
Stochastische Signale und Systeme

Zusammenfassung Formeln

Autor: Daniel Thiem - studium@daniel-thiem.de

Version 0.8.4 - 24.09.2012



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik & reine Stochastik	5
1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	5
1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	5
1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen	5
1.2 Verteilungsfunktion	5
1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion	6
1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion	6
1.3 Verteilungen	6
1.3.1 Normalverteilung	6
1.3.2 Rechteckverteilung	7
1.3.3 Exponentialverteilung	7
1.4 Formel von Bayes	7
1.5 Erwartungswerte	7
1.5.1 Erwartungswertberechnung	7
1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte	8
1.6 Varianz	8
1.6.1 Berechnung der Varianz	8
1.6.2 Rechenregeln für Varianzen	8
1.7 Konvergenz	9
1.7.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)	9
1.7.2 Konvergenz im “Mean Square Sense”	9
1.7.3 Convergence in Probability	9
1.7.4 Convergence in Distribution	9
1.7.5 Gewichtung der Konvergenzen	9
2 Discrete-Time-Fourier-Transformation	10
2.1 Abtastung	10
2.1.1 Im Zeitbereich	10
2.1.2 Im Frequenzbereich	10
2.2 Transformation	10
2.2.1 Rücktransformation	10
2.2.2 Zusammenhang Ω und n	11

2.2.3	Dirac-Kamm	11
2.2.4	Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall	11
3	Prozesse	12
3.1	Strikte Stationarität	12
3.2	Second order moment function(SOMF)	12
3.2.1	Stationär im weiteren Sinne	12
3.2.2	Eigenschaften der SOMF	12
3.3	Cross-SOMF	12
3.3.1	Gemeinsame Stationarität (joint stationary)	13
3.3.2	Eigenschaften der Cross-SOMF	13
3.3.3	Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF	13
3.3.4	Orthogonalität	13
3.4	Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)	13
3.4.1	Eigenschaften der Kovarianz	14
3.4.2	Überführung der Central-SOMF in die Varianz	14
3.5	Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)	14
3.5.1	Eigenschaften der Kreuzkovarianz	14
3.5.2	Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz	14
3.6	Komplexe Prozesse	14
3.6.1	Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess	15
3.6.2	SOMF eines Komplexen Zufallsprozess	15
3.6.3	cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse	15
3.6.4	Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess	15
3.6.5	Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse	15
3.6.6	Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse	15
4	Spektraldichten (Power Spectral Density)	16
4.1	Leistungsdichte	16
4.1.1	Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD)	16
4.1.2	Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses	17
4.1.3	Kreuzleistungsdichte (cross-power density)	17
4.1.4	Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse	17
4.1.5	Wiener-Khinchine theorem	18
4.1.6	Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF	18
4.2	Kohärenz (coherence)	18
4.2.1	Eigenschaften der Kohärenz	18
4.3	Root Mean Square (RMS) und Gleichstrom (DC) Werte	19
4.3.1	DC-Values	19
4.3.2	Normalisierte DC-Leistung	19

4.3.3	RMS-Value	19
4.4	Spektrum	19
4.4.1	Spektrum eines stationären Zufallsprozesses	19
4.4.2	Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse	20
5	Filter	21
5.1	Lineare Filter	21
5.1.1	Stabilität	21
5.1.2	Eigenschaften eines Linearen Filters	21
5.1.3	Instabiler linearer Filter	21
5.1.4	Kreukovarianz des Ausgangs des Filters	22
5.1.5	Kreukovarianz des Ausgangs zweier Filter	22
5.1.6	Kaskade linearer Filter	22
5.2	Matched Filter	22
5.2.1	Annahmen des Matched Filters	23
5.2.2	Ziel des Matched Filters	23
5.2.3	Übertragungsfunktion des Matched Filters	23
5.2.4	Matched Filter für Weißes Rauschen	23
5.3	Wiener Filter	24
5.3.1	Ziel des Wiener Filters	24
5.3.2	Annahmen des Wiener Filters	24
5.3.3	Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters	24
5.3.4	Mean Square Error des Wiener Filters	25
5.3.5	Der Wiener Filter mit additivem Rauschen	25
6	Sonstiges	26
6.1	Spezielle Funktionen	26
6.1.1	Gaussian white noise process	26
6.1.2	Kronecker delta function	26
6.2	Mathematische nützliche Formeln	26
6.2.1	Ungleichung von Schwarz	26
6.2.2	Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen	27

Vorwort

Fehler und Verbesserungen bitte an studium@daniel-thiem.de senden oder als Issue bei <https://github.com/Tyde/stosigsysfs/issues> melden. Der Quelltext dieser Formelsammlung ist auf <https://github.com/Tyde/stosigsysfs> und darf gerne erweitert werden.

1 Kombinatorik & reine Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Sei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.1)$$

1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0 \quad (1.2a)$$

$$f_X(x) = P(X = x) \quad (1.2b)$$

1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen

Sei $Y = g(X)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Y , $f_y(t)$, sei gesucht, während die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(t)$ gegeben ist,

$$f_y(t) = f_x(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1} \right| \quad (1.3)$$

1.2 Verteilungsfunktion

$f(t)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen X

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.4)$$

1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (1.5a)$$

$$F_X(\infty) = 1 \quad (1.5b)$$

$$F_X(-\infty) = 0 \quad (1.5c)$$

$F_X(x)$ ist rechtsstetig, d.h.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x) \quad (1.5d)$$

1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion

$$F(a-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x - \epsilon) \quad (1.6a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-) \quad (1.6b)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (1.6c)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-) \quad (1.6d)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-) \quad (1.6e)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a) \quad (1.6f)$$

1.3 Verteilungen

1.3.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (1.7)$$

1.3.2 Rechteckverteilung

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b] \\ 1 & x > b \end{cases} \quad (1.9)$$

1.3.3 Exponentialverteilung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

1.4 Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cdot P(B|A_k))}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad (1.12)$$

1.5 Erwartungswerte

1.5.1 Erwartungswertberechnung

Allgemein

Sei $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (1.13)$$

Erweitert

Sei $Y = g(X)$ und $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (1.14)$$

1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

Sei A eine von B unabhängige Zufallsvariable

$$E[A \cdot B] = E[A] \cdot E[B] \quad (1.15)$$

Sei X eine Zufallsvariable und a, b jeweils Konstanten

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad (1.16)$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$E \left[\sum_{i=0}^n X_i \right] = \sum_{i=0}^n E[X_i] \quad (1.17)$$

1.6 Varianz

1.6.1 Berechnung der Varianz

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (1.18)$$

1.6.2 Rechenregeln für Varianzen

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(x) \quad (1.19)$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\text{Var} \left[\sum_{i=0}^n X_i \right] = \sum_{i=0}^n \text{Var}[X_i] \quad (1.20)$$

1.7 Konvergenz

Es wird eine Konvergenz von Zufallsvariablen X_k mit $k = 0, 1, 2, \dots$ betrachtet:

1.7.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)

$$P \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - X| = 0 \right) = 1 \quad (1.21)$$

1.7.2 Konvergenz im "Mean Square Sense"

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[|X_k - X|^2 \right] = 0 \quad (1.22)$$

1.7.3 Convergence in Probability

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|X_k - X| > \epsilon) = 0 \quad (1.23)$$

1.7.4 Convergence in Distribution

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{X_k}(x) = F_X(x) \quad \text{Für alle stetigen Punkte } x \text{ aus } F_X \quad (1.24)$$

1.7.5 Gewichtung der Konvergenzen

- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in probability (1.7.3)
- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in the MSS (1.7.2), provided second order moments exist.
- Convergence in the MSS (1.7.2) implies convergence in probability (1.7.3).
- Convergence in probability (1.7.3) implies convergence in distribution (1.7.4).

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation

2.1 Abtastung

2.1.1 Im Zeitbereich

Sei $x_c(t)$ das zu abtastende Signal und $T_s = \frac{1}{f_s}$ die Abtastdauer bzw. Abtastfrequenz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (2.1)$$

2.1.2 Im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s})) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s) \quad \text{mit} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.3)

2.2 Transformation

2.2.1 Rücktransformation

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.4)$$

2.2.2 Zusammenhang Ω und n

ACHTUNG: Dieser Zusammenhang ist in SSS etwas anders im Gegensatz zu dem Hilfsblatt von DSS

$$\omega = \Omega T_s \quad (2.5)$$

2.2.3 Dirac-Kamm

$$\eta(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi l) \quad (2.6)$$

2.2.4 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall

1. Zeitkontinuierliches $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ berechnen
2. Formel aus (2.2.2) einsetzen, um $H(j\Omega)$ zu erreichen

3 Prozesse

3.1 Strikte Stationarität

$$F_x(x_1, \dots, x_N; n_1, \dots, n_N) = F_x(x_1, \dots, x_N; n_1 + n_0, \dots, n_N + n_0) \quad \text{mit } N \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

3.2 Second order moment function(SOMF)

$$r_{XX}(n_1, n_2) = E[X(n_1)X(n_2)] \quad (3.2)$$

3.2.1 Stationär im weiteren Sinne

$$E[X(n)] = \text{const.} \quad (3.3a)$$

$$r_{XX}(n_1, n_2) = r_{XX}(\kappa) = E[X(n + \kappa) \cdot X(n)] \quad \text{mit } \kappa = |n_2 - n_1| \quad (3.3b)$$

3.2.2 Eigenschaften der SOMF

$$r_{XX}(0) = E[X(n)^2] = \sigma_X^2 + \mu_x^2 \quad (3.4a)$$

$$r_{XX}(\kappa) = r_{XX}(-\kappa) \quad (3.4b)$$

$$r_{XX}(0) \geq |r_{XX}(\kappa)| \quad , |\kappa| > 0 \quad (3.4c)$$

3.3 Cross-SOMF

$$r_{XY}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot Y(n_2)] \quad (3.5)$$

3.3.1 Gemeinsame Stationarität (joint stationary)

Sei $X(n)$ und $Y(n)$ nach (3.2.1) *stationär*, dann sind die Prozesse gemeinsam stationär, wenn gilt:

$$r_{XY} = r_{XY}(n_1 - n_2) = r_{XY}(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = n_1 - n_2 \quad (3.6)$$

3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF

$$r_{XY}(-\kappa) = r_{YX}(\kappa) \quad (3.7a)$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \sqrt{r_{XX}(0) \cdot r_{YY}(0)} \quad (3.7b)$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \frac{1}{2}(r_{XX}(0) + r_{YY}(0)) \quad (3.7c)$$

3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF

$$r_{XY}(\kappa) = \mu_x \cdot \mu_y = E[X(n + \kappa)]E[Y(n)] \quad (3.8)$$

3.3.4 Orthogonalität

$$r_{XY}(\kappa) = 0 \quad (3.9)$$

3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)

$$c_{XX}(n + \kappa, n) = E[(X(n + \kappa) - E[X(n + \kappa)]) \cdot (X(n) - E[X(n)])] \quad (3.10a)$$

$$c_{XX}(n + \kappa, n) = r_{XX}(n + \kappa, n) - E[X(n + \kappa)]E[X(n)] \quad (3.10b)$$

3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz

Falls X zumindest stationär im weiteren Sinne (3.2.1) ist, gilt

$$c_{XX}(\kappa) = r_{XX}(\kappa) - (\mathbb{E}[X(n)])^2 \quad (3.11)$$

3.4.2 Überführung der Central-SOMF in die Varianz

$$c_{XX}(0) = \text{Var}(X) \quad (3.12)$$

3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)

$$c_{XY}(n + \kappa, n) = \mathbb{E}[(X(n + \kappa) - \mathbb{E}[X(n + \kappa)]) \cdot (Y(n) - \mathbb{E}[Y(n)])] \quad (3.13a)$$

$$c_{XY}(n + \kappa, n) = r_{XY}(n + \kappa, n) - \mathbb{E}[X(n + \kappa)]\mathbb{E}[Y(n)] \quad (3.13b)$$

3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz

Falls X und Y zumindest gemeinsam stationär im weiteren Sinne (3.3.1) sind, gilt:

$$c_{XY}(\kappa) = r_{XY}(\kappa) - \mathbb{E}[X(n)]\mathbb{E}[Y(n)] \quad (3.14)$$

3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz

$$c_{XY}(\kappa) = 0 \quad (3.15)$$

3.6 Komplexe Prozesse

Seien $X(n)$ und $Y(n)$ reale Zufallsprozesse, so ist

$$Z(n) \hat{=} X(n) + jY(n) \quad (3.16)$$

ein Komplexer Zufallsprozess

3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess

$$\mathbb{E}[Z(n)] = \mathbb{E}[X(n)] + j\mathbb{E}[Y(n)] \quad (3.17)$$

3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess

$$r_{ZZ}(n_1, n_2) = \mathbb{E}[Z(n_1) \cdot Z(n_2)^*] \quad (3.18)$$

Besondere Eigenschaften

Für einen komplexen Zufallsprozess, welcher *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) ist, gilt

$$r_{ZZ}(-\kappa) = r_{ZZ}(\kappa)^* \quad (3.19)$$

3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse

$$r_{Z_1 Z_2}(n_1, n_2) = \mathbb{E}[Z_1(n_1) \cdot Z_2(n_2)^*] \quad (3.20)$$

3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess

$$c_{ZZ}(n + \kappa, n) = \mathbb{E}[(Z(n + \kappa) - \mathbb{E}[Z(n + \kappa)]) \cdot (Z(n) - \mathbb{E}[Z(n)])^*] \quad (3.21)$$

3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse

$$c_{Z_1 Z_2}(n + \kappa, n) = \mathbb{E}[(Z_1(n + \kappa) - \mathbb{E}[Z_1(n + \kappa)]) \cdot (Z_2(n) - \mathbb{E}[Z_2(n)])^*] \quad (3.22)$$

3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse

Unkorreliertheit verhält sich wie (3.5.2), genauso wie *Orthogonalität* (3.3.4)

4 Spektraldichten (Power Spectral Density)

4.1 Leistungsdichte

4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density, PSD)

$$S_{XX}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[\left| X_N(e^{j\omega}, \xi) \right|^2 \right]}{2M + 1} \quad (4.1)$$

mit

$$X_N(e^{j\omega}, \xi) = \sum_{n=-M}^{M} x_N(n, \xi) e^{-j\omega n} \quad (4.2)$$

Eigenschaften der Leistungsspektraldichte

$$S_{XX}(e^{j\omega})^* = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{C} \quad (4.3a)$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{C} \quad (4.3b)$$

$$S_{XX}(e^{-j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{R} \quad (4.3c)$$

4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses

$$P_{XX} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} = r_{XX}(0) \quad (4.4a)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbb{E} \left[\left| X_N(e^{j\omega}, \xi) \right|^2 \right]}{2M+1} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.4b)$$

4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density)

$$S_{XY}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[X_N(e^{j\omega}, \xi) Y_N(e^{j\omega}, \xi)^* \right]}{2M+1} \quad (4.5)$$

Eigenschaften der Kreuzleistungsdichte

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n), Y(n) \in \mathbb{C} \quad (4.6a)$$

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(-e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6b)$$

$$\Re \{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Re \{S_{YