Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
16. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt der Kapitel 2 und 3 im Skript.
Die Donnerstag-Übungen wurden wegen des Feiertages verlegt. Bitte beachten Sie die Informationen auf der Webseite.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur)
Wir betrachten das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx$$

mit dem Wert $\ln(2)$.

(a) Simpsonregel
Berechnen Sie eine Näherung für $\ln(2)$ durch eine näherungsweise Berechnung des gegebenen Integrals mit Hilfe der Simpson-Regel und schätzen Sie den Fehler ab.

(b) $\frac{3}{8}$-Regel
Lässt sich Ihre Näherung für $\ln(2)$ verbessern, wenn Sie die $\frac{3}{8}$-Regel verwenden? Vergleichen Sie dazu sowohl die Fehlerabschätzungen, als auch die tatsächlichen Fehler.

Lösung:

(a) Nach der Simpsonregel gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx \approx \frac{1-(-1)}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1+3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{0+3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3}\right)=\frac{1}{6}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}=\frac{25}{36}=0,69\overline{4}.$$

Für den Fehler gilt nach der allgemeinen Abschätzung

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx-\int_{-1}^{1} p_2(x)\,dx\right| \le \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(3)}\right|}{3!}(1-(-1))^4.$$

Es gilt $\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(3)}=\frac{-6}{(x+3)^4}$. Diese Funktion ist offensichtlich auf $[-1,1]$ negativ und monoton wachsend. Daher wird das Betragsmaximum in -1 angenommen. Wir erhalten also

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx-\int_{-1}^{1} p_2(x)\,dx\right| \le \frac{\frac{6}{16}}{6}\cdot 16=1.$$

Man kann alternativ auch die feinere Abschätzung (Tabelle) verwenden und erhält

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx - \int_{-1}^{1} p_2(x)\,dx\right| \leq \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} \left|\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(4)}\right|}{90} \left(\frac{1-(-1)}{2}\right)^5 = \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} \left|\frac{24}{(x+3)^5}\right|}{90} = \frac{\frac{24}{(-1+3)^5}}{90} = \frac{1}{120}.$$

(b) Mit der $\frac{3}{8}$-Regel erhält man als Näherung

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx \approx \frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{3}+3} + \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}+\frac{9}{32}+\frac{9}{40}+\frac{1}{16} = \frac{111}{160} = 0.69375.$$

Der tatsächliche Fehler der $\frac{3}{8}$-Regel beträgt also $|\frac{111}{160} - \ln(2)| \approx 6,0282\cdot 10^{-4}$. Bei der Simpsonregel sind es $|\frac{25}{36} - \ln(2)| \approx 1,2973\cdot 10^{-3}$. Der Fehler konnte also etwa halbiert werden.

Die feine Fehlerabschätzung liefert jedoch für die $\frac{3}{8}$-Regel eine schlechetere Abschätzung ($\frac{3}{80}\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}h^5$) als für die Simpsonregel ($\frac{1}{90}\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}h^5$).

Die grobe Abschätzung liefert wieder einen Wert von 1.

Aufgabe G2 (Summierte Trapezregel)

Bestimmen Sie Näherungen für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Verwenden Sie dazu die summierte Trapezregel mit 2 bzw. 4 Teilintervallen

Lösung: Wir betrachten die summierte Trapezregel, setzen also $n = 1$. Für die verschiedenen Intervallunterteilungen $m = 2,4$ ergeben sich mit $h = \frac{b-a}{n\cdot m}$ die Schrittweiten

$$h_1 = \frac{1}{2},\ \ h_2 = \frac{1}{4}.$$

Mit diesen Schrittweiten ergibt sich

$$S_{n\cdot m}^{(n)} = \frac{1}{2}\cdot h\sum_{k=0}^{m-1}(f_k + f_{k+1})$$

mit $f_k := f(x_k) = f(a + h\cdot k)$ für $m = 2$:

$$S_2^{(1)}(f) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big(\big(f(0)+f(0,5)\big) + \big(f(0,5)+f(1)\big)\Big) = \frac{1}{4}(1+2\cdot e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) \approx 0,7314$$

und für $m = 4$:

