Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
30. Mai 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 4 im Skript.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Cholesky Verfahren)
Bestimmen Sie die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Lösung: Zuerst prüfen wir, ob die Matrix positiv definit ist (offensichtlich ist die Matrix symmetrisch). Dazu berechnen wir die Eigenwerte, z. B. mit Hilfe der Hauptminoren:

$$\begin{aligned} &\det(a_{11}) = \det(1) = 1 > 0, \\ &\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \text{ und} \\ &\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 4 - (3-2) - (-2+2) = 1 > 0. \end{aligned}$$

Folglich ist A positiv definit und damit ist eine Choleskyzerlegung möglich. Wie im Skript auf Seite 31 bemerkt wird, kann dieser Test auf positive Definitheit implizit in den Algorithmus eingebaut werden. Man stoppt dabei, falls einer der Ausdrücke $a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2$ nicht positiv ist. Dann ist die Matrix nicht positiv definit.

Wir führen nun den Algoritmus 3 der VL durch:
(j=1) $l_{11} = \sqrt{1} = 1$
(i=2) $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = 1.$
(i=3) $l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -1.$
(j=2): $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2-1} = 1.$
(i=3): $l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = -1.$
(j=3): $l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 1$

A besitzt also die Choleskyzerlegung $LL^T = A$, mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des Gleichungssystem $Ax = b$ lösen wir zunächst $Ly = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_1 + y_2 &= -1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -1 \\ -y_1 - y_2 + y_3 &= 4 \quad\ \ \Rightarrow \quad y_3 = 3 \end{aligned}$$

Danach erhalten wir x als Lösung von $L^T x = y$:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad\ \ \Rightarrow \quad x_1 = 1 \end{aligned}$$

Folglich ist $x = (1, 2, 3)^T$ die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe G2 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)
Berechnen Sie zunächst die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen, indem man das Gauß- Eliminationsverfahren auf die Matrix und die rechte Seite anwendet und dann das gestaffelte System $Rx = c$ löst. Lösen Sie das System nun mit Hilfe des Gaußalgorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche.

Rechnen Sie dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteilen Sie die Qualität der Lösungen.

Lösung: Aus der zweiten Zeile folgt $x_2 = 1 - x_1$. Damit folgt aus der ersten Zeile $x_1(1/200 - 1) = -1/2 \Rightarrow x_1 = \frac{100}{199}$. Daher ist

$$x = \left(\frac{100}{199}, \frac{99}{199}\right)$$

die exakte Lösung. Rundet man diese auf zwei Stellen so erhält man die Näherungslösung $(0.5, 0.5)$.

(a) Der Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{200} & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{200}\frac{1}{200} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -199 & -99 \end{array}\right)$$

Dies ergibt $x_2 = 0.5$ und $x_1 = 0$, also durch Rückwärtssubstitution $x = (0, 0.5)^T$, was sich deutlich sowohl von der exakten als auch von der gerundeten exakten Lösung unterscheidet. Daher ist diese Näherungslösung von schlechter Qualität.

(b) Der Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{200} & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{200} & 1 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{199}{200} \approx 1 & \frac{99}{200} \approx 0.5 \end{array}\right)$$

Die Rückwärtssubstitution ergibt $x = (0.5, 0.5)^T$, was sich zwar leicht von dem exakten Ergebnis unterscheidet aber genau dem gerundeten exakten Ergebnis entspricht. Daher ist diese Näherungslösung von guter Qualität.

Aufgabe G3 (Störung der Matrix)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$.

(a) Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler in Abhängigkeit von α bezüglich der Spalten- und der Zeilensummennorm an.

(b) Für welche α garantieren die Schranken einen relativen Fehler von höchstens $\frac{1}{2}$?

(c) Berechen Sie den exakten relativen Fehler für die maximalen Werte von α aus Teil (b)

Lösung:

(a) Nach Satz 4.3.3 gilt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Da keine Störung der rechten Seite vorliegt, vereinfacht sich die obige Ungleichung mit Hilfe der Beziehung $\operatorname{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$ zu

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \|\Delta A\|}{1 - \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta A\|}.$$

Es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich bezüglich der Spaltensummennorm für den relativen Fehler die Abschätzung

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|_1 \|\Delta A\|_1}{1 - \left\|A^{-1}\right\|_1 \|\Delta A\|_1} = \frac{\frac{7}{2}|\alpha|}{1 - \frac{7}{2}|\alpha|} = \frac{1}{\frac{2}{7|\alpha|} - 1}.$$

für $|\alpha| < \frac{2}{7}$.

Bezüglich der Zeilensummennorm ergibt sich

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{1}{\frac{1}{3|\alpha|} - 1}.$$

für $|\alpha| < \frac{1}{3}$.

(b) Für die Abschätzung bezüglich der Spaltensummennorm muss (beachte $|\alpha| < \frac{2}{7}$, damit wir eine positive Oberschranke haben)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{2}{7|\alpha|}-1} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2 &\leq \frac{2}{7|\alpha|} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad 3 &\leq \frac{2}{7|\alpha|} \\ \Leftrightarrow \quad |\alpha| &\leq \frac{2}{21} \end{aligned}$$

gelten, damit der relative Fehler kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.
Eine analoge Rechnung für die Abschätzung bezüglich der Zeilensummennorm ergibt

$$|\alpha| \leq \frac{1}{9}.$$

(c) Das Gleichungssystem $(A + \Delta A)x = b$ hat die eindeutige Lösung

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha-1} \\ \frac{2-\alpha}{2-4\alpha} \end{pmatrix}$$

für $\alpha \neq \frac{1}{2}$. (Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist $(A + \Delta A)$ singulär.)
Das maximale α für die Abschätzung bezüglich der Spaltensummennorm ist $\alpha = \frac{2}{21}$. Damit ergibt sich für den relativen Fehler

$$\frac{\left\|x_{\frac{2}{21}} - x_0\right\|_1}{\left\|x_0\right\|_1} = \frac{\left|\frac{1}{\frac{4}{21}-1} + 1\right| + \left|\frac{2-\frac{2}{21}}{2-\frac{8}{21}} - 1\right|}{2} = \frac{\frac{4}{17} + \frac{3}{17}}{2} = \frac{7}{34}.$$

Das maximale α für die Abschätzung bezüglich der Zeilensummennorm ist $\alpha = \frac{1}{9}$. Damit ergibt sich für den relativen Fehler

$$\frac{\left\|x_{\frac{1}{9}} - x_0\right\|_\infty}{\left\|x_0\right\|_\infty} = \frac{\max\left\{\left|\frac{1}{\frac{2}{9}-1} + 1\right|, \left|\frac{2-\frac{1}{9}}{2-\frac{4}{9}} - 1\right|\right\}}{1} = \max\left\{\frac{2}{7}, \frac{3}{14}\right\} = \frac{2}{7}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)
Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

(a) ohne Pivotsuche,

(b) mit Spaltenpivotsuche,

(c) mit vollständiger Pivotsuche.

Rechnen Sie dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteilen Sie die Qualität der Lösungen.

Lösung: Aus der zweiten Zeile folgt $x_1 = 1 - x_2$. Damit folgt aus der ersten Zeile $x_2 = \frac{100-1}{200-1} = \frac{99}{199}$. Daher ist

$$x = \left(\frac{100}{199}, \frac{99}{199}\right)$$

die exakte Lösung. Rundet man diese auf zwei Stellen so erhält man die Näherungslösung $(0.5, 0.5)$.

(a) Der Gauß-Algorithmus ohne Pivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 200 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 200 & 100 \\ 0 & -199 & -99 \end{array}\right)$$

Die Rückwärtssubstitution ergibt $x = (0, 0.5)^T$, was sich deutlich sowohl von der exakten als auch von der gerundeten exakten Lösung unterscheidet. Daher ist diese Näherungslösung von schlechter Qualität.

(b) Der Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt, den gleichen Verlauf und Ergebnis wie in Teil (a).

(c) Der Gauß-Algorithmus mit vollständiger Pivotsuche bei einer Rechengenauigkeit von zwei Stellen ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 200 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 200 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 200 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

Die Rückwärtssubstitution ergibt $x = (0.5, 0.5)^T$, was sich zwar leicht von dem exakten Ergebnis unterscheidet aber genau dem gerundeten exakten Ergebnis entspricht. Daher ist diese Näherungslösung von guter Qualität.

Aufgabe H2 (Pivotsuche)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -100 & 10 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Bei welchen dieser Matrizen kann auf die Pivotsuche verzichtet werden?

Lösung: Sei

$$D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann hat

$$D^{-1}(A - D) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $-\frac{1}{2}$, 0 und $\frac{1}{2}$, deren Betrag kleiner als eins ist. Folglich ist A eine M-Matrix und daher ist keine Pivotsuche notwendig.

Alternativ: A ist strikt diagonaldominant.
Die Matrix B ist strikt diagonaldominant, weshalb auch hier auf eine Pivotsuche verzichtet werden kann.

Die Eigenwerte der Matrix C sind $3-\sqrt{5}$, $3+\sqrt{5}$ und 42, die alle echt positiv sind. Daher ist C positiv definit und eine Pivotsuche nicht nötig.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Cholesky-Zerlegung)

(a) Implementieren Sie ein Programm, das für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A die Cholesky-Zerlegung durchführt und die untere Dreiecksmatrix L ausgibt. Das Programm soll an geeigneter Stelle überprüfen, ob die Matrix positiv definit ist und gegebenenfalls eine Fehlermeldung ausgeben.

Testen Sie Ihr Programm an den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Implementieren Sie nun ein Programm, das ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von A löst.

Testen Sie Ihr Programm am Gleichungssystem $A_1 x = b$ mit $b = (0, -1, 4)^T$. (vgl. Aufgabe G1)

Lösung: Als Lösung könne Sie sich die Matlab-Dateien `cholesky.m` und `loesung.m` herunterladen. Zudem benötigen Sie die Programme `RueckSub.m` und `VorSub.m` aus der letzten Hausübung.