Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
9. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 2 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)
Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	-6	0	2	6

(1)

(a) Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom vom Grad ≤ 3, das die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.

(b) Zeichnen Sie das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

Lösung:

(a) Die Lagrange-Polynome lauten

$$\begin{aligned}
L_{0,3}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{3} \frac{x-x_j}{1-x_j} = \frac{x-2}{-1}\cdot\frac{x-3}{-2}\cdot\frac{x-4}{-3} = -\frac{1}{6}\left(x^3-9x^2+26x-24\right)\\
L_{1,3}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 1}}^{3} \frac{x-x_j}{2-x_j} = \frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-3}{-1}\cdot\frac{x-4}{-2} = \frac{1}{2}\left(x^3-8x^2+19x-12\right)\\
L_{2,3}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 2}}^{3} \frac{x-x_j}{3-x_j} = \frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{1}\cdot\frac{x-4}{-1} = -\frac{1}{2}\left(x^3-7x^2+14x-8\right)\\
L_{3,3}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\j\neq 3}}^{3} \frac{x-x_j}{4-x_j} = \frac{x-1}{3}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{1} = \frac{1}{6}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)
\end{aligned}$$

und Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} y_k L_{k,3}(x)\\
&= \left(x^3-9x^2+26x-24\right) - \left(x^3-7x^2+14x-8\right) + \left(x^3-6x^2+11x-6\right)\\
&= x^3-8x^2+23x-22.
\end{aligned}$$

(b) Aus Abbildung 1 erkennt man, dass p_3 die Interpolationsbedingungen für (1) erfüllt.

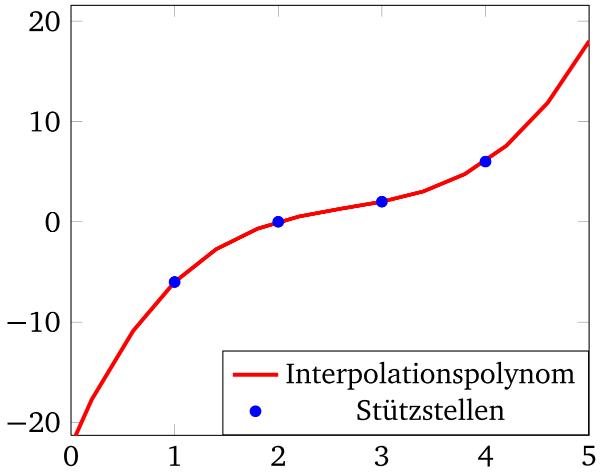

Abbildung 1: Das Interpolationspolynom p_3 und die Stützstellen.

Aufgabe G2 (Interpolation)
Gegeben sei die Funktion

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}\quad x\mapsto 8x^4-18x^3+10x^2+0,5x.$$

Lesen Sie sich zuerst beide Aufgabenteile durch und entscheiden Sie sich dann für eine der Ihnen bekannten Interpolationsformeln. Begründen Sie Ihre Wahl.

(a) Berechnen Sie zu f und den Stützstellen $\{0,\frac{1}{2},1\}$ das Interpolationspolynom vom Grad ≤ 2 auf dem Intervall $[0,1]$.

(b) Berechnen Sie zu f und den Stützstellen $\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$ das Interpolationspolynom vom Grad ≤ 3 auf dem Intervall $[0,1]$.

Lösung: Wir wählen die Newtonsche Interpolationsformel, da hier für das nachträgliche Hinzufügen neuer Stützstellen in Aufgabenteil b) weniger Aufwand benötigt wird.

(a) Wir berechnen die dividierten Differenzen:

$$\begin{array}{c|ccc}
x_0=0 & y_0=0 & & \\
 & & \frac{1-0}{\frac{1}{2}-0}=2 & \\
x_1=\frac{1}{2} & y_1=1 & & \frac{-1-2}{1-0}=-3 \\
 & & \frac{\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=-1 & \\
x_2=1 & y_2=\frac{1}{2} & &
\end{array}$$

Wir lesen ab: $\gamma_0=0$, $\gamma_1=2$ und $\gamma_2=-3$. Daraus ergibt sich das Interpolationspolynom

$$p_2(x)=\gamma_0+\gamma_1(x-x_0)+\gamma_2(x-x_0)(x-x_1)=2\cdot x-3\cdot x\left(x-\frac{1}{2}\right)=-3x^2+\frac{7}{2}x.$$

(b) Wir erweitern das Schema aus Teil a):

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 = 0 & y_0 = 0 & \searrow & & & & & \\
 & & & \frac{1-0}{\frac{1}{2}-0} = 2 & \searrow & & & \\
x_1 = \frac{1}{2} & y_1 = 1 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & \frac{-1-2}{1-0} = -3 & \searrow & \\
 & & & \frac{\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}} = -1 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & \frac{-3+3}{\frac{3}{4}-0} = 0 \\
x_2 = 1 & y_2 = \frac{1}{2} & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & \frac{-\frac{7}{4}+1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = -3 & \nearrow & \\
 & & & \frac{\frac{15}{16}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-1} = -\frac{7}{4} & \nearrow & & & \\
x_3 = \frac{3}{4} & y_3 = \frac{15}{16} & \nearrow & & & & &
\end{array}
$$

Wir sehen, dass $\gamma_3 = 0$ gilt und haben daher $p_3(x) = p_2(x)$.

Aufgabe G3 (Kubische Splines)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \to [1,2] : \quad x \mapsto 2^{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Interpolieren Sie die Funktion f durch einen kubischen Spline. Verwenden Sie dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ und natürliche Randbedingungen.

Lösung: Es gilt

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad , y_2 = 1, \quad \text{und} \quad h_0 = h_1 = 1.$$

Daraus ergibt sich für die Momente M_0, M_1, M_2 das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit der eindeutigen Lösung

$$M_0 = 0, \quad M_1 = -3, \quad M_2 = 0.$$

Daraus ergeben sich die Konstanten

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{2-1}{1} - \frac{1}{6}(-3-0) = \frac{3}{2}, \\
c_1 &= \frac{1-2}{1} - \frac{1}{6}(0-(-3)) = -\frac{3}{2}, \\
d_0 &= 1, \\
d_1 &= 2 - \frac{1}{6}(-3) = \frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= -\frac{1}{2}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1) + 1 && x \in [-1,0] \\
s_1(x) &= \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = s_0(-x) && x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Die Funktion und der Spline sind in Abbildung 2 dargestellt.

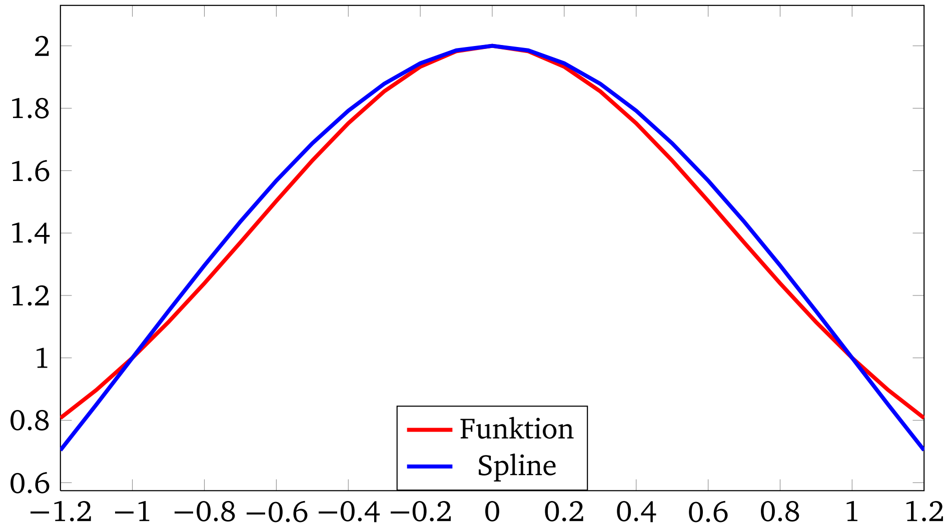

Abbildung 2: Die Funktion f und der Spline s.

Aufgabe G4 (Fehlerabschätzung)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,2] \to [-1,1] \quad x \mapsto \sin(\pi x)$$

Geben Sie folgende Fehlerabschätzungen für $x \in [0,2]$ an:

(a) bei kubischer Spline-Interpolation mit Hermite-Randbedingungen unter Verendung der Zerlegung $\Delta = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

(b) bei linearer Spline Interpolation mit gleicher Zerlegung Δ.

(c) bei Polynom-Interpolation (vom Grad ≤ 4) an den Stützstellen $x_k = \frac{k}{2}$ für $k = 0, \dots, 4$.

Lösung:

(a) Nach Satz 2.2.6 gilt

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{max}^4.$$

Wir identifizieren:

$$a = 0, \quad b = 2, \quad h_{max} = \frac{1}{2}, \quad f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin(\pi x).$$

Um das Maximum von $|f^{(4)}|$ zu bestimmen, berechnen wir die lokalen Extrema von $f^{(4)}$ auf $[0,2]$:

$$f^{(5)}(x) = \pi^5 \cos(\pi x) = 0, \; x \in [0,2] \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

und vergleichen die Werte von $f^{(4)}$ an den lokalen Extrema mit denen am Rand des Intervalls $[0,2]$:

$$f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^4, \quad f^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right) = -\pi^4, \quad f^{(4)}(2) = 0.$$

Wir erhalten also

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \pi^4 \frac{1}{16} \approx 0,0792.$$

(b) Mit Satz 2.2.3 und ähnlichen Überlegungen wie in (a) erhalten wir

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x)-s(x)| \leq \frac{1}{8}\sup_{\xi\in[0,2]} |f^{(2)}(\xi)|h_{max}^2 = \frac{1}{8}\sup_{\xi\in[0,2]} |-\pi^2\sin(\pi\xi)|\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{32} \approx 0,3084.$$

(c) Mit Korollar 2.1.3 ergibt sich

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x)-p_4(x)| \leq \max_{x\in[0,2]} \frac{|f^{(5)}(x)|}{5!}(2-0)^5 = \max_{x\in[0,2]} \frac{|\pi^5\cos(\pi x)|}{120}32 = \frac{32\pi^5}{120} \approx 81,6052.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lagrangesches Interpolationspolynom)
Die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Langrange-Interpolationspolynoms $p(x)$ zwischen den Stützstellen $x_0=\frac{1}{4}$, $x_1=1$ und $x_2=4$ interpoliert werden. Vergleichen Sie die Punktauswertungen von f und p in den Punkten $x=\frac{1}{2}$ und $x=2$ und skizzieren Sie die Graphen von f und p.
Lösung: Die Lagrange-Polynome lauten

$$\begin{aligned}
L_{0,2}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2} \frac{x-x_j}{\frac{1}{4}-x_j} = \frac{x-1}{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{x-4}{-\frac{15}{4}} = \frac{16}{45}\left(x^2-5x+4\right)\\
L_{1,2}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2} \frac{x-x_j}{1-x_j} = \frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{x-4}{-3} = -\frac{4}{9}\left(x^2-\frac{17}{4}x+1\right)\\
L_{2,2}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{2} \frac{x-x_j}{4-x_j} = \frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{15}{4}}\cdot\frac{x-1}{3} = \frac{4}{45}\left(x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

und Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{45}\left(x^2-5x+4\right) - 1\cdot\frac{4}{9}\left(x^2-\frac{17}{4}x+1\right) + 2\cdot\frac{4}{45}\left(x^2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)\\
&= -\frac{4}{45}x^2+\frac{7}{9}x+\frac{14}{45}.
\end{aligned}$$

Die Punktauswertung ergibt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2}} &\approx 0,7071 &\qquad p\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{61}{90} \approx 0,6778\\
\sqrt{2} &\approx 1,412 & p(2) &= \frac{68}{45} \approx 1,5111.
\end{aligned}$$

Der Interpolationsfehler beträgt also $|\sqrt{\frac{1}{2}}-p(\frac{1}{2})| \approx 0,0293$ bzw. $|\sqrt{2}-p(2)| \approx 0,0969$.
Die Graphen sind in Abbildung 3 eingezeichnet.

Aufgabe H2 (Inverse Interpolation)
Gegeben sei die Funktion

$$f:[0,1]\to[-1,\tfrac{3}{4}]: x\mapsto x^2-\frac{1}{4^x}.$$

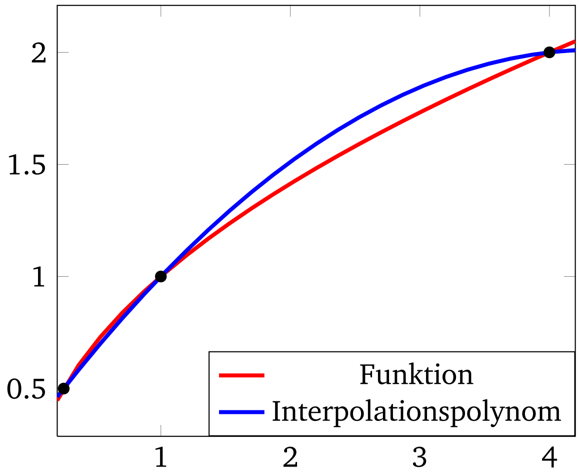

Abbildung 3: Vergleich von $f(x) = \sqrt{(}x)$ und dem Interpolationspolynom $p(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) Berechnen Sie ein Newtonsches Interpolationspolynom vom Grad 2 zur *Umkehrfunktion* von f. Versuchen Sie dabei die Stützstellen so zu wählen, dass die Stützstellen sowie die zugehörigen Funktionswerte rational sind.

Lösung:

(a) Für $x \in [0,1]$ ist sowohl x^2 als auch $-\frac{1}{4^x}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Folglich ist auch f streng monoton wachsend und daher umkehrbar. (Da $f(0) = -1$ und $f(1) = \frac{3}{4}$ gilt, ist $f([0,1]) = [-1, \frac{3}{4}]$).

(b) Für $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ erhält man rationale Funktionswerte:

$$f(0) = -1, \quad f(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad f(1) = \frac{3}{4}.$$

Daher kann man -1, $-\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ gut als Stützstellen zur Interpolation der Umkehrfunktion verwenden. Das Schema der dividierten Differenzen lautet dann

$$\begin{array}{r|lcccc}
y_0 = -1 & x_0 = 0 & \searrow & & & \\
 & & & \frac{2}{3} & \searrow & \\
y_1 = -\frac{1}{4} & x_1 = \frac{1}{2} & \nearrow \searrow & & & -\frac{2}{21} \ . \\
 & & & \frac{1}{2} & \nearrow & \\
y_2 = \frac{3}{4} & x_2 = 1 & \nearrow & & &
\end{array}$$

Daraus erhält man

$$p_2(x) = \frac{2}{3}(x+1) - \frac{2}{21}(x+1)(x+\frac{1}{4}).$$

Die Differenz der Funktion f^{-1} und des Interpolationspolynoms p_2 sind in Abbildung 4 dargestellt.

Aufgabe H3 (Newtonsche Interpolationsformel & Lineare Splines)

Gegeben seien die folgenden Messwerte

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_i	0	0	0	0	1	0	0	0	0

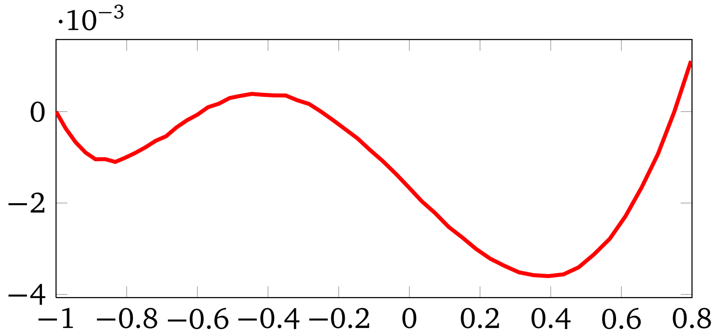

Abbildung 4: Die Differenz der Funktion f^{-1} und des Interpolationspolynoms p_2.

(a) Berechnen Sie das zugehörige Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen und fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Zeichnen Sie den linearen Spline zu den Messwerten in die Skizze ein und vergleichen Sie. Welche Interpolation ist besser?

Lösung:

(a) Die Koeffizienten des Newtonschen Interpolationspolynom ergeben sich aus dem Schema der dividierten Differenzen:

$$
\begin{array}{r|lcccccccc}
x_0=-4 & y_0=0 & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & \\
x_1=-3 & y_1=0 & & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & & \\
x_2=-2 & y_2=0 & & 0 & & \frac{1}{24} & & & & \\
 & & 0 & & \frac{1}{6} & & -\frac{1}{24} & & & \\
x_3=-1 & y_3=0 & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & \frac{1}{48} & & \\
 & & 1 & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{12} & & -\frac{1}{144} & \\
x_4=0 & y_4=1 & & -1 & & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{36} & & \frac{1}{576} \\
 & & -1 & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{12} & & \frac{1}{144} & \\
x_5=1 & y_5=0 & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & & \frac{1}{48} & & \\
 & & 0 & & -\frac{1}{6} & & \frac{1}{24} & & & \\
x_6=2 & y_6=0 & & 0 & & \frac{1}{24} & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & & \\
x_7=3 & y_7=0 & & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & \\
x_8=4 & y_0=0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Daraus erhält man

$$
\begin{aligned}
p_8(x) = (x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\Bigg(&\frac{1}{24} - \frac{1}{24}x + \frac{1}{48}x(x-1) \\
&- \frac{1}{144}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{576}x(x-1)(x-2)(x-3)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Das Interpolationspolynom p_8 ist in Abbildung 5 dargestellt.

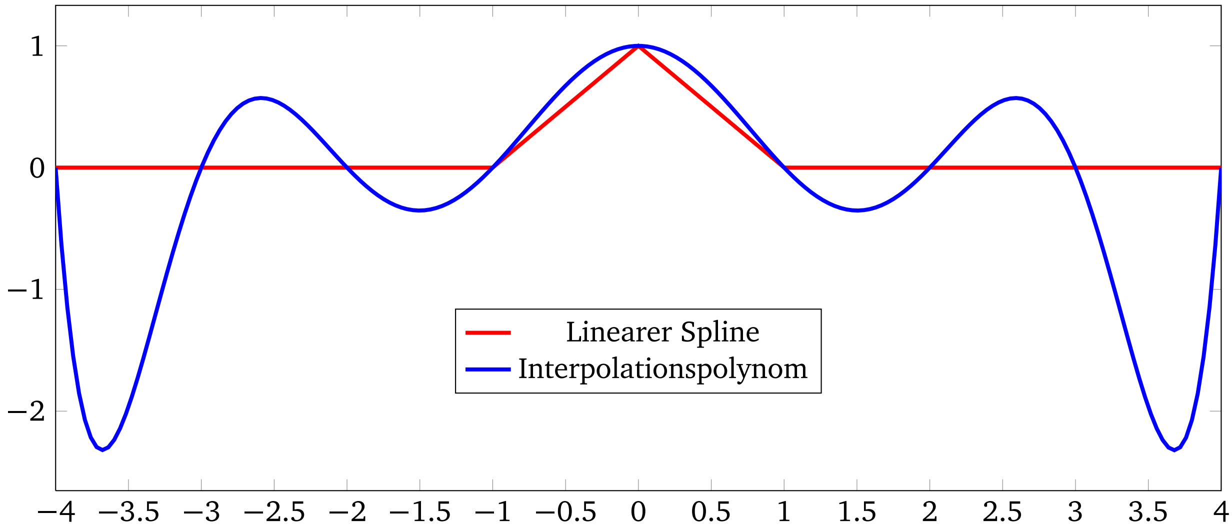

Abbildung 5: Das Interpolationspolynom p_8 und der lineare Spline s.

(b) Der lineare Spline ist in Abbildung 5 dargestellt. Die Messwerte legen die Vermutung nahe, dass die gemessene Funktion für $x > 1$ und $x < -1$ konstant gleich Null oder nur sehr wenig von Null verschieden ist. Das Newtonsche Interpolationspolynom schwankt in diesen Bereichen sehr stark und ist deutlich von Null verschieden. Daher kann die Interpolation durch den linearen Spline als die bessere angesehen werden.