$$\begin{aligned} S_4^{(1)}(f) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\Big(\big(f(0)+f(\tfrac{1}{4})\big) + \big(f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{1}{2})\big) + \big(f(\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{3}{4})\big) + \big(f(\tfrac{3}{4})+f(1)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{8}(1+2\cdot e^{-\frac{1}{16}} + 2\cdot e^{-\frac{1}{4}} + 2\cdot e^{-\frac{9}{16}} + e^{-1}) \approx 0,7430. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Quadraturfehler)
Geben Sie für die summierte Trapezregel und die summierte Simpson-Regel jeweils eine möglichst große Schrittweite h und eine minimale Anzahl m von Teilintervallen an, sodass der Quadraturfehler bei der Berechnug von $I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ höchstens 10^{-4} beträgt.
Lösung: Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f''(x)| \le |f''(0)| = 2 \quad &\text{für} \quad x \in [0,1] \\ |f^{(4)}(x)| \le |f^{(4)}(0)| = 12 \quad &\text{für} \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Diese halten wir, indem wir die lokalen Extrema der entsprechenden Ableitungen im Intervall $[0,1]$ bestimmen und die Beträge jeweiligen Funktionswerte mit denen am Rand vergleichen. **In der Klausur muss diese Berechnung angegeben werden!** Wir führen hier exemplarisch die volle Berechnung für f'' durch:

$$\begin{aligned} f(x) =& e^{-x^2} \\ f'(x) =& e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ f''(x) =& e^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2) \\ f'''(x) =& e^{-x^2} \cdot (8x + 4x - 8x^3) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f''' entsprechen denen der Klammer. Diese liegen bei 0, sowie $\pm\sqrt{1,5}$. Davon liegt nur die erste im Intervall. Wir müssen also nur folgende Werte verlgeichen:

$$|f''(0)| = 2, \qquad |f''(1)| \frac{2}{e} < 2.$$

Wir verwenden obige Abschätzung und erhalten somit für den für den Fehler der summierten Trapezregel

$$\left| \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot f''(\xi) \right| \le \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot |f''(0)| = h^2 \frac{1}{6}$$

erhalten. Da dieser kleiner gleich 10^{-4} sein soll ergibt sich als obere Schranke für h

$$h^2 \frac{1}{6} \overset{!}{\le} 10^{-4} \qquad \Longrightarrow \qquad h \le \sqrt{\frac{6}{10000}} \approx 0,0245$$

Analog ergibt sich als Abschätzung für den Fehler der summierten Simpson-Regel

$$\left| \frac{h^4(b-a)}{180} \cdot f^{(4)}(\xi) \right| \le \frac{h^4(b-a)}{180} \cdot |f^{(4)}(0)| = h^4 \frac{1}{15}$$

$$h^4 \frac{1}{15} \overset{!}{\le} 10^{-4} \qquad \Longrightarrow \qquad h \le \sqrt[4]{\frac{15}{10000}} \approx 0,197$$

Die Simpson-Regel erreicht die gewünschte Genauigkeit also bereits bei einer deutlich niedrigeren Schrittweite.

Wir brauchen also bei der summierten Trapezregel mindestens $m = \left\lceil \sqrt{\frac{10000}{6}} \right\rceil = 41$, bei der Simpson-regel mindesten $m = \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{10000}{15}} \right\rceil = 3$ Teilintervalle.

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechteckregel)

Eine andere Klasse von Quadraturformeln ergibt sich, wenn man die Knoten frei variieren lässt. Bei einem einzigen Knoten ergibt sich die Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\omega_0 f(x_0).$$

a) Bestimmen Sie die Werte für ω_0 und x_0 so, dass die Quadraturformel beliebige Polynome bis zum Grad 1 exakt integriert. Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $a = 0,\ b = 1$ und bestimmen Sie anschließend die Formel für den Allgemeinfall.

b) Zeigen Sie, dass ein Polynom vom Grad 2 existiert welches die in a) erhaltene Rechteckregel nicht exakt integriert.

