Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
6. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt der Kapitel 4 und 5 im Skript.
Die Donnerstag-Übungen wurden wegen des Feiertages verlegt. Bitte beachten Sie die Informationen auf der Webseite.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Störung der rechten Seite)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm, die von der $\|\cdot\|_\infty$-Norm induziert wird.

(b) Die rechte Seite werde nun durch $\Delta b = (-0.1, 0.1, -0.1)^T$ gestört. Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

(c) Lösen Sie nun die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = b + \Delta b$ und vergleichen Sie mit der Abschätzung aus Teil (b).

Lösung:

(a) Die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm ist $\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{6, 12, 5\} = 12, \\ \|A^{-1}\|_\infty &= \max\{15, 5, 2\} = 15. \end{aligned}$$

Daher ist $\text{cond}_\infty(A) = 180$.

(b) Sei x die Lösung von $Ax = b$ und $\tilde{x}$ die Lösung von $A\tilde{x} = b + \Delta b$. Dann gilt nach Satz 4.3.3 aus der Vorlesung für den relativen Fehler

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Daher ist

$$180 \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 180 \cdot \frac{0.1}{12} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2}$$

eine obere Schranke für den relativen Fehler.

(c) Mit den Bezeichnungen aus Teil (b) gilt

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{x} = A^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt einen relativen Fehler von

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2},$$

was genau der in Teil (b) errechneten oberen Schranke entspricht. In diesem Fall ist die Abschätzung also scharf.

Aufgabe G2 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führen Sie 4 Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden ?

d) Bestimmen Sie ein maximales Intervall um $x_N = 0$, so daß jeder Startpunkt $x^{(0)}$ aus diesem Intervall gegen $x_N = 0$ konvergiert.

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle zu finden?

Lösung:

a) siehe Abbildung 1

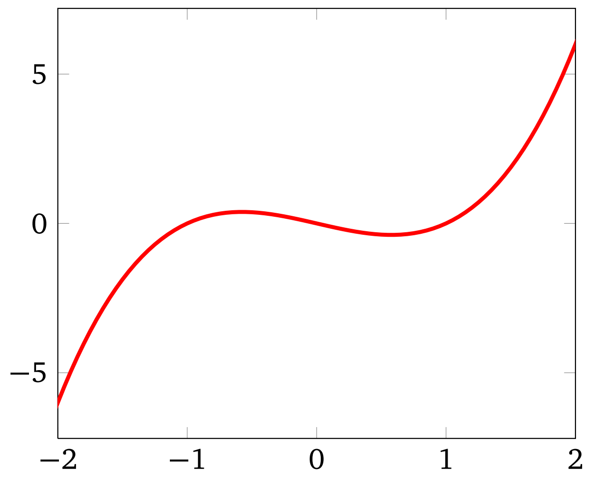


Abbildung 1: Graph der Funktion f auf $[-2, 2]$

b) Die Iterationsvorschrift des eindimensionalen Newton–Verfahrens ist gegeben durch

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Iterationsfolge ist damit

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	2.0000	6.0000	11
1	1.4545	1.6226	5.3467
2	1.1510	0.3738	2.9744
3	1.0253	0.0525	2.1537
4	1.0009	0.0018	2.0054

Wie man sieht, konvergiert das Verfahren gegen die Nullstelle $x = 1$. Graphisch stellt sich die Iteration, wie in Abbildung 2 dar.

