Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SoSe 2008
18.06.2008

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Gruppenübung

Lösung zur Aufgabe G31 (Empirischer Korrelationskoeffizient)

Es gilt

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda y_i = \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda \bar{y}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} s_z^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_i - \lambda\bar{y})^2 = \frac{\lambda^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \lambda^2 s_y^2, \\ s_{xz} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\lambda y_i-\lambda\bar{y}) = \frac{\lambda}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\ &= \lambda s_{xy}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$r_{xz} = \frac{s_{xz}}{s_x s_z} = \frac{\lambda s_{xy}}{\lambda s_x s_y} = r_{xy}.$$

Lösung zur Aufgabe G32 (Zweidimensionale Messreihen)

(a) Die Daten sind in Abbildung 1 graphisch dargestellt.

(b) Um die empirische Kovarianz berechnen zu können, müssen erst die arithmetischen Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1008}{20} = 50.4,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{712.8}{20} = 35.64$$

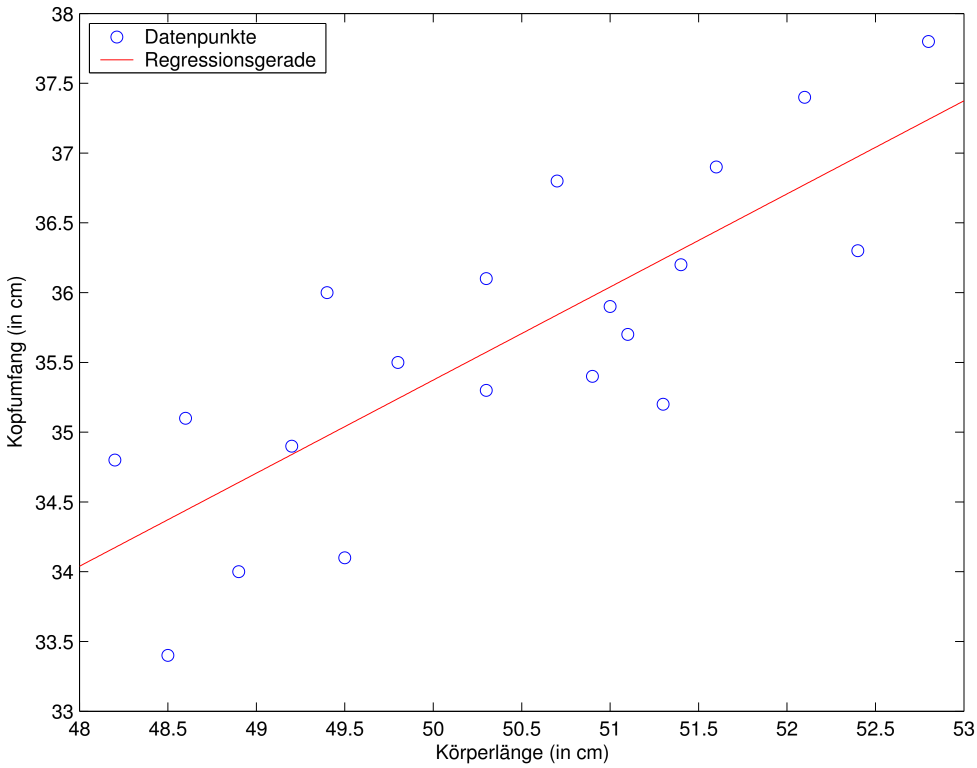

Abbildung 1: Die Daten und die Regressionsgerade.

berechnet werden. Dann gilt für die empirische Kovarianz

$$s_{xy} = \frac{1}{19}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - 20\bar{x}\bar{y}\right) \approx 1.2168421053.$$

Zur Bestimmung des empirischen Korrelationskoeffizienten werden noch die empirischen Streuungen

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{19}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20\bar{x}^2\right)} \approx 1.3506333797,$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{19}\left(\sum_{i=1}^{20} y_i^2 - 20\bar{y}^2\right)} \approx 1.1208079792$$

benötigt. Daraus folgt

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \approx 0.8038324531.$$

Dies zeigt, daß der Zusammenhang zwischen x und y gut durch eine steigende Gerade beschrieben werden kann.

(c) Für die Koeffizienten der Regressionsgerade gilt

$$\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \approx 0.6670513560,$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \approx 2.020611656$$

Die Regressionsgerade ist in Abbildung 1 darstellt.

(d) Als Schätzwert für den Kopfumfang bei einer Körperlänge von 50 cm erhält man

$$\hat{a} \cdot 50 + \hat{b} \approx 35.3731794576$$

Lösung zur Aufgabe G33 (Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit)

(a) Ist das Ergebnis eines Münzwurfes Kopf, so soll dies mit K bezeichnet werden, ist es Zahl, mit Z. Da zwei Münzwürfe durchgeführt werden, wird ein Ergebnis des Zufallsexperiment als Paar $(i, j) \in \{K, Z\}^2$ dargestellt, wobei i das Ergebnis des ersten Münzwurfes und j das Ergebnis des zweiten Münzwurfes ist. Die Ergebnismenge ist

$$\Omega = \{K, Z\}^2 = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}.$$

(b) Für die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 gilt

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(K, Z), (Z, Z)\}, \\ A_2 &= \{(K, K).\}, \\ A_3 &= \{(Z, K)\} \end{aligned}$$

Elementarereignisse sind einelementige Ereignisse. Folglich sind A_2 und A_3 Elementarereignisse.

(c) Da beim Münzwurf alle Elementarereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten, gilt für $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \\ P(A_2) &= \frac{1}{4}, \\ P(A_3) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist Sepp gegenüber Hinz und Kunz stark benachteiligt. Folglich ist das Verfahren nicht gerecht.

Hausübung

Lösung zur Aufgabe H31 (Standardabweichung)

a) Einsetzen und Umformen liefert sowohl

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} b \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n} \cdot n \cdot b = a \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b = a \cdot \overline{x} + b \end{aligned}$$

als auch
$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i+b-(a\cdot\overline{x}+b))^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i-a\cdot\overline{x})^2 = a^2\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = a^2\cdot s_x^2. \end{aligned}$$

b) Die mittlere Tagestiefsttemperatur beträgt $\overline{x} = (31+27+\ldots+30)/10 = 308/10 = 30.8$°F. Laut Hinweis gilt für die Umrechnung von °F nach °C:

$$y_i = \frac{5}{9}(x_i-32) = \underbrace{\frac{5}{9}}_{a}\, x_i \underbrace{-\frac{5}{9}\cdot 32}_{b}, \qquad i=1,\ldots,10.$$

Mit Hilfe dieser Umrechnungsformel und der Rechenregel aus a) erhält man als mittlere Tagestiefsttemperatur in °C:

$$\overline{y} = a\cdot\overline{x}+b = \frac{5}{9}\cdot\overline{x} - \frac{5}{9}\cdot 32 = \frac{5}{9}\cdot(30.8-32) = -2/3 \approx -0.6667.$$

Für die empirische Varianz erhalten wir zunächst (in $(°\mathrm{F})^2$):

$$s_x^2 = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2 - 10\overline{x}^2\right) = 11.2\overline{8}$$

und daraus $s_x \approx 3.3599$ °F sowie $s_y = |5/9|\cdot s_x \approx 1.8666$ °C.

Lösung zur Aufgabe H32 (Zweidimensionale Messreihen)

(a) Die Daten sind in Abbildung 2 graphisch dargestellt.

Um den empirischen Korrelationskoeffizienten berechnen zu können, müssen erst die arithmetischen Mittel

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}v_i = \frac{286}{5} = 57.2, \\ \bar{d} &= \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}d_i = \frac{326}{15} = 21.7\overline{3}, \end{aligned}$$

die empirischen Streuungen

$$\begin{aligned} s_v &= \sqrt{\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(v_i-\bar{v})^2} \approx 13.8471245081, \\ s_d &= \sqrt{\frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(d_i-\bar{d})^2} \approx 9.8449890566 \end{aligned}$$

sowie die empirische Kovarianz

$$s_{vd} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}(v_i-\bar{v})(d_i-\bar{d}) \approx -130.4428571429$$

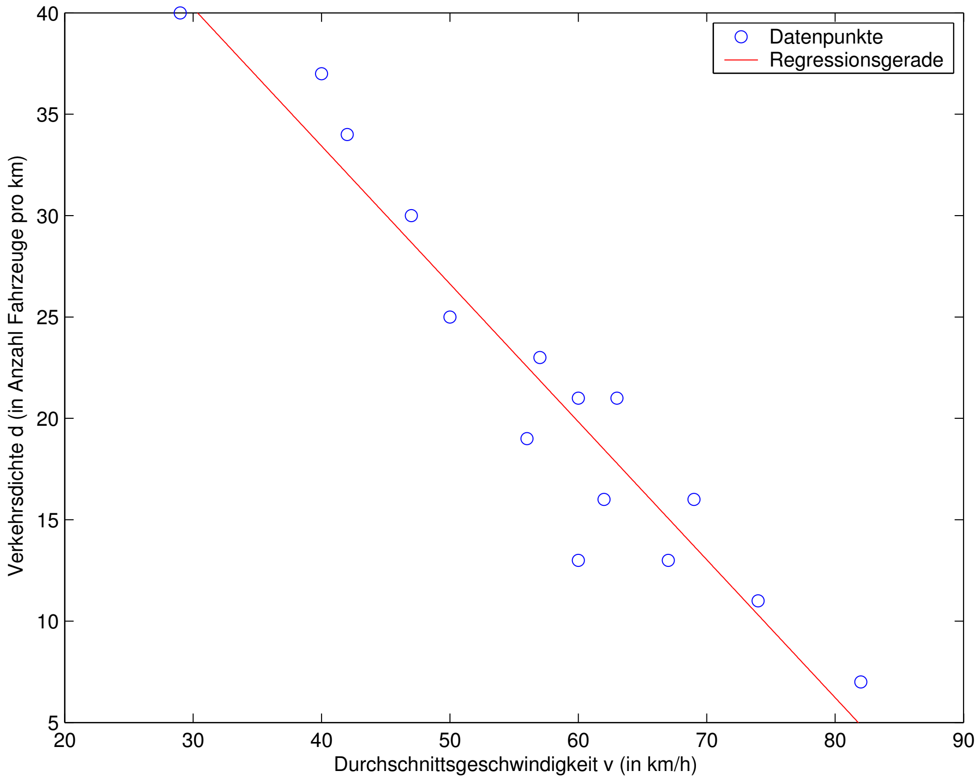

Abbildung 2: Die Daten und die Regressionsgerade.

berechnet werden. Dann folgt

$$r_{vd} = \frac{s_{vd}}{s_v s_d} \approx -0.9568535397.$$

Dies zeigt, daß der Zusammenhang zwischen v und d gut durch eine fallende Gerade beschrieben werden kann.

(b) Für die Koeffizienten der Regressionsgerade gilt

$$\hat{a} = \frac{s_{vd}}{s_v^2} \approx -0.6803009984,$$
$$\hat{b} = \bar{d} - \hat{a}\bar{v} \approx 60.6465504396.$$

Die Regressionsgerade ist in Abbildung 2 darstellt.

(c) Als Schätzwert für eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h erhält man

$$\hat{a} \cdot 55 + \hat{b} \approx 23.2299955297.$$

Lösung zur Aufgabe H33 (Kombinatorik)

Wir betrachten folgende Ereignisse:

S_i: Es befinden sich genau i Buben im Skat, $i = 0, 1, 2$

A_i: Es befinden sich genau i Buben auf Alex' Hand, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

B_i: Es befinden sich genau i Buben auf Bodos Hand, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

C_i: Es befinden sich genau i Buben auf Carls Hand, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

Annahme: alle möglichen Kartenverteilungen sind gleichwahrscheinlich.

- Ereignis A:
$$P(A) = 1 - P(S_0) = 1 - \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} \approx 0.2379.$$
Erläuterung: Es gibt $\binom{32}{2}$ Möglichkeiten, den Skat zu bilden. Von diesen Möglichkeiten sind die für A günstigen genau diejenigen, bei denen aus der Menge der Buben mindestens eine Karte genommen wurde. Wir betrachten das Gegenereignis (also „kein Bube im Skat"), bei dem die beiden Karten im Skat aus der Menge der restlichen Karten (28 an der Zahl) stammen. Dafür gibt es $\binom{28}{2}$ Möglichkeiten. Der Faktor $\binom{4}{0}$ gibt an, dass aus der Menge der Buben keine Karte entnommen wurde, und ist definitionsgemäß gleich 1. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis S_0 beträgt nach Laplace $\frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}}$. Durch Bildung der Gegenwahrscheinlichkeit gelangt man zum gewünschten Resultat.
- Ereignis B:
$$P(B) = P(C_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} \approx 0.4283.$$
- Ereignis C: Da A_3, B_3 und C_3 paarweise unvereinbar sind, gilt:
$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_3 \cup B_3 \cup C_3) = P(A_3) + P(B_3) + P(C_3) \\ &= 3 \cdot P(A_3) = 3 \cdot \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} \approx 0.2202. \end{aligned}$$
- Ereignis D:
$$\begin{aligned} P(D) &= P((A_1 \cap B_1 \cap C_1) \cup (A_2 \cap B_1 \cap C_1) \cup (A_1 \cap B_2 \cap C_1) \cup (A_1 \cap B_1 \cap C_2)) \\ &= P(A_1 \cap B_1 \cap C_1) + 3 \cdot P(A_2 \cap B_1 \cap C_1) \\ &= \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{9} \cdot \binom{3}{1}\binom{19}{9} \cdot \binom{2}{1}\binom{10}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}} + 3 \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8} \cdot \binom{2}{1}\binom{20}{9} \cdot \binom{1}{1}\binom{11}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}} \\ &\approx 0.4310. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe H34 (Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit)

(a) Bezeichne n die Anzahl der Stellen der PIN. Betrachte zunächst einen einzelnen Versuch. Wir wählen als Ergebnismenge Ω_1 die Menge aller möglichen PINs:
$$\Omega_1 = \{0, \ldots, 10^n - 1\}$$
Ist der Versuch des Hackers erfolgreich, so soll dies Ereignis mit E bezeichnet werden, das Ereignis eines Fehlversuchs mit N. Da es nur eine richtige PIN gibt, gilt $P(E) = \frac{1}{10^n}$ und $P(N) = 1 - \frac{1}{10^n}$.
Da der Hacker höchstens drei Versuche macht und wir annehmen, dass der Hacker keine PIN zweimal probiert, ist die Ergebnismenge für diese drei Versuche
$$\Omega_2 = \Omega_1^3 = \{(v_1, v_2, v_3) \mid v_1, v_2 \neq v_1, v_3 \notin \{v_1, v_2\} \in \Omega_1\},$$
die aus $(10^n) \cdot (10^n - 1) \cdot (10^n - 2)$ Elementen besteht.

Sei p die PIN. Dann ist das Ereignis, daß alle Versuche fehlschlagen,

$$A_{NNN} = \{(v_1, v_2, v_3) \in \Omega_2 \mid v_1 \neq p, v_2 \neq p, v_3 \neq p\}.$$

Die Menge A_{NNN} hat $(10^n - 1) \cdot (10^n - 2) \cdot (10^n - 3)$ Elemente. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_{NNN}) = \frac{(10^n - 1) \cdot (10^n - 2) \cdot (10^n - 3)}{(10^n) \cdot (10^n - 1) \cdot (10^n - 2)} = \frac{10^n - 3}{10^n}.$$

Das Ereignis A, daß mindestens einer der Versuche erfolgreich ist, ist

$$A = \Omega_2 \setminus A_{NNN} = A_{NNN}^c$$

Folglich gilt

$$P(A) = 1 - P(A_{NNN}) = 1 - \frac{10^n - 3}{10^n} = \frac{10^n}{10^n} - \frac{10^n - 3}{10^n} = \frac{3}{10^n}.$$

Darauf kommt man auch durch folgende berlegung: Angenommen der erste Versuch v_1 ist die PIN, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(v_1 = p) = \frac{1}{10^n}$ (v_2 und v_3 können beliebige Zahlen der Restmenge sein.). Ist $v_1 \neq p$, aber $v_2 = p$, so geschieht dies mit W-keit $P(v_1 \neq p, v_2 = p) = \frac{10^n-1}{10^n} \frac{1}{10^n-1}$, d.h. im ersten Versuch erwische ich eine der $10^n - 1$ anderen Möglichkeiten , im zweiten Versuch dann genau eine der $10^n - 1$ verbleibenden. Im dritten Versuch ergibt sich analog $P(v_1 \neq p, v_2 \neq p, v_3 = p) = \frac{10^n-1}{10^n} \frac{10^n-2}{10^n-1} \frac{1}{10^n-2}$. Addiert man diese auf, ergibt sich ebenfalls $\frac{3}{10^n}$. In der folgenden Tabelle sind für verschiedene n die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ aufgeführt:

n	1	2	3	4	5	6	7
$P(A)$	0.3	0.03	0.003	0.0003	0.00003	0.000003	0.0000003

Folglich sollte die PIN mindestens sieben Stellen haben, um den Sicherheitsanforderungen zu genügen.

(b) Bei dem Passwort stehen 36 verschiedene Zeichen zur Verfügung. Bezeichnet n wieder die Anzahl der Stellen, so sind 36^n Passwörter möglich. Eine analoge Rechnung wie in Teil (a) ergibt (mit gleicher Bezeichung)

$$P(A) = 1 - \left(\frac{36^n - 3}{36^n} \right) = \frac{3}{36^n}$$

und

n	1	2	3	4	5
$P(A)$	0,083333	0,0023148148	0,0000643004	0,0000017861225	4,9614515E-8

Folglich genügen schon fnf Stellen.