Lösung:

a) Damit die Quadraturformel alle Polynome bis zum Grad 1 exakt integriert, muss sie genau für alle Polynome vom Grad höchstens 1 exakt sein. Da die Polynome $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x$ eine Basis vom Vekrorraum aller Polynome mit Höchstgrad 1 bilden, ist es ausreichend, die Exaktheit nur für diese Polynome zu zeigen:

$$\int_0^1 1\ dx = 1 = \omega_0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} = \omega_0 x_0$$

Daraus erhält man: $w_0 = 1$ und $x_0 = \frac{1}{2}$ und

$$\int_0^1 f(x)\ dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Transformation für den Allgemeinfall (Substitution $x = a + (b-a)t$):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\ dt \\ &\approx (b-a)\, f\left(a+\frac{b-a}{2}\right) \\ &= (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

b) Man betrachte $a = 0,\ b = 1$ und $p_2(x) = x^2$:

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{aber} \quad \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}.$$

Die Rechteckregel ist also nicht exakt für p_2, daher integriert sie nicht alle Polynome vom Grad 2 exakt.

Aufgabe H2 (Exaktheit der Quadratur)

Prüfen Sie, ob die folgenden Formeln zur Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ exakt vom Grad 2 sind, also $I(f) = J(f)$ für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

$$J(f) = \tfrac{b-a}{10}(f(a) + 4f(a + \tfrac{b-a}{3}) + 4f(b - \tfrac{b-a}{3}) + f(b)) \tag{1}$$
$$J(f) = \tfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{2}$$

Die zweite Formel entspricht der Simpsonregel. Zeigen Sie zudem, dass die Simpsonregel Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert, jedoch nicht alle Polynome vom Grad 4.
Hinweis: Wieso ist der Nachweis für die Basiselemente x^k des Polynomraums ausreichend?
Es genügt das Integrationsintervall $[-1, 1]$ zu betrachten.

Lösung: Ein beliebiges Polynom kann als Linearkombination seiner Basiselemente geschrieben werden. Da sowohl die Integration $I(f)$ als auch die Funktionale $J(f)$ linear sind, überträgt sich die Gültigkeit der Aussage von den Basiselementen auf alle Elemente dieses Raumes.

Ausserdem reicht es, die Aussage jeweils für das Intervall $[-1, 1]$ zu zeigen. Mit einer Substitution lässt sich die Aussage dann auf jedes Intervall übertragen.

Formel (1)

$$I(1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$
$$J(1) = \tfrac{2}{10}(1 + 4 + 4 + 1) = 2$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad 0.

$$I(x) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$
$$J(x) = \tfrac{2}{10}(-1 - \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} + 1) = 0$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 1.

$$I(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$
$$J(x^2) = \tfrac{2}{10}(1 + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} + 1) = \tfrac{26}{45}$$

Aussage gilt nicht für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

Damit ist die Behauptung aus der Aufgabenstellung falsch.

Formel (2)

$$J(1) = 1 \cdot \tfrac{2}{6} + 1 \cdot 4 \cdot \tfrac{2}{6} + 1 \cdot \tfrac{2}{6} = 2$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad 0.

$$J(x) = \tfrac{2}{6}(-1 + 0 + 1) = 0$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 1.

$$J(x^2) = \tfrac{2}{6}(1+0+1) = \tfrac{2}{3}$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

$$I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$
$$J(x^3) = \tfrac{2}{6}(-1+0+1) = 0$$

Aussage gilt für alle Polynome vom Grad kleinergleich 3.

$$I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \tfrac{2}{5}$$
$$J(x^4) = \tfrac{2}{6}(1+0+1) = \tfrac{2}{3} \neq \tfrac{2}{5}$$

Aussage gilt nicht für alle Polynome vom Grad kleinergleich 4.

Damit stimmt die Behauptung aus der Aufgabenstellung.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Newtoninterpolation)

(a) Implementieren Sie ein Programm, das zu $n+1$ Stützstellen (x_i, y_i) $(i = 0, \ldots n)$ den Wert des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms an einer Stelle x zurückgibt. Schreiben Sie dazu eine Routine, die mit Hilfe der dividierten Differenzen die Werte $\gamma_0, \ldots \gamma_n$ berechnet und eine weitere Routine, die das Interpolationspolylom $p_n(x)$ an der Stelle x auswertet.
Testen Sie Ihr Programm für die Funktion $f(x) = \cos(\pi x)$ und die Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

(b) Implementieren Sie nun eine Erweiterung Ihres Programms, das für eine Funktion $f(x)$ den Wert $p_n(x)$ des zugehörigen Newtoninterpolationspolynoms auf einem Intervall $[a, b]$ mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen berechnet. Testen Sie Ihr Programm wieder an obigem Beispiel und für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für jeweils 6 bzw. 11 Stützstellen auf dem Intervall $[-5, 5]$. Vergleichen Sie anschließend das Interpolationspolynom mit der Funktion f.

