Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Kiehl
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Math. Carsten Ziems

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2008
25.06.2008

# 12. Übungsblatt zur „Mathematik IV für ETiT, iKT, EPE,iST / Mathematik III für Inf Bsc“

Ab diesem Übungsblatt gibt es keine korrigierten Hausübungen mehr.
**Wir empfehlen dringend, die Aufgaben, die Sie in der Gruppenübung nicht bearbeitet haben, nachzuarbeiten und auftretende Fragen in den Sprechstunden zu klären.**
Bitte beachten Sie, dass die Sprechstunden nur bis einschließlich 03.07.2008 stattfinden.

## Gruppenübung

**Aufgabe G34** (Unabhängigkeit)

Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$A$: Der schwarze Würfel zeigt eine Vier.

$B$: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.

$C$: Die Augensumme der beiden Würfel ist durch drei teilbar.

Prüfe die Ereignisse auf paarweise und vollständige Unabhängigkeit. **Lösung:** Wir wählen $\Omega = \{(w,s) : w, s \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ und gehen wie üblich von der Laplace-Annahme aus.
Die Ereignisse sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} A &= \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\}, \\ B &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}, \\ C &= \{(1,2),(2,1),(3,3),(2,4),(4,2),(1,5),(5,1),(4,5),(5,4),(3,6),(6,3),(6,6)\}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{1}{3}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\{(4,4)\}) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cap C) &= P(\{(5,4),(2,4)\}) = \frac{1}{18} = P(A) \cdot P(C), \\ P(B \cap C) &= P(\{(3,3),(6,6)\}) = \frac{1}{18} = P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

sind $A$, $B$ und $C$ paarweise unabhängig. Aber da

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

gilt, sind diese Ereignisse nicht vollständig unabhängig.

**Aufgabe G35** (Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes)

Wird ein Patient untersucht, ob er eine bestimmte Krankheit hat oder nicht, so gibt es zwei Möglichkeiten, eine falsche Diagnose zu stellen: Man spricht von einem Fehler 1. Art, wenn der Patient erkrankt ist, dies jedoch nicht erkannt wird (falsch-negativ-Befund) bzw. von einem Fehler der 2. Art, wenn der Patient für krank erklärt wird, obwohl er gesund ist (falsch-positiv-Befund). Für den ELISA-Test zur Erkennung von Antikörpern gegen die Immunschwäche HIV wird geschätzt, daß Fehler 1. und 2. Art mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 0.02 auftreten. Man gehe davon aus, daß eine zu untersuchende Person mit Wahrscheinlichkeit 0.001 erkrankt ist.

a) Zeichne ein Baumdiagramm für diese Situation.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine zufällig ausgewählte Person für krank erklärt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn sie für krank erklärt wurde?

**Lösung:** Man betrachte folgende Ereignisse:

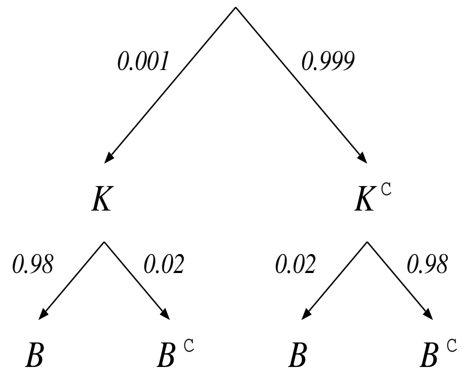
$K$: “Die Person ist erkrankt.”

$B$: “Der Untersuchungsbefund ist positiv.”

Damit ergibt sich aus der Aufgabenstellung:

$$P(K) = 0.001, \quad P(B^C|K) = 0.02, \quad P(B|K^C) = 0.02.$$

a) Mit den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten ergibt sich:




b) (Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit)

$$P(B) = P(B|K) \cdot P(K) + P(B|K^C) \cdot P(K^C) = 0.98 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02096.$$

c) (Formel von Bayes)

$$P(K|B) = \frac{P(B|K) \cdot P(K)}{P(B)} = \frac{0.98 \cdot 0.001}{0.02096} = 0.04676.$$

**Aufgabe G36** (Geometrische Verteilung, Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

a) Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ auf. Ein abergläubischer Spieler beginnt erst mit dem Spiel, nachdem zum ersten Mal eine seiner Unglückszahlen 3, 13, 23 oder 33 aufgetreten ist. Die Zufallsgröße $X$ beschreibe die Anzahl von Runden, die dieser Spieler warten muss, bevor er mit seinem Spiel beginnen kann.

(i) Bestimme die Verteilung von $X$ und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X < 5)$.

(ii) Zeige, dass für eine mit Parameter $p \in ]0,1]$ geometrisch verteilte Zufallsvariable $X$ gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : P(X > k) = (1-p)^k.$$

b) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimme die Verteilung von $X$ sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

c) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $0.05$ innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechne für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

**Lösung:**

a) (i) $X$ ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = 4/37$, d.h.

$$P(\{X = m\}) = \frac{4}{37} \cdot \left(\frac{33}{37}\right)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

bzw. $P(X = m) = 0$ für $m \notin \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 5) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{4}{37} \cdot \left(\frac{33}{37} + \left(\frac{33}{37}\right)^2 + \left(\frac{33}{37}\right)^3\right) \\ &\approx 0.2591. \end{aligned}$$

(ii) Beweis per vollständiger Induktion.
Induktionsverankerung für $k = 0$: Da $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$P(X > 0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = 1 = (1-p)^0.$$

Induktionsschritt: Die Behauptung sei richtig für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} P(X > k+1) &= P(X > k) - P(X = k+1) \\ &= (1-p)^k - p(1-p)^k = (1-p)^{k+1}. \end{aligned}$$

Der Beweis geht auch direkt mit Hilfe der Formel für die geometrische Summe.

b) $X$ ist binomialverteilt mit Parametern $n = 10$ und $p = 0.7$, d.h.

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{10-k}, \quad k = 0, \ldots, 10$$

und $P(X = k) = 0$ sonst. Gefragt ist

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} 0.7^8 \cdot 0.3^2 + \binom{10}{9} 0.7^9 \cdot 0.3 + 0.7^{10} \\ &\approx 0.3828. \end{aligned}$$

c) Aus $P(X = 0) = 0.05$ folgt wegen

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots$$

(bzw. $P(X = k) = 0$ sonst) direkt

$$\exp(-\lambda) = 0.05,$$

also $\lambda = \ln(20)$. Gefragt ist

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &= 1 - \exp(-\lambda) \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6}\right) \approx 0.3518. \end{aligned}$$

**Aufgabe G37** (Erwartungswert und Varianz)

a) Für eine diskrete Zufallsvariable $X$ sei die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion $P$ gegeben:

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0.05 | 0.05 | 0.20 | 0.25 | 0.20 | 0.25 |

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(0 \leq X < 3)$ und $P(X > 2)$ sowie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

b) Die Zufallsvariable $X$ sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Bestimme die Verteilungsfunktion von $X$.
2) Ermittle die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X^2$.
3) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

**Lösung:**

a) Das Ereignis $\{0 \leq X < 3\}$ ist gleichbedeutend damit, dass $X$ entweder den Wert 0, 1 oder 2 annimmt (man beachte $<$ und $\leq$). Damit folgt

$$\begin{aligned} P(0 \leq X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.05 + 0.2 + 0.25 = 0.5\ . \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.2 + 0.25 = 0.45\ .$$

Den Erwartungswert berechnet man mit Hilfe der im Skript angegebenen Formel:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) \\ &= -1 \cdot 0.05 + 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.25 \\ &= -0.05 + 0.2 + 0.5 + 0.6 + 1 = 2.25. \end{aligned}$$

Für die Varianz beachten wir die Formel $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ und berechnen deshalb zunächst $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i) = (-1)^2 \cdot 0.05 + 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.20 + 4^2 \cdot 0.25 \\ &= 0.05 + 0.2 + 1 + 1.8 + 4 = 7.05. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 7.05 - (2.25)^2 = 1.9875\ .$$

b) 1) Fallunterscheidung:

**(i)** $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^t dt = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}e^t \,|_a^x = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^a\right) = \frac{1}{2}e^x.$$

**(ii)** $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^t dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-t} \,|_0^x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Damit erhalten wir:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{für } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^x, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

2) Für die Verteilungsfunktion $F(X^2)$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 1 - \tfrac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} - \tfrac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} \\ &= 1 - e^{-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert $E(X^2)$ gilt (wegen der Symmetrie der Dichte $f$, mit partieller Integration):

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2\int_0^{\infty} x^2 \cdot \tfrac{1}{2}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = \\ &= \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x}dx = 0 + [2x(-e^{-x})]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-x}dx \\ &= 0 + 2\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

3) Für den Erwartungswert $E(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot \tfrac{1}{2}e^x dx + \int_0^{\infty} x \cdot \tfrac{1}{2}e^{-x}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[x(e^x)\right]_{-\infty}^{0} - \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^x dx + \tfrac{1}{2}\left[x(-e^{-x})\right]_0^{\infty} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}dx \\ &= 0 - \tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2.$$

**Aufgabe G38** (Normalverteilung)

a) Wir gehen von einer normalverteilten Zufallsvariablen $Y$ mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus (kurz: $Y \sim N(0,1)$, auch als Standardnormalverteilung bezeichnet) und betrachten die Zufallsvariable $Z = 5 \cdot Y + 100$. Man kann zeigen, dass $Z$ wieder normalverteilt ist. Überprüfe, dass $E(Z) = 100$ und $Var(Z) = 25$ gilt.

b) Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die Größe (in *mm*) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass $X$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 100 und Varianz 25, also $X \sim N(100, 25)$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(i) $P(X \leq 106)$, (ii) $P(90 \leq X \leq 110)$ und (iii) $P(X > 107)$.
Nutze dabei die Ergebnisse aus a).

**Lösung:**

a) Wir wissen aus dem Skript, dass gilt ($X$ ersetzen wir dabei durch $Y$):

$$\begin{aligned} E(a \cdot Y + b) &= a \cdot E(Y) + b \quad \text{und} \\ Var(a \cdot Y + b) &= a^2 \cdot Var(Y) \end{aligned}$$

für reelle Zahlen $a$ und $b$. Mit $a = 5$ und $b = 100$ folgt hier

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(5 \cdot Y + 100) = 5 \cdot E(Y) + 100 = 5 \cdot 0 + 100 = 100 \quad \text{und} \\ Var(Z) &= Var(5 \cdot Y + 100) = 5^2 \cdot Var(Y) = 25 \cdot 1 = 25. \end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariable $X$ besitzt genau dieselbe Verteilung wie $Z$ aus Teilaufgabe a), nämlich $X \sim N(100, 25)$. Wir können deshalb $X$ durch $5 \cdot Y + 100$ ersetzen und die Verteilungsfunktion $\Phi$ von $Y$ benutzen (also die Standardnormalverteilung). Der Zusammenhang zwischen der Funktion $\Phi$ und der Zufallsvariablen $Y$ lautet nach Definition

$$P(Y \leq y) = \Phi(y).$$

Um $\Phi$ an der Stelle $y$ auszuwerten, benötigen wir die Tabelle im Anhang.

$$\begin{aligned} \text{(i) } P(X \leq 106) &= P(5 \cdot Y + 100 \leq 106) = P(5 \cdot Y \leq 6) \\ &= P\left(Y \leq \frac{6}{5}\right) = P(Y \leq 1.2) \\ &= \Phi(1.2) = 0.8849\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } P(90 \leq X \leq 110) &= P(90 \leq 5 \cdot Y + 100 \leq 110) = P(-2 \leq Y \leq 2) \\ &= P(Y \leq 2) - P(Y \leq -2) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9772 - (1 - 0.9772) = 0.9544\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) } P(X > 107) &= P(5 \cdot Y + 100 > 107) = P(Y > 1.4) \\ &= 1 - P(Y \leq 1.4) = 1 - \Phi(1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0808\ . \end{aligned}$$

Man erkennt, dass der Zusammenhang zwischen $X$ und $\Phi$ lautet:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - 100}{5}\right).$$

Dieser Vorgang heißt Standardisierung (also Erwartungswert $\mu$ abziehen und durch die Standardabweichung $\sigma$ – die Wurzel aus der Varianz – teilen).

**Aufgabe G39** (Tschebyschevsche Ungleichung,Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz)

Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable $X$ angemessen beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von $X$ ($\mathrm{Var}(X) = 0.04(mm^2)$), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 kleiner als $0.1(mm^2)$ ist.

(a) Bestimme eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Benutze dabei den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung von $\bar{X}_{(n)}$ zu bestimmen.

(b) Bestimme die gesuchte Anzahl exakt. Transformiere dazu (an geeigneter Stelle) auf Standardnormalverteilung und benutze die Tabelle aus dem Anhang.

**Lösung:** Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$, die die $n$ Messungen beschreiben, sind unabhhängig und identisch $N(\mu, 0.04)$-verteilt mit dem gesuchten Erwartugswert $\mu$. Dann ist das arithmetische Mittel $\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ nach Satz 11.7.2 $N\left(\mu, \frac{0.04}{n}\right)$-verteilt. Gesucht ist nun das minimale $n$ mit $P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - \mu\big| < 0.1\big) \geq 0.9$.

(a) Es gilt

$$P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - \mu\big| < 0.1\big) = 1 - P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - \mu\big| \geq 0.1\big) = 1 - P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - E(\bar{X}_{(n)})\big| \geq 0.1\big)$$

Nach der Tschebyschevschen Ungleichung ergibt sich:

$$P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - E(\bar{X}_{(n)})\big| \geq 0.1\big) \leq \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_{(n)})}{0.1^2}$$

und somit

$$P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - \mu\big| < 0.1\big) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_{(n)})}{0.1^2} = 1 - \frac{4}{n}.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{4}{n} \geq 0.9 \\ \Leftrightarrow \qquad & n \geq 40. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - \mu\big| < 0.1\big) &= P(-0.1 < \bar{X}_{(n)} - \mu < 0.1) = P\left(\frac{-0.1\sqrt{n}}{0.2} < \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{0.04/n}} < \frac{0.1\sqrt{n}}{0.2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & P\big(\big|\bar{X}_{(n)} - \mu\big| < 0.1\big) \geq 0.9 \\ \Leftrightarrow \qquad & 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1 \geq 0.9 \\ \Leftrightarrow \qquad & \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.95 \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.64 \\ \Leftrightarrow \qquad & n \geq 10.7584 \\ \Leftarrow \qquad & n \geq 11. \end{aligned}$$

Die gesuchte minimale Anzahl ist somit 11.

## Werte $\Phi(z)$ der Verteilungsfunktion der $N(0,1)$–Standardnormalverteilung

Tabelle siehe nächste Seite.

**Arbeiten mit der Tabelle:**
Aus der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeit $\Phi(z)$ für die Standardnormalverteilung ermittelt werden. Aufgrund des Zusammenhanges $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (und damit auch wegen der Symmetrie der Gauß'schen Glockenkurve) sind hier nur die positiven Werte von $z$ zu finden.
Ist nun die Wahrscheinlichkeit $\Phi(z)$ für Werte von $z$ im Intervall von $0$ bis $4.09$ gesucht, so steht $z$ bis zum Zehntel in der linken Randzeile der Tabelle und das Hunderstel findet sich in der Kopfzeile. Dort wo sich die zugehörige Zeile und Spalte kreuzen steht die Wahrscheinlichkeit $\Phi(z)$.
Übersteigt $z$ die Grenze von $4.09$, dann gilt $\Phi(z) \approx 1$ für $z > 4.09$.
Vorsicht ist bei der Umkehrung geboten, bei der eine Wahrscheinlichkeit vorgegeben und das dazugehörige $z$ gesucht ist. Hier muss derjenige Wert $\Phi(z)$ angesehen werden, der den geringeren Abstand zur vorgegebenen Wahrscheinlichkeit hat. Anschließend setzt man $z$ aus der Zeile und Spalte dieses Wertes zusammen. Ist also z.B. die Wahrscheinlichkeit $0.90670$ gegeben, so wird in der Tabelle der Wert $0.90658$ (entspricht einem $z$ von $1.32$ ) gewählt, weil dieser viel näher liegt, als der nächste mögliche Wert von $0.90824$ (wobei dieser ein $z$ von $1.33$ ergäbe).

Anmerkung: Negative Werte werden aus Gründen der Symmetrie nicht angegeben, weil $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ ist.

## Werte der Verteilungsfunktion der N(0,1)-Verteilung

| z \ * | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0* | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1* | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2* | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3* | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4* | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5* | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6* | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7* | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8* | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9* | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0* | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1* | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2* | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3* | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4* | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5* | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6* | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7* | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8* | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9* | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0* | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1* | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2* | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3* | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4* | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5* | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6* | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7* | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8* | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9* | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0* | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| 3,1* | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2* | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| 3,3* | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4* | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| 3,5* | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| 3,6* | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| 3,7* | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| 3,8* | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| 3,9* | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |
| 4,0* | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99997 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 | 0,99998 |