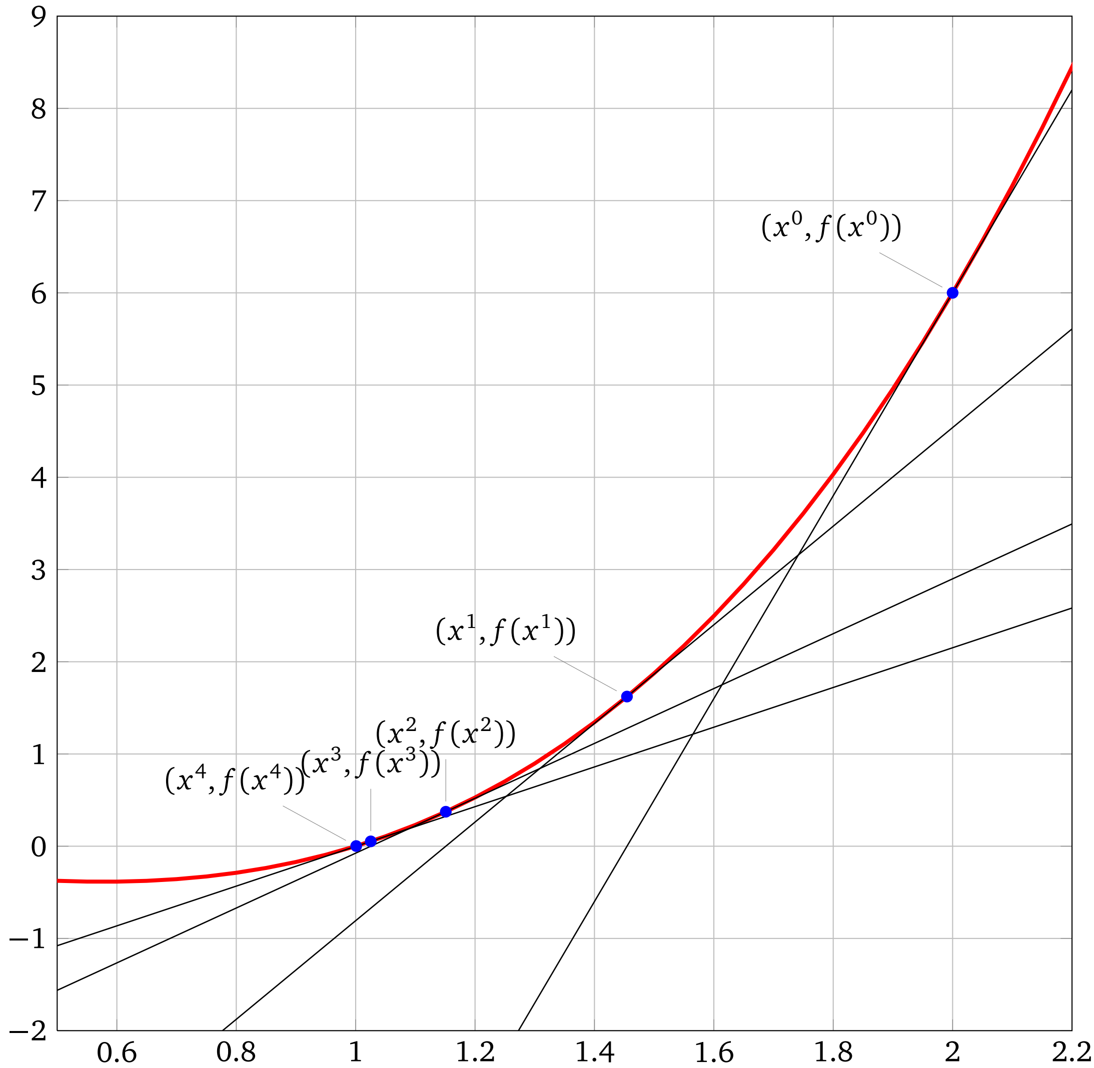


Abbildung 2: Graphische Darstellung der Iteration

c) Der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ ist ungeeignet. Es ergibt sich folgende Iterationsfolge:

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	0.51000	-0.3773	-0.21970
1	-1.2076	-0.5534	3.3749
2	-1.0436	-0.0930	2.2673
3	-1.0026	-0.0052	2.0156

Graphisch bedeutet dies, daß die Tangente in $x^{(0)} = 0.51$ die x-Achse unterhalb -1 schneidet. Anhand des Graphen ist aber leicht einzusehen, daß eine Iterationsfolge, die einmal unterhalb

-1 (bzw. oberhalb 1) angelangt ist, diesen Bereich nicht mehr verläßt. Das Newton-Verfahren konvergiert hier also nicht gegen $x = 0$, sondern gegen die Nullstelle $x = -1$ (bzw. gegen $x = 1$).

d) Das Problem besteht darin, daß die durch $x^{(0)}$ erzeugte Iterationsfolge niemals den Bereich $x \leq -1$ bzw. $x \geq 1$ erreichen darf, da sie dann gegen -1 bzw. 1 konvergiert.

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, muß das Intervall der möglichen Startpunkte symmetrisch um die 0 liegen und die Iterationsfolge darf dieses Intervall nicht verlassen. Um solch ein Intervall zu finden, suchen wir zunächst Startpunkte x, die als nächsten Iterationspunkt $-x$ liefern. Diese erhalten wir aus der Gleichung

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = -x.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Für $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ wird die Iteration in eine Endlosschleife eintreten. Aber für

$$x^{(0)} \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

konvergiert die Folge gegen $x_N = 0$. Dies kann man sich an der Skizze der Funktion klarmachen. Um dies auch analytisch einzusehen, betrachtet man die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1}.$$

Um gegen die Nullstelle $x = 0$ zu konvergieren, muss der Betrag der Iterationspunkte kleiner werden, d.h. es muss gelten

$$|x^{k+1}| < |x^k| \iff |x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1}| < |x^k|$$

Für $x^k > 0$ ist dies ist der Fall, falls

$$\frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1} > 0$$

Wegen $(x^{(k)})^3 - x^{(k)} < 0$ für $x^k \in (0, \frac{1}{\sqrt{5}})$ muss hier dann auch $3(x^{(k)})^2 - 1 < 0$ gelten was äquivalent ist zu $|x^{(k)}| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, was offensichtlich gilt.
Für $x^k < 0$ muss umgekehrt

$$\frac{(x^{(k)})^3 - x^{(k)}}{3(x^{(k)})^2 - 1} < 0$$

gelten. Wegen $(x^{(k)})^3 - x^{(k)} > 0$ für $x^k \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ muss hier dann auch $3(x^{(k)})^2 - 1 < 0$ gelten was äquivalent ist zu $|x^{(k)}| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, was offensichtlich wieder gilt.
Also haben wir gezeigt, dass das Newton-verfahren hier konvergiert, da die Beträge der Interationspunkte immer kleiner werden, die Iterationspunkte also gegen Null konvergieren.

e) Ganz und gar ungeeignet sind die beiden Extremalpunkte $x_T = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_H = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, da dort die Tangenten waagrecht sind und die x-Achse niemals schneiden. Algebraisch bedeutet dies $f'(x) = 0$ im Nenner !

Ebenfalls ungeeignete Startpunkt sind $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ aus Aufgabenteil d) da diese in ein Endlosschleife führen.

Aufgabe G3 (Newton-Verfahren)
Gegeben sei die Funktion

$$F(x) \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - x_2 - \frac{1}{10} \cdot (1 + x_1^4)^{\frac{1}{4}} \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$, $(k = 0, 1, \ldots)$ an, welches bei der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ entsteht.
b) Berechnen Sie zum Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ die Näherung $x^{(1)}$.

Lösung: Das Newton-Verfahren lautet für $k = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{aligned} F'(x^{(k)}) \cdot s^{(k)} &= -F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + s^{(k)} \end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) von F ergibt sich für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zu:

$$F'(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 - 0.1 \cdot x_1^3 \cdot (1 + x_1^4)^{-\frac{3}{4}} & -1 \\ -1 + 2 \cdot x_1 \cdot e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 & 4 + e^{-x_1^2} \cdot \sin x_2 \end{pmatrix}$$

a) Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der $x^{(k+1)}$ für $k = 0, 1, \ldots$ lautet somit:

$$\begin{pmatrix} 2 - 0.1 \cdot x_1^{(k)3} \cdot (1 + x_1^{(k)4})^{-\frac{3}{4}} & -1 \\ -1 + 2 \cdot x_1^{(k)} \cdot e^{-x_1^{(k)2}} \cdot \cos x_2^{(k)} & 4 + e^{-x_1^{(k)2}} \cdot \sin x_2^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 0.1 \cdot (1 + x_1^{(k)4})^{\frac{1}{4}} \\ x_1^{(k)} - 4 \cdot x_2^{(k)} + e^{-x_1^{(k)2}} \cdot \cos x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

b) Für $k = 0$ erhalten wir mit $x^{(0)} = (0,0)^T$:

$$F(x^{(0)}) = (-0.1, -1.0)^T$$

$$F'(x^{(0)}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$s^{(0)} = (0.2, 0.3)^T$$

$$x^{(1)} = (0.2, 0.3)^T$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

(b) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

(c) Zeigen Sie, dass das (lokale) Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert. Was passiert für $|x| = 1$?

(d) Berechnen Sie nun für den Startpunkt $x^{(0)} = 2$ eine Nullstelle von F mit dem globalisierten Newton-Verfahren mit der Schrittweitenregel von Armijo. Veranschaulichen Sie sich das Verfahren mit Schrittweitensuche an einer Skizze, d.h. zeichnen Sie die Iterierten in Ihre Skizze der Funktion ein.

(e) Welchen Wert hat der Index l aus Satz 5.2.2, ii) in diesem Beispiel?

Lösung:

(a) siehe Abbildung 3

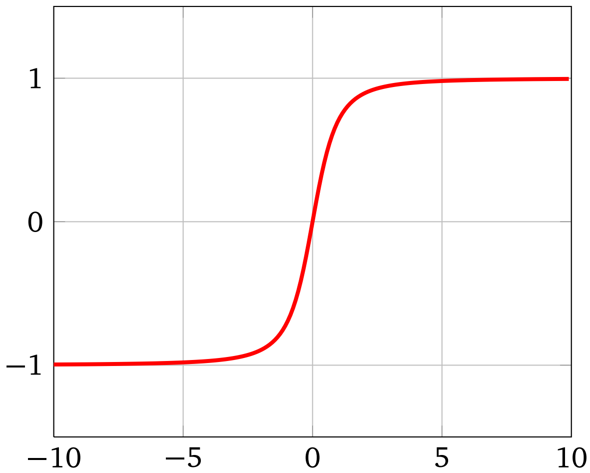


Abbildung 3: Graph der Funktion F auf $[-10, 10]$

(b) Die Newtongleichung lautet

$$F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -F(x^k) \Rightarrow x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)}.$$

Hier ist

$$F'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also lautet die Iterationsvorschrift

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k}{\sqrt{(x^k)^2+1}}((x^k)^2+1)^{\frac{3}{2}} = x^k - x^k((x^k)^2+1) = -(x^k)^3.$$

(c) Für $|x^k| > 1$ gilt $|x^{k+1}| = (x^k)^3 > |x^k|$. Damit sieht man, dass die Folge der (x^k) für alle Startwerte mit $x^0 > 1$ divergiert.
Ist $|x^0| = 1$, so gilt mit der obigen Iterationsvorschrift für $x^0 = 1$, dass $x^k = (-1)^k$, und für $x^0 = -1$, dass $x^k = (-1)^{k+1}$. Beide Folgen (x^k) sind also alternierend mit Werten -1 und 1.

(d) Um globale Konvergenz gewährleisten zu können, wenden wir nun das globalisierte Newtonverfahren auf die gegebene Funktion an. Wir berechnen also eine Suchrichtung s^k aus der Newtongleichung

$$F'(x^k) \cdot s^k = -F(x^k),$$

bestimmen dazu eine geeignete Schrittweite σ_k und nehmen als nächsten Iterationspunkt

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k s^k.$$

Anstatt wie im lokalen Newtonverfahren immer $\sigma_k = 1$ zu wählen, suchen wir das größte $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\}$, welches die Armijo-Bedingung

$$\|F(x^{k+1})\|_2^2 \leq (1 - 2\delta\sigma_k)\|F(x^k)\|_2^2$$

erfüllt. Wir wählen hier $\delta = 10^{-3}$. Bei diesem Vorgehen ergibt sich die folgende Iterationsfolge für $x^0 = 2$:

k	x^k	$-F(x^k)$	$F'(x^k)$	s^k	σ_k	$x^k + \sigma_k s^k$	$\|F(x^{k+1})\|_2^2$	$(1 - \frac{\sigma_k}{500})\|F(x^k)\|_2^2$
0	2	-0.8944	0.08944	-10	1	-8	0.9846	0.7984
					$\frac{1}{2}$	-3	0.9	0.7992
					$\frac{1}{4}$	-0.5	0.2	0.79996
1	$-\frac{1}{2}$	0.4472	0.7155	0.625	1	0.125	0.0154	0.1996
2	$\frac{1}{8}$	-0.124	0.977	-0.127	1	-0.002	$3.8147 \cdot 10^{-6}$	0.0154
3	$-\frac{1}{500}$	- 0.002	1	- 0.002	1	$-8 \cdot 10^{-9}$	$6.4 \cdot 10^{-17}$	$3.992 \cdot 10^{-6}$
...								

Zunächst veranschaulichen wir uns die Schrittweitensuche im 0-ten Schritt, indem wir die Tangente an $F(x^0)$ einzeichnen. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse ergibt x^1 bei $\sigma_0 = 1$. Verkürzt man nun den Schritt s^0 um den Faktor $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ erhält man $x^1 = -3$, bei $\sigma_0 = \frac{1}{4}$ erhält man $x^1 = -0.5$, für welches die Armijo-Bedingung erfüllt ist. In den Schritten $k = 1, 2, 3$ ist keine Schrittweitenverkürzung notwendig. Siehe dazu Abbildung 4.

(e) Der Index $l \geq 0$ aus dem Satz 5.2.2. gibt an, ab welcher Iteration das Verfahren in das lokale Newton-Verfahren übergeht. Da ab $k = 1$ immer Schrittweite $\sigma = 1$ gewählt wird, ist hier $l = 1$, also schon nach der ersten Iteration.

Aufgabe H2 (Newton-Verfahren)

Das Newton-Verfahren soll verwendet werden, um die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

mit dem Kreis um den Ursprung mit Radius 3, also $x_1^2 + x_2^2 = 9$, numerisch zu bestimmen.

(a) Geben Sie eine zweidimensionale Funktion $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ an, deren Nullstellen die Schnittpunkte dieser Ellipse mit dem Kreis sind.

(b) Berechnen Sie für den Startpunkt $(x_1, x_2)^{(0)} = (2, 2)$ einen Schritt des lokalen Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion F.

(c) Beurteilen Sie die Qualität des berechneten Iterationspunktes $x^{(1)}$ anhand einer Skizze.

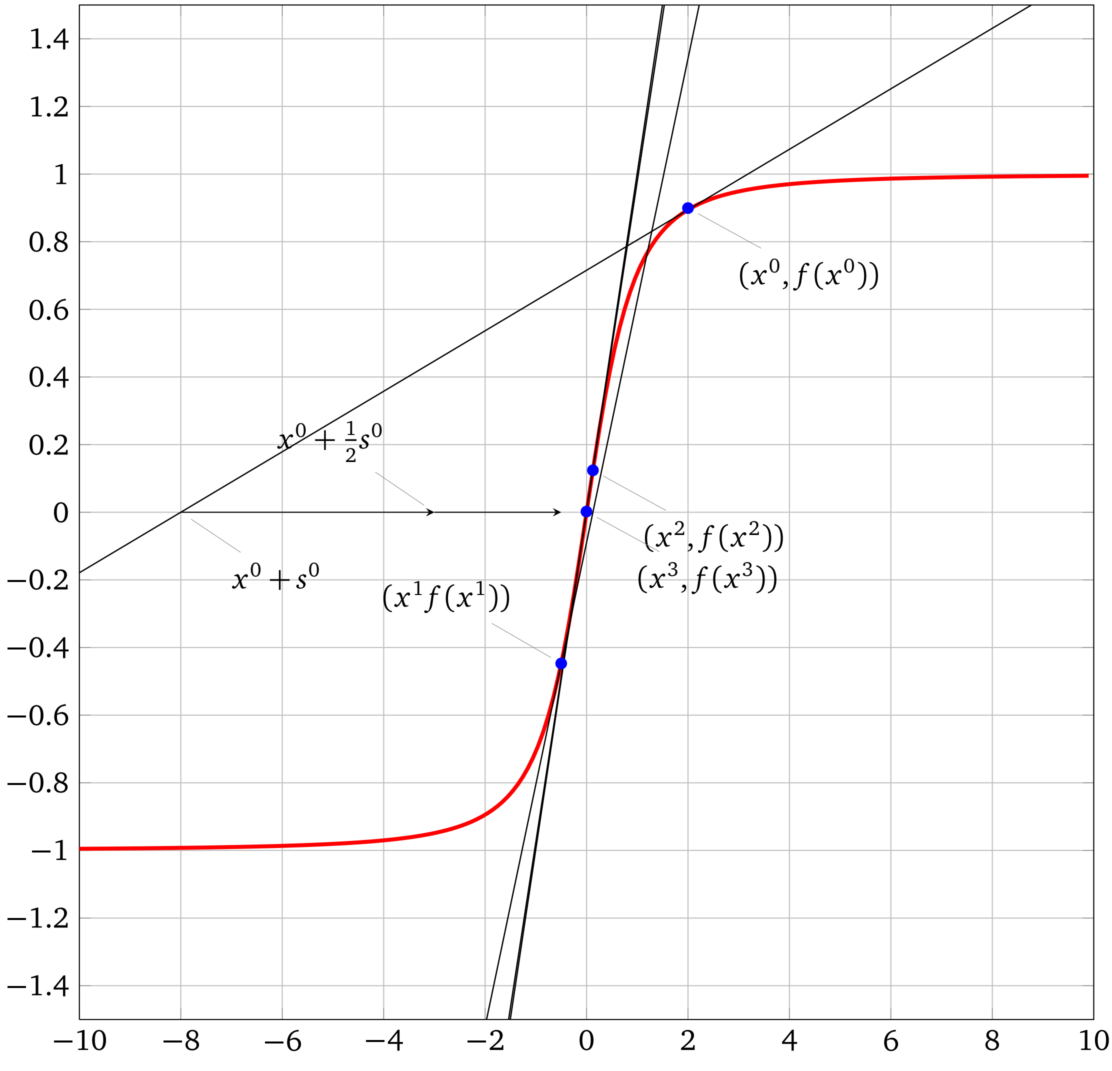


Abbildung 4: Veranschaulichung des Verfahrens für $x^{(0)} = 2$

(d) Überprüfen Sie, ob der Startpunkt $(0,0)$ zum Auffinden einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren geeignet ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Es sollen Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ berechnet werden, für die sowohl $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1$ als auch $x_1^2 + x_2^2 = 9$ gilt. Damit sind diese Punkte genau die Nullstellen der Funktion

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen die Lsg. s^0 des Newtonsystems

$$F'(x^0)s^0 = -F(x^0)$$

und setzen $x^1 = x^0 + s^0$. Um das Newtonsystem aufstellen zu können berechnen wir

$$F'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{8} & \frac{x_2}{2} \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet das Newtonsystem im Punkt $(2,2)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{4}{16} + \frac{4}{4} - 1 \\ 2^2 + 2^2 - 9 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

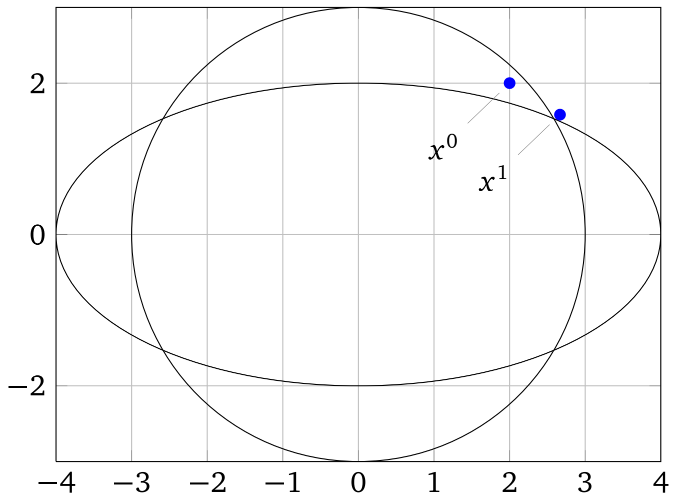
Dieses vereinfachen wir zu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich $s_1^0 = 2/3$ und $s_2^0 = (-1/4 - 1/4 \cdot 2/3) = (-5/12)$ und somit

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-5}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 19/12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.6666666667 \\ 1.5833333 \end{pmatrix}$$

(c) Zu zeichnen ist der Kreis um die Null mit Radius 3 und die Ellipse mit Achsenschnittpunkten 2 und 4. Ausserdem wird der Startpunkt und der erste Iterationspunkt eingezeichnet. Wie man sieht ist schon der erste Iterationspunkt x^1 sehr nahe an einem der Schnittpunkte (Der Schnittpunkt liegt bei $(\sqrt{\frac{20}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}) \approx (2.5819888975, 1.52752523))$.



(d) Für den Startpunkt $(0,0)$ lautet das Newtonsystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dieses ist offensichtlich nicht lösbar und damit ist der Startpunkt ungeeignet.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Lokales Newton-Verfahren)

(a) Schreiben Sie ein Programm, welches das lokale Newton-Verfahren aus der Vorlesung implementiert. Das Verfahren terminiere, falls $\|F(x^{(k)})\| \leq tol$ oder $k \geq k_{\max}$. Es sollte folgende Eingabeparameter haben: Die Funktion $F(x)$ und deren Ableitung, den Startpunkt x^0 und die Anzahl von Iterationen $k_{\max}$, die maximal durchgeführt werden sollen, sowie die Toleranz tol.
Ausgegeben werden sollte der letzte Iterationspunkt x^k, die Anzahl der benötigten Iterationen k und der aktuelle Funktionswert $F(x^k)$ bzw. ein Hinweis auf Erfolg oder Misserfolg des Verfahrens.

(b) Testen Sie Ihr Verfahren an den Funktionen aus G2 und H1, sowie an:
- $F3(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$, für Startpunkte $x^0 \in \{2, -1, 0, 0.00001, 10\}$.
- $F4(x) = \sin(12 \cdot x)$, für Startpunkte $x^0 \in \{0.1, 0.09, 3.14\}$.

(c) Testen Sie Ihr Programm außerdem für weitere sinnvolle Startwerte Ihrer Wahl und versuchen Sie das Verhalten Ihres Programms für die obigen Funktionen zu erklären.

Lösung: Die Programme können von der Website heruntergeladen werden. In den Dateien F1.m, F2.m, F3.m und F4.m sind jeweils die Funktionen und deren Ableitungen definiert. LokalesNewton.m enthält einen Code für das lokale Newton-Verfahren. Mit runF1.m, ..., runF4.m kann man nun das lokale Newton-Verfahren für die verschiedenen Funktionen in Matlab oder Octave testen. Dabei kann man den Startwert, Toleranz und Anzahl der Iterationen beim Aufruf von LokalesNewton(Startwert,Funktion,Toleranz, Anzahl Iterationen) in runFj.m, j=1,2,3,4, ändern.