Hinweis zu den Programmieraufgaben:
Wir empfehlen die Bearbeitung der gestellten Programmieraufgaben in **Matlab**. Die Lösungshinweise werden ebenfalls in Matlab erstellt. Falls Sie keinen Zugang zu Matlab haben, können Sie stattdessen auch die frei verfügbare Software **Octave** verwenden. Links und Informationen zu Matlab und Octave finden Sie auf unserer Webseite.

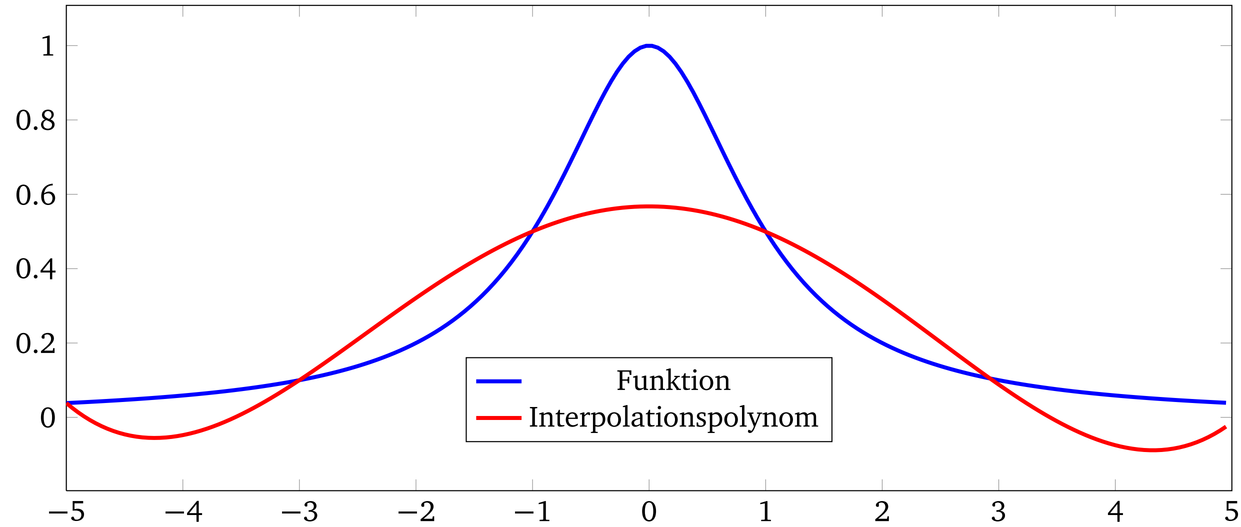
Lösung: Als Lösung könne Sie sich die Matlab-Dateien `gammas.m` und `newton_interpol.m` für Aufgabenteil a) sowie `newton_interpol_f.m` für Aufgabenteil b) herunterladen. Die Funktionen können durch Aufruf von `TestF1.m` und `TestF2.m` getestet werden. Um die Funktionen mit den Polynomen zu vergleichen sehen die Aufrufe in Matlab wie folgt aus:
Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für 6 Stützstellen auf dem Intervall $[-5, 5]$:

```
x=[-5:0.1:5];
f=TestF1(x);
p=newton_interpol_f('TestF1', 5, -5, 5, x)
```

Plotten lässt sich das mit

```
plot(x,f,'b-');
hold on;
plot(x,p,'r-');
```

Dies liefert das Bild der blauen Funktion mit dem roten Interpolationspolynom:



Für die Funktion $f(x) = \cos \pi x$ für 5 Stützstellen auf dem Intervall $[0,2]$:

```
x=[0:0.1:2];
f=TestF2(x);
p=newton_interpol_f('TestF2', 4, 0, 2, x)
```

Plotten lässt sich das wieder mit

```
plot(x,f,'b-');
hold on;
plot(x,p,'r-');
```

Dies liefert das folgende Bild der blauen Funktion mit dem roten Interpolationspolynom: