Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Davorin Lešnik, Ph.D.
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2012
13. Juni 2012

Zum Bearbeiten dieses Aufgabenblattes benötigen Sie den Inhalt von Kapitel 6.1 im Skript.
Wegen des Campus-Festes TU meet&move entfallen an diesem Mittwoch die Nachmittags-Übungen, sowie die Vorlesung. Teilnehmer der betroffenen Gruppen können in dieser Woche eine andere Übung besuchen. Bitte nutzen Sie die freien Plätze in den frühen Mittwoch-Übungen, sowie Gruppe 6.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y - e^t, \quad y(0) = 2.$$

(a) Verwenden Sie nun die folgenden numerischen Verfahren mit Schrittweite 0.5, um auf dem Intervall $[0, 1]$ Näherungswerte für $y(t)$ zu bestimmen:
- Explizites Euler-Verfahren,
- Verfahren von Heun,
- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung).

(b) Die analytische Lösung dieses AWPs lässt sich z.B. durch Variation der Konstanten berechnen und lautet

$$y(t) = (e^{-t} + 1)e^{2t} = e^t + e^{2t}.$$

Skizzieren und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der analytischen Lösung und beurteilen Sie ihre Qualität.

Lösung:

(a) Die Verfahrensvorschriften der verschiedenen Verfahren für das gegebene Problem lassen sich folgendermaßen vereinfachen:
- Euler: $u_{j+1} = (1 + 2h)u_j - he^{t_j}$
- Heun: $u_{j+1} = (1 + 2h + 2h^2)u_j - (\frac{h}{2}(1 + e^h) + h^2)e^{t_j}$
- RK4: Hier ist $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, mit

$$\begin{aligned}
k_1 &= 2u_j - e^{t_j},\\
k_2 &= 2(u_j + \tfrac{h}{2}k_1) - e^{t_j+\frac{h}{2}},\\
k_3 &= 2(u_j + \tfrac{h}{2}k_2) - e^{t_j+\frac{h}{2}},\\
k_4 &= 2(u_j + hk_3) - e^{t_j+h}.
\end{aligned}$$

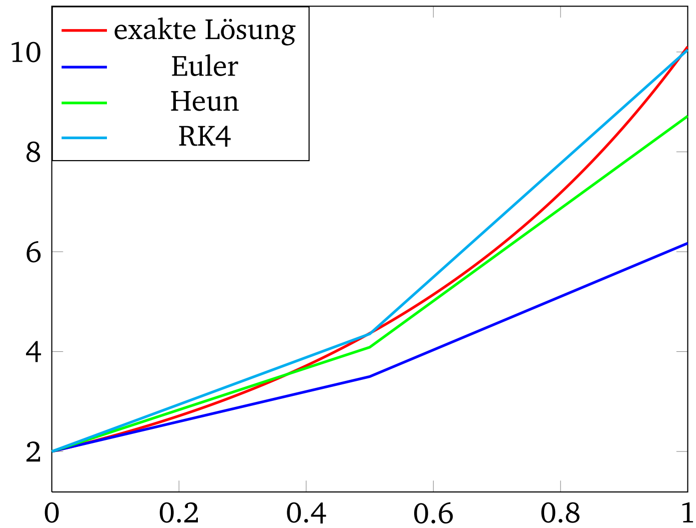
Damit ergeben sich folgende Werte für die u_j:

	Stützpunkte	Euler	Heun	RK4	exakte Lsg.
i	t_i	u_i	u_i	u_i	$y(t_i)$
0	0	2	2	2	2
1	0.5	3.5	4.0878	4.3546	4.367
2	1	6.17	8.7156	10.0426	10.1073

(b) Die Werte der Fehler $|u_i - y(t_i)|$ pro Verfahren und Iteration sind in folgender Tabelle eingetragen:

i	Euler	Heun	RK4
0	0	0	0
1	$\|3.5 - 4.367\| \approx 0.867$	$\|4.0878 - 4.367\| \approx 0.2792$	$\|4.3546 - 4.367\| \approx 0{,}0124$
2	$\|6.17 - 10.1073\| \approx 3{,}9373$	$\|8.7156 - 10.1073\| \approx 1{,}3917$	$\|10.0426 - 10.1073\| \approx 0{,}0647$

Wie man hieran sieht, sind die Näherungen des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens die besten Näherungen an die exakte Lösung. Zeichnet man die Näherungspunkte und die exakte Lösung in eine Skizze, werden die Unterschiede zwischen den drei Verfahren nochmal deutlich.



Aufgabe G2 (Butcher-Schema)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t\,y(t), \quad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, sowie das folgende zweistufige, explizite Runge–Kutta Verfahren mittels des dazugehörigen Butcher–Schemas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

a) Berechnen Sie zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des Runge–Kutta Verfahrens zu dem Butcher–Schema.

b) Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta Verfahren.

c) Geben Sie den (globalen) Diskretisierungsfehler des Runge–Kutta Verfahrens in $t = 1$ an.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t+\tfrac{1}{2}h, u) = (t+\tfrac{1}{2}h)u \\
k_2 &= f(t+\tfrac{1}{2}h, u+\tfrac{2}{3}hk_1) = (t+\tfrac{1}{2}h)(u+\tfrac{2}{3}h(t+\tfrac{1}{2}h)u) \\
&= (t+\tfrac{1}{2}h)(1+\tfrac{2}{3}ht+\tfrac{1}{3}h^2)u,
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\phi(t,h;u) &= \tfrac{1}{4}(t+\tfrac{1}{2}h)u + \tfrac{3}{4}(t+\tfrac{1}{2}h)(1+\tfrac{2}{3}ht+\tfrac{1}{3}h^2)u \\
&= (\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}(1+\tfrac{2}{3}ht+\tfrac{1}{3}h^2))(t+\tfrac{1}{2}h)u \\
&= (1+\tfrac{1}{2}ht+\tfrac{1}{4}h^2)(t+\tfrac{1}{2}h)u,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
u_{j+1} &= u_j + h\phi(t_j,h;u_j) \\
&= (1+h(t_j+\tfrac{1}{2}h)(1+\tfrac{1}{2}ht_j+\tfrac{1}{4}h^2)))u_j \\
&= (1+ht_j+\tfrac{1}{2}h^2+\tfrac{1}{2}h^2t_j^2+\tfrac{1}{2}h^3t_j+\tfrac{1}{8}h^4)u_j.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1, \\
u_1 &= (1+\tfrac{1}{2}h^2+\tfrac{1}{8}h^4)u_0 = (1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}\tfrac{1}{16})1 \\
&= \tfrac{145}{128} \approx 1.1328, \\
u_2 &= (1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{8}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}\tfrac{1}{16})u_1 \\
&= \tfrac{185}{128}\cdot\tfrac{145}{128} = \tfrac{26825}{16384} \approx 1.6373.
\end{aligned}$$

c) Es gilt $y(1) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$. Damit ergibt sich für den globalen Diskretisierungsfehler in $t = 1$

$$|y(1) - u_2| \approx 1.6487 - 1.6373 = 0.0114.$$

Aufgabe G3 (Butcher-Schema)
Wir betrachten das Schema

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\gamma_2 & \frac{1}{3} & & \\
\gamma_3 & \frac{1}{3} & \alpha_{32} & \\
\hline
 & \beta_1 & \beta_2 & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Bestimmen Sie die Parameter $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_{32}, \beta_1$ und β_2 so, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren unter den Bedingungen

$$\gamma_i = \sum_j \alpha_{ij} \text{ für } i = 1,2,3 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2\gamma_2$$

höchstmögliche Konsistenzordnung besitzt. Geben Sie das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren an.

Lösung: Wegen der geforderten Bedingungen muss gelten:

$$\gamma_2 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{3} + \alpha_{32},$$

Wegen $\gamma_3 = 2\gamma_2 = \frac{2}{3}$ folgt damit $\alpha_{32} = \frac{1}{3}$. Wegen der ersten der beiden geforderten Bedingungen besitzt das Runge-Kutta-Verfahren nach Satz 6.1.6 die Konsistenzordnung $p = 1$, wenn gilt:

$$\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{2} = 1, \text{ also } \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

Nach dem Satz hat ein Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$, falls

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \beta_2\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \beta_2 = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}.$$

Zusammen mit der Konsistenzforderung für $p = 1$ muss damit $\beta_1 = \frac{1}{2} - \beta_2 = 0$ gelten. Damit sind durch die Bedingungen aus Satz 6.1.6 bis Konsistenzordnung $p = 2$ alle Parameter eindeutig bestimmt. Damit bestimmen diese Parameter auch das Verfahren höchster Konsistenzordnung. Das Schema besitzt die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren besitzt damit die Form:

$$u_{j+1} = u_j + h\phi(t_j, h; u_j, u_{j+1}),$$

wobei

$$\phi(t_j, h; u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3,$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, u_j), \\ k_2 &= f(t_j + \frac{1}{3}h, u_j + \frac{1}{3}k_1), \\ k_3 &= f(t_j + \frac{2}{3}h, u_j + h\frac{1}{3}(k_1 + k_2)). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$u_{j+1} = u_j + h\frac{1}{2}(f[t_j + \frac{1}{3}h, u_j + \frac{1}{3}f(t_j, u_j)] + f[t_j + \frac{2}{3}h, u_j + h\frac{1}{3}(f(t_j, u_j) + f(t_j + \frac{1}{3}h, u_j + \frac{1}{3}f(t_j, u_j))]).$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Entladung eines Kondensators)

Wir betrachten die Entladung eines Kondensators der Kapazität C über einem Ohmschen Widerstand R. Der Schalter S werde zur Zeit $t = 0$ geschlossen; zu diesem Zeitpunkt sei die Spannung am Kondensator U_0. Bezeichnet man mit $U = U(t), t \geq 0$ die Spannung am Kondensator und mit $U_R(t)$ den Spannungsabfall am Widerstand R, so muss offenbar zu jedem Zeitpunkt t gelten:

$$U_R(t) + U(t) = 0,$$

wobei nach dem Ohmschen Gesetz $U_R(t) = R \cdot I(t)$ gilt für die Stromstärke $I(t)$. Die Elektrische Ladung des Kondensators ist $Q(t) = CU(t)$. Für einen idealen Kondensator gilt die Differenzialgleichung $I(t) = Q'(t)$. Damit erhält man für die Spannung $U(t)$ am Kondensator die folgende lineare Differenzialgleichung

$$U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = 0,$$

mit dem Anfangwert $U(0) = U_0$.

(a) Lösen Sie dieses Anfangswertroblem mithilfe der Trennung der Veränderlichen.

(b) Sei nun $U_0 = 1, R = 2$ und $C = \frac{1}{4}$. Berechnen Sie sowohl mit dem expliziten Eulerverfahren, als auch mit dem modifizierten Eulerverfahren (2.Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) jeweils mit Schrittweite $h = \frac{2}{3}$ Näherungswerte für die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems im Intervall $[0, 2]$.

(c) Beurteilen Sie Ihre drei Näherungswerte, indem Sie sie miteinander und mit der exakten Lösung vergleichen.

Lösung: Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement zur Speicherung von Energie in einem elektrischen Feld. Er besteht aus zwei Metallflächen, den Elektroden, die durch einen dazwischenliegenden Isolator getrennt sind. Werden die Elektroden mit den Polen einer Spannungsquelle verbunden, so fließt kurzzeitig ein elektrischer Strom, er lädt eine Elektrode positiv, die andere negativ auf. Diese Ladung des Kondensators bleibt erhalten, wenn er von der Spannungsquelle getrennt wird: der Kondensator behält deren Spannung bei. Entnimmt man dem Kondensator Ladung bzw. einen Strom, sinkt seine Spannung wieder. Die gespeicherte Ladung ist proportional zu der Spannung des Kondensators. Die Proportionalitätskonstante wird als Kapazität bezeichnet, sie ist das wesentliche Merkmal eines Kondensators. Je größer die Kapazität ist, umso mehr Ladung kann ein Kondensator bei einer bestimmten Spannung speichern.
Der elektrische Widerstand (Formelzeichen: R) charakterisiert die Eigenschaft von Materialien, den durch elektrische Felder bzw. Spannungen hervorgerufenen elektrischen Strom zu hemmen.
$U_R + U(t) = 0$ gilt nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz (in einer Masche addieren sich alle Teilspannungen zu Null.)

(a)

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC}dt.$$

und Integration liefert

$$\ln(U(t)) - \ln(U_0) = -\frac{1}{RC}t, \quad \text{falls } U_0 \neq 0,$$

und somit

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

(b) Die AWA lautet also

$$y'(t) = -2y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 2]$$

Nach Vorauss. ist

$$h = 2/3, t_0 = 0, t_1 = 2/3, t_2 = 4/3, t_3 = 2, u_0 = 1.$$

Expl. Euler:

$$u_{j+1} = u_j - 2hu_j = u_j(1 - 4/3) = -1/3u_j.$$

$$u_1 = -1/3$$

$$u_2 = 1/9,$$

$$u_3 = -1/27.$$

Modifizierter Euler:

$$u_{j+1} = u_j - 2h(u_j + h/2(-2u_j)) = u_j(1 - 2h + 2h^2) = u_j(1 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9}) = \frac{5}{9}u_j$$

(c) Vergleich mit der exakten Lösung $y(t) = e^{-2t}$:

t	exakte Lsg.	expl. Euler	mod. Euler
0	1	1	1
2/3	0.26	-1/3 = -0.3333	5/9 = 0.55555
4/3	0.07	1/9 = 0.1111	$(5/9)^2 = 0.3086$
2	0.02	-1/27 =- 0.037037	$(5/9)^3 = 0.17146$

Da das Eulerverfahren hier negative Werte liefert, ist die Approximation offensichtlich sehr schlecht. Das modifizierte Eulerverfahren gibt schon eher das Verhalten der exakten Lsg. wieder, nimmt jedoch nicht stark genug ab.

Aufgabe H2 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Geben Sie für folgende Verfahren die Verfahrensgleichungen für u_{j+1} an und verwenden Sie die konstante Schrittweite $h = \frac{1}{10}$, um die Näherung u_{10} an $y(1)$ zu bestimmen:

- Verfahren von Heun,
- Klassiches Runge-Kutta-Verfahren (RK4).

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse miteinander, mit dem expliziten Eulerverfahren und der exakten Lösung $e = 2.7182818\ldots$.

Lösung:

Die Verfahrensgleichung für das Verfahren von Heun (auch: erstes Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) lautet allgemein:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_j + hf(t_j, u_j)))$$

Einsetzen von $f(t_j, u_j) = u_j$ ergibt

$$u_{j+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2})u_j.$$

Die Verfahrensgleichung für das klassische Runge-Kutta-Verfahren (auch: RK4) lautet:

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

für unser AWP sind dabei

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_j, u_j) = u_j, \\
k_2 &= f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_1) = u_j + \tfrac{h}{2}u_j, \\
k_3 &= f(t_j + \tfrac{h}{2}, u_j + \tfrac{h}{2}k_2) = u_j + \tfrac{h}{2}(u_j + \tfrac{h}{2}u_j), \\
k_4 &= f(t_{j+1}, u_j + hk_3) = u_j + h(u_j + \tfrac{h}{2}(u_j + \tfrac{h}{2}u_j)).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u_{j+1} = (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})u_j.$$

Mit den beiden Verfahren erhält man auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Schrittweite $h = 0.1$ folgende Näherungswerte:

	Stützpunkte	Heun	RK4
i	t_i	u_i	u_i
0	0	1	1
1	0.1	1.105	1.1052
2	0.2	1.221	1.2214
3	0.3	1.3492	1.3499
4	0.4	1.4909	1.4918
5	0.5	1.6474	1.6487
6	0.6	1.8204	1.8221
7	0.7	2.0116	2.0138
8	0.8	2.2228	2.2255
9	0.9	2.4562	2.4596
10	1.0	2.7141	2.7183

Wie man sieht, liefert das klassische Runge-Kutta-Verfahren die beste Näherung u_{10} an e. Für das explizite Eulerverfahren ergibt sich die Verfahrensfunktion $u_{j+1} = (1+h)u_j$, und damit $u_{10} = (1.1)^{10}u_0 \approx 2.5937$. Die schlechteste Näherung erzielt also das explizite Euler–Verfahren mit $u_{10} = 2.5937$.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Eulerverfahren und Verfahren von Heun)

Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren und das Verfahren von Heun zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Verfahren sollten jeweils als Eingabeparameter den Funktionsnamen der rechten Seite der Differenzialgleichung $f(t, y(t))$, den Anfangswert y_0, die Intervallgrenzen $a = t_0$ und $b = t_N$ sowie die Schrittweite h haben und die Näherungswerte $u_0, \ldots u_N$ zurückgeben. Testen Sie Ihre Programme an den Beispielen aus Aufgabe G1 und H2.

Lösung: Laden Sie sich die matlab-Files `euler.m` `heun.m` sowie `G1.m` und `H2.m` herunter. Die Aufrufe zum Test, d.h. zum Vergleich der Ergebnisse mit den Ergebnissen aus den Lösungen zu G1 bzw. H2 lauten in matlab jeweils:

```
[t,u]=euler('G1', 2, 0, 1, 0.5)
[t,u]=heun('G1', 2, 0, 1, 0.5)
[t,u]=euler('H2', 1, 0, 1, 0.1)
[t,u]=heun('H2', 1, 0, 1, 0.1)
```