Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
28.05.2008

8. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Butcher-Schema)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = ty(t), \quad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, sowie das folgende zweistufige, explizite Runge–Kutta Verfahren mittels des dazugehörigen Butcher–Schemas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

a) Berechne zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des Runge–Kutta Verfahrens zu dem Butcher–Schema.

b) Berechne eine Näherung an $y(1)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta Verfahren.

c) Gib den (globalen) Diskretisierungsfehler des Runge–Kutta Verfahrens in $t = 1$ an.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t + \tfrac{1}{2}h, u) = (t + \tfrac{1}{2}h)u \\ k_2 &= f(t + \tfrac{1}{2}h, u + \tfrac{2}{3}hk_1) = (t + \tfrac{1}{2}h)(u + \tfrac{2}{3}h(t + \tfrac{1}{2}h)u) \\ &= (t + \tfrac{1}{2}h)(1 + \tfrac{2}{3}ht + \tfrac{1}{3}h^2)u, \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \phi(t, h; u) &= \tfrac{1}{4}(t + \tfrac{1}{2}h)u + \tfrac{3}{4}(t + \tfrac{1}{2}h)(1 + \tfrac{2}{3}ht + \tfrac{1}{3}h^2)u \\ &= (\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}(1 + \tfrac{2}{3}ht + \tfrac{1}{3}h^2))(t + \tfrac{1}{2}h)u \\ &= (1 + \tfrac{1}{2}ht + \tfrac{1}{4}h^2)(t + \tfrac{1}{2}h)u, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u_j + h\phi(t_j, h; u_j) \\ &= (1 + h(t_j + \tfrac{1}{2}h)(1 + \tfrac{1}{2}ht_j + \tfrac{1}{4}h^2)))u_j \\ &= (1 + ht_j + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{2}h^2t_j^2 + \tfrac{1}{2}h^3t_j + \tfrac{1}{8}h^4)u_j. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= (1 + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{8}h^4)u_0 = (1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{16})1 \\ &= \tfrac{145}{128} \approx 1.1328, \\ u_2 &= (1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{8}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{16})u_1 \\ &= \tfrac{185}{128} \cdot \tfrac{145}{128} = \tfrac{26825}{16384} \approx 1.6373. \end{aligned}$$

c) Es gilt $y(1) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$. Damit ergibt sich für den globalen Diskretisierungsfehler in $t = 1$

$$|y(1) - u_2| \approx 1.6487 - 1.6373 = 0.0114.$$

Aufgabe G23 (Steife Differenzialgleichungen)

Es soll das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden.

(a) Zeige, daß es sich um eine steife Differenzialgleichung handelt.

(b) Schreibe für das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Au_j$, wobei A eine 2×2-Matrix ist, und führe drei Iterationsschritte aus.

(c) Schreibe für das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Bu_j$, wobei B eine 2×2-Matrix ist, und führe drei Iterationsschritte aus.

(d) Vergleiche die Ergebnisse aus Teil (b) und (c). Welches Verfahren beschreibt das qualitative Verhalten der gesuchten Funktion besser?

Lösung:

(a) Die Matrix $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda + 7)^2 - 9$$

und daher die Eigenwerte -10 und -4. Da alle Eigenwerte einen negativen Realteil besitzen und es einen Eigenwert mit einem Realteil, der deutlich kleiner als -1 ist, gibt sowie einen Eigenwert mit Realteil nahe bei -1, handelt es sich um eine steife Differentialgleichung.

(b) Für die Iterationsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens (mit Schrittweite $h = 1$) gilt

$$u_{j+1} = u_j + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_j = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right) u_j = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} u_j.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ -72 \end{pmatrix}, \\ u_3 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ -72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -756 \\ 702 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Für die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens (mit Schrittweite $h = 1$) gilt

$$u_{j+1} = u_j + \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} u_{j+1}.$$

Das Auflösen der Gleichung nach u_{j+1} ergibt

$$u_{j+1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right)^{-1} u_j = \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} u_j.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
u_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
u_1 &= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.290909 \\ 0.109091 \end{pmatrix}, \\
u_2 &= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{55} \\ \frac{6}{55} \end{pmatrix} = \frac{1}{55^2} \begin{pmatrix} 146 \\ 96 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0482645 \\ 0.0317355 \end{pmatrix}, \\
u_3 &= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{146}{55^2} \\ \frac{96}{55^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{55^3} \begin{pmatrix} 1456 \\ 1206 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.00875131 \\ 0.00724869 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) Offensichtlich liefern beide Verfahren sehr unterschiedliche Ergebnisse. Da es sich um eine steife Differentialgleichung handelt, sollte die Lösung für wachsende t gegen Null gehen. Dieses Verhalten wird vom impliziten Euler-Verfahren offensichtlich besser beschrieben.

Aufgabe G24 (Butcher-Schema)

Zeige, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

mindestens Konsistenzordnung 3 besitzt. **Lösung:** Wir prüfen zunächst, ob die Voraussetzung von Satz 7.1.6 gilt, d.h. ob $\gamma_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}$ gilt. Dies ist offensichtlich erfüllt. Nach dem Satz besitzt das Verfahren nun für alle mindestens p-mal stetig differenzierbaren Funktionen die Konsistenzordnung $p = 1$, falls

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i = 1.$$

Da hier

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

gilt, ist das Verfahren also mindestens von Konsistenzordnung 1. Nachprüfen der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i = \frac{1}{2}$$

also hier

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

zeigt die Konsistenz der Ordnung 2.
Für Konsistenz der Ordnung 3 müsste gelten:

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \gamma_i^2 = \frac{1}{3},$$
$$\sum_{i,j=1}^{r} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j = \frac{1}{6}.$$

Die erste Bedingung

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{3}) + \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{6}{16} = -\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{6}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16}{3 \cdot 16} = \frac{1}{3}$$

ist hier wieder erfüllt. Wegen $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$ wird die 2.Bedingung zu

$$\beta_2 \alpha_{21} \gamma_1 + \beta_3 \alpha_{31} \gamma_1 + \beta_3 \alpha_{32} \gamma_2 + \beta_4 \alpha_{41} \gamma_1 + \beta_4 \alpha_{42} \gamma_2 + \beta_4 \alpha_{43} \gamma_3 = \frac{1}{6}.$$

Da $\gamma_1 = 0$ ist, liefert einsetzten

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) =$$
$$-\frac{1}{24} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} = -\frac{1}{24} + \frac{10}{48} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Die zweite Bedingung ist also ebenfalls erfüllt. Damit besitzt das Verfahren mindestens Konsistenzordnung 3.

Hausübung

Aufgabe H22 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Gib für folgende Verfahren die Verfahrensgleichungen für u_{j+1} an und verwende die konstante Schrittweite $h = \frac{1}{10}$, um die Näherung u_{10} an $y(1)$ zu bestimmen:

- Verfahren von Heun,
- Klassiches Runge-Kutta-Verfahren (RK4).

Vergleiche Deine Ergebnisse miteinander, mit dem expliziten Eulerverfahren und der exakten Lösung $e = 2.7182818\ldots$.

Lösung:

Die Verfahrensgleichung für das Verfahren von Heun (auch: erstes Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) lautet allgemein:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_j + hf(t_j, u_j)))$$

Einsetzen von $f(t_j, u_j) = u_j$ ergibt

$$u_{j+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2})u_j.$$

Die Verfahrensgleichung für das klassische Runge-Kutta-Verfahren (auch: RK4) lautet:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

für unser AWP sind dabei

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_j, u_j) = u_j, \\
k_2 &= f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1) = u_j + \tfrac{h}{2}u_j, \\
k_3 &= f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_2) = u_j + \tfrac{h}{2}(u_j + \tfrac{h}{2}u_j), \\
k_4 &= f(t_{j+1}, u_j + hk_3) = u_j + h(u_j + \tfrac{h}{2}(u_j + \tfrac{h}{2}u_j)).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u_{j+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})u_j.$$

Mit den beiden Verfahren erhält man auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Schrittweite $h = 0.1$ folgende Näherungswerte:

	Stützpunkte	Heun	RK4
i	t_i	u_i	u_i
0	0	1	1
1	0.1	1.105	1.1052
2	0.2	1.221	1.2214
3	0.3	1.3492	1.3499
4	0.4	1.4909	1.4918
5	0.5	1.6474	1.6487
6	0.6	1.8204	1.8221
7	0.7	2.0116	2.0138
8	0.8	2.2228	2.2255
9	0.9	2.4562	2.4596
10	1.0	2.7141	2.7183

Wie man sieht, liefert das klassische Runge-Kutta-Verfahren die beste Näherung u_{10} an e. Für das explizite Eulerverfahren ergibt sich die Verfahrensfunktion $u_{j+1} = (1 + h)u_j$, und damit $u_{10} = (1.1)^{10}u_0 \approx 2.5937$. Die schlechteste Näherung erzielt also das explizite Euler–Verfahren mit $u_{10} = 2.5937$.

Aufgabe H23 (Konsistenz)

Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren zum Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, $y(a) = y_0$, gegeben:

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}$$

Beweise, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren zu dem gegebenen Butcher-Schema unter der Voraussetzung, dass $f(t, y(t))$ zweimal stetig differenzierbar ist, konsistent von der Ordnung 2 ist.
Hinweis: Benutze eine Taylorentwicklung der $k_j(t + h\gamma_j, ...)$ nach h in $h = 0$ der Ordnung 2 (also bis $\mathcal{O}(h^2)$) mit $y(t)$ statt u in der Beschreibung der k_j, $j = 1, 2$.

Lösung: Nach Definition gilt $\Phi(t, h; y(t)) = \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2$ mit

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t + \tfrac{1}{2}h, y(t)), \\
k_2 &= f(t + \tfrac{1}{2}h, y(t) + \tfrac{2}{3}hk_1).
\end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung der Werte $k_j(t + h\gamma_j, ...)$, $j = 1, 2$, in $h = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t, y(t)) + h \cdot [f_t(t, y(t)), f_y(t, y(t))] \cdot [\tfrac{1}{2}, 0]^T + \mathcal{O}(h^2) \\
&= f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2) \\
k_2 &= f(t + \tfrac{1}{2}h, y(t) + \tfrac{2}{3}hk_1) \\
&= f(t + \tfrac{1}{2}h, y(t) + \tfrac{2}{3}hf(t, y(t)) + \tfrac{1}{3}h^2 f_t(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3)) \\
&= f(t, y(t)) + h\Big(f_t(t, y(t)), f_y(t, y(t))\Big)\Big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}f(t, y(t)) + \tfrac{2}{3}hf_t(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)\Big)^T + \mathcal{O}(h^2) \\
&= f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + hf_y(t, y(t))\left(\tfrac{2}{3}f(t, y(t)) + \tfrac{2}{3}hf_t(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)\right) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \tfrac{2}{3}hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \tfrac{2}{3}h^2 f_y(t, y(t))f_t(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \tfrac{2}{3}hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\Phi(t, h; y(t)) =& \tfrac{1}{4}(f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)) \\
&+ \tfrac{3}{4}(f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \tfrac{2}{3}hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2)) \\
=& f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

Als Taylorentwicklung von $y(t + h)$ in $h = 0$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}
y(t + h) &= y(t) + hy'(t) + \tfrac{1}{2}h^2 y''(t) + \mathcal{O}(h^3) \\
&= y(t) + hf(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}$$

Somit folgt für den Konsistenzfehler des Verfahrens

$$\begin{aligned}
\tau(t, h) &= \tfrac{1}{h}\left(y(t + h) - y(t) - h\Phi(t, h; y(t))\right) \\
&= \tfrac{1}{h}\big(y(t) + hf(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) \\
&\quad - y(t) - h\Phi(t, h; y(t))\big) \\
&= \tfrac{1}{h}\big(hf(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 f_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^3) \\
&\quad - h(f(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_t(t, y(t)) + \tfrac{1}{2}hf_y(t, y(t))f(t, y(t)) + \mathcal{O}(h^2))\big) \\
&= \tfrac{1}{h}\mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe H24 (Butcher-Schema)

Betrachte das Schema

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\gamma_2 & \frac{1}{3} & & \\
\gamma_3 & \frac{1}{3} & \alpha_{32} & \\
\hline
 & \beta_1 & \beta_2 & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Bestimme die Parameter $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_{32}, \beta_1$ und β_2 so, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren unter den Bedingungen

$$\gamma_i = \sum_j \alpha_{ij} \text{ für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2\gamma_2$$

höchstmögliche Konsistenzordnung besitzt. Gib das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren an.

Lösung: Wegen der geforderten Bedingungen muss gelten:

$$\gamma_2 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{3} + \alpha_{32},$$

Wegen $\gamma_3 = 2\gamma_2 = \frac{2}{3}$ folgt damit $\alpha_{32} = \frac{1}{3}$. Wegen der ersten der beiden geforderten Bedingungen besitzt das Runge-Kutta-Verfahren nach Satz 7.1.6 die Konsistenzordnung $p = 1$, wenn gilt:

$$\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{2} = 1, \text{ also } \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

Nach dem Satz hat ein Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$, falls

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \beta_2\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \beta_2 = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}.$$

Zusammen mit der Konsistenzforderung für $p = 1$ muss damit $\beta_1 = \frac{1}{2} - \beta_2 = 0$ gelten. Damit sind durch die Bedingungen aus Satz 8.1.4 bis Konsistenzordnung $p = 2$ alle Parameter eindeutig bestimmt. Damit bestimmen diese Parameter auch das Verfahren höchster Konsistenzordnung. Das Schema besitzt die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren besitzt damit die Form:

$$u_{j+1} = u_j + h\phi(t_j, h; u_j, u_{j+1}),$$

wobei

$$\phi(t_j, h; u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3,$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, u_j), \\ k_2 &= f(t_j + \frac{1}{3}h, u_j + \frac{1}{3}hk_1), \\ k_3 &= f(t_j + \frac{2}{3}h, u_j + h\frac{1}{3}(k_1 + k_2)). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$u_{j+1} = u_j + h\frac{1}{2}(f[t_j + \frac{1}{3}h, u_j + \frac{1}{3}hf(t_j, u_j)] + f[t_j + \frac{2}{3}h, u_j + h\frac{1}{3}(f(t_j, u_j) + f(t_j + \frac{1}{3}h, u_j + \frac{1}{3}hf(t_j, u_j)))]).$$