfahren

oder

$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\sigma_k s^{(k)}$ globales Verfahren

Störungseinfluss von Matrix u. rechte Seite:

$$\frac{\|\hat{x}-x\|}{\|x\|}\le\frac{\text{cond}(A)}{1-\text{cond}(A)\cdot\|\Delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

es müssen nicht beide Störungen auftreten

$\Delta A\rightarrow$ gestörte Matrix

$\Delta b\rightarrow$ gestörter Vektor

wobei das σ_k mittels Armijo-Regel gewählt wird: Sei $\delta\in\,]0,\frac{1}{2}[$ (gute Wahl z.B. 10^{-3}) fest gegeben. Wähle das größte $\sigma_k\in\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots\}$ mit $\|F(x^{(k)}+\sigma_k s^{(k)})\|_2^2\le\|F(x^{(k)})\|_2^2-2\delta\sigma_k\|F(x^{(k)})\|_2^2$.

$h=\frac{b-a}{N}$ $t_j=a+jh$ Diskretisierungsfehler: $e_j=y(t_j)-u_j$

Euler: (explizit) $u_0=y_0$

$u_{j+1}=u_j+hf(t_j,u_j)$, $j=0,\dots,N-1$

Heun: $u_0=y_0$

$u_{j+1}=u_j+\frac{h}{2}(f(t_j,u_j)+f(t_{j+1},u_j+hf(t_j,u_j)))$

mit $j=0,\dots,N-1$

Runge-Kutta 4. Ordnung (RK4)

$u_0=y_0$

$u_{j+1}=u_j+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$, $j=0,\dots,N-1$

mit $k_1=f(t_j,u_j)$

$k_2=f(t_j+\frac{h}{2},u_j+\frac{h}{2}k_1)$

$k_3=f(t_j+\frac{h}{2},u_j+\frac{h}{2}k_2)$

$k_4=f(t_{j+1},u_j+hk_3)$

Beispiel: $h=\frac{1}{2}$, $y'(t)=2y-e^t$ $y(0)=2$ Intervall $[0,1]$

$u_{j+1}=u_j+h(2u_j-e^{t_j})=u_j+h2u_j-he^{t_j}=(1+2h)u_j-he^{t_j}$

allgemeine Form: $u_0=y_0$ und $u_{j+1}=u_j+h\underbrace{\phi(t_j,h;u_j,u_{j+1})}_{\text{Verfahrensfunktion}}$, $j=0,\dots,N-1$

r-stufiges explizite Runge-Kutta-Verfahren

→ bei impliziten Verfahren läuft Summe in k_i bis r

$k_i=f(t+\gamma_i h,u+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}k_j)$ $i=1,\dots,r$ | $\phi(t,h;u)=\sum_{i=1}^r\beta_i k_i$

Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccccc}\gamma_1&0&&&&\\ \gamma_2&\alpha_{21}&0&&&\\ \gamma_3&\alpha_{31}&\alpha_{32}&0&&\\ \vdots&\vdots&&\ddots&&\\ \gamma_r&\alpha_{r1}&\dots&&\alpha_{r,r-1}&0\\ \hline &\beta_1&\beta_2&\dots&\beta_{r-1}&\beta_1\end{array}$$

Beispiel: $y'(t)=ty(t)$, $y(0)=1$

$$\begin{array}{c|cc}0&0&\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\ \hline &\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}$$

$k_1=f(t,u)=tu$

$k_2=f(t+\frac{2}{3}h,u+\frac{2}{3}k_1)$

$=(t+\frac{2}{3}h)(1+\frac{2}{3}ht)u$

$\phi(t,h,u)=\frac{1}{4}tu+\frac{3}{4}(t+\frac{2}{3}h)(1+\frac{2}{3}ht)u$

$=(t+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}ht^2+\frac{1}{3}h^2t)u$

$\hookrightarrow u_{j+1}=u_j+h\phi(t,h,u)$

$=(1+ht_j+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h^2t_j^2+\frac{1}{3}h^3t_j)u_j$

Modellgleichung: $y'=\lambda y$, $y(0)=1$, mit $y\in\mathbb{C}$, $Re(\lambda)<0$.

Lösung ist $y(t)=e^{\lambda t}$ $\lim_{t\to\infty}y(t)=0$

Ein Verfahren heisst **A-Stabil**, wenn seine Anwendung auf das Modellproblem für jede Schrittweite $h>0$ eine Folge $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ produziert mit $|u_{j+1}|\le|u_j|$ $\forall j\ge0$. **L-Stabil**, wenn A-Stabil und $\lim_{j\to\infty}u_j=0$.

Bei vielen Verfahren gilt bei Anwendung auf das Modellproblem $u_{j+1}=R(q)u_j$ mit $q=\lambda h$. R heisst hierbei **Stabilitätsfunktion**.

Es gilt: A-Stabil $\leftrightarrow$ $|R(q)|\le1$ $\forall q\in\mathbb{C}$, $Re(q)<0$ | L-Stabil $|R(q)|<1$ $\forall q\in\mathbb{C}$, $Re(q)<0$ $\leftrightarrow$ $S\supset\{q\in\mathbb{C}: Re(q)<0\}$

Gershgorin-Kreise:

$\sigma(A)\subset\bigcup_{i=1}^n K_i$ $K_i=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu-a_{ii}|\le\sum_{j=1, j\ne k}^n|a_{ij}|\}$, $i=1,\dots,n$

$$A=\begin{pmatrix}4+5i&2&-i&3+4i\\0&0&1&3\\0&-1&0&1\\0&0&0&12\end{pmatrix}$$

$K_1=\{\mu\in\mathbb{C}\,|\,|\mu-a_{11}|\le\underbrace{|2|}_{\sqrt{2^2}=2}+\underbrace{|-i|}_{\sqrt{(-1)^2}=1}+\underbrace{|3+4i|}_{\sqrt{3^2+4^2}=5}\}$

$K_1=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu-4-5i|\le8\}$

Satz 7.15: Sei $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ diagonalisierbar, dann gilt für jede Matrix $\Delta A\in\mathbb{C}^{n,n}$:

$$\forall\mu\in\sigma(A+\Delta A):\min_{i=1,\dots,n}|\mu-\lambda_i|\le\text{cond}_2(T)\|\Delta A\|_2$$

Vektoriteration nach von Mises

$z^{(k+1)}=\frac{Az^{(k)}}{\|Az^{(k)}\|_\infty}$ $k=0,1,\dots$ $R(z^{(k)},A)=\frac{(z^{(k)})^TAz^{(k)}}{(z^{(k)})^Tz^{(k)}}$ also $\frac{(\dots)(\vdots)}{(\dots)(\vdots)}$

$R(z^{(k)},A)$ ergibt Näherung des Eigenwerts

→ schnelle Konvergenz des Rayleigh-Quotienten gegen Eigenwert, wenn die Matrix symmetrisch ist.

von Wielandt:

$z^{(k+1)}=\frac{\hat{z}^{(k+1)}}{\|\hat{z}^{(k+1)}\|_\infty}$ mit $\hat{z}^{(k+1)}=(A-\mu I)^{-1}z^{(k)}$

$\Leftrightarrow$ löse $(A-\mu I)\hat{z}^{(k+1)}=z^{(k)}$

$\mu+\frac{1}{R(z^{(k)},A)}$ ergibt Näherung des Eigenwerts

Ähnlichkeitstransformation mittels QR-Verfahren:

Sei $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ gegebene Matrix

0. Setze $A^{(1)}=A$
1. Für $l=1,2,\dots$: Berechne

(7.4) $A^{(l)}=:Q_lR_l$, $Q_l\in\mathbb{C}^{n,n}$ unitär und R_l obere Dreiecksmatrix

$A^{(l+1)}:=R_lQ_l$

Zerlegung kann mittels Householder-Verfahren berechnet werden.

Konvergenzverbesserung der letzten Zeile ↑

Shift-Techniken bringen höhere Konvergenzgeschwindigkeiten im QR-Verfahren.

Eigenwerte von $\begin{pmatrix}5&3\\4&2\end{pmatrix}$ sind 7,27 und -0,27. Nach Skript wählt man nun als Shift μ denjenigen Eigenwert, der als nächstes bei a_{33} liegt, also $\mu=-0,27$. Anstelle von (7.4) rechnet man jetzt mit dem Shift $\mu_l\approx\lambda_n$: $A^{(l)}-\mu_lI=:Q_lR_l$

$A^{(l+1)}:=R_lQ_l+\mu_lI$

unitäre Matrix: Matrix U erfüllt Gleichung $U^*U=I$. Somit sind Spalten zueinander orthonormal.

obere Dreiecksmatrix:

$$A=\begin{pmatrix}1&5&8\\0&2&9\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Statistik: empirische Verteilungsfunktion $F(z; x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\text{Zahl der } x_i \text{ mit } x_i \leq z}{n} = \frac{\max\{i \mid x_{(i)} \leq z\}}{n}$

relative Klassenhäufigkeiten: $F(a_1), F(a_2) - F(a_1), \dots, F(a_{s-1}) - F(a_{s-2}), 1 - F(a_{s-1})$

arithmetische Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

Median: $\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n}{2})}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

p-Quantil $(0 < p < 1)$: $x_p = \begin{cases} x_{(np)}, & \text{falls } np \text{ ganzzahlig,} \\ x_{[np]+1}, & \text{falls } np \text{ nicht ganzzahlig.} \end{cases}$ → $[x]$ Gauß-Klammer: Kommastellen abschneiden

0,25-Quantil = unteres Quartil | 0,75-Quantil = oberes Quartil

Streuungsmaße: Empirische Varianz: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ Spannweite: $v = x_{(n)} - x_{(1)}$

Empirische Streuung: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ Quartilsabstand: $q = x_{0,75} - x_{0,25}$

Zweidimensionale Messreihe
$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$
↳ Veranschaulichung als Punktediagramm

arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots x_n)$, $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n)$

empirische Varianz: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, $s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ | oder $s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$

empirische Streuung: $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$

empirische Kovarianz: $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | oder $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right)$

empirischer Korrelationskoeffizient: $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$, es gilt immer $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

Regressionsgerade: Korrelationskoeffizient r_{xy} gibt Hinweise, ob die y-Werte tendenziell monoton wachsend oder monoton fallend von den x-Werten abhängen. ($r_{xy} > 0$ → streng monoton steigen | $r_{xy} < 0$ streng monoton fallend | $r_{xy} = 0$ horizontale Gerade

Berechnung: $y = \hat{a}x + \hat{b}$, $\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$, $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$

Abweichung der Punkte (x_i, y_i) in vertikaler Richtung (y-Achse) heißen Residuen: $r_i = y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}$, $i = 1, \dots, n$

Residuenquadrat: $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2(1 - r_{xy}^2)$ | → Für Extremwerte $r_{xy} = 1$ oder $r_{xy} = -1$ verschwinden die Residuen → alle Punkte liegen auf Regressionsgeraden.

Wahrscheinlichkeit: Ω = Ergebnismenge $A \subset \Omega$ = Ereignisse
$\omega \in \Omega$ = Ergebnis Beispiel: Wurf eines Würfels: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Das Ereignis $A = \{1,3,5\}$ tritt ein, falls eine ungerade Zahl gewürfelt wird.

Regeln für Wahrscheinlichkeitsrechnen: $P(\emptyset) = 0$, $0 \leq P(A) \leq 1$ | $P(A^c) = 1 - P(A)$, $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$ | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) = \frac{\text{Elementanzahl von } A}{n} = \frac{\# A}{\# \Omega}$ Laplace-Annahme: Das Eintreten jedes Ergebnisses ist gleich wahrscheinlich

geordnete Probe mit Wiederholung ("Auswahl mit zurücklegen"): Ein k-Tupel $(x_1, \dots, x_k)$ mit $x_i \in \Omega, i = 1, \dots, k$ heißt geordnete Probe von Ω vom Umfang k mit Wiederholungen. Es gibt n^k solcher Proben

geordnete Probe ohne Wiederholung ("Auswahl ohne zurücklegen"): $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ solcher Proben

ungeordnete Probe ohne Wiederholung: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ solcher Proben

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ → A unter Bedingung B

Formel von Bayes: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B|A_k)}$

Beispiel: A = "Zweite Karte ist ein ASS" | B = "die erste Karte ist ASS"

$P(B) = \frac{4 \cdot 31!}{32!} = \frac{1}{8}$ $P(A \cap B) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 30!}{32!} = \frac{12}{32 \cdot 31}$ ← Wahrscheinlichkeit von A u. B zusammen.

$P(A|B) = \frac{12 \cdot 8}{32 \cdot 31} = \frac{3}{31}$

Unabhängigkeit: unabhängig gdw. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
abhängig gdw. $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Sei $X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so ist $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ Verteilungsfunktion

Regel: $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

Eine Zufallsvariable X heißt stetig verteilt mit der Dichte f, wenn ihre Verteilungsfunktion F durch $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

geometrisch verteilt: $P(X = i) = (1-p)^{i-1}p$, $i = 1, 2, \dots$

binomialverteilt: $P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1}$, $i = 0, 1, \dots, n$

poisson-verteilt: $P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, $i = 0, 1, 2, \dots$

rechteckverteilt: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$

exponentialverteilt: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

normalverteilt: Eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $t \in \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2, kurz $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

Erwartungswert u. Varianz:

$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$ ist X eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte f_X, so gilt: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Erwartungswert ist derjenige Wert, der sich (in der Regel) bei oftmaligem Wiederholen des zugrundeliegenden Experiments als Mittelwert der Ergebnisse ergibt.

$Var(X) = E((X - E(X))^2)$ Varianz ist Maß für Abweichung einer Zufallsvariable X von ihrem Erwartungswert $E(X)$

Standardabweichung: $\sqrt{Var(X)}$ $\rightarrow$ $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Beispiele:	Verteilung	$E(X)$	$Var(X)$
Normalverteilt	$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
Exponentialverteilt	$Ex(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomialverteilt	$B(n,p)$	np	$np(1-p)$

Tschebyscheffsche Ungleichung: Es gilt $P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$ für $c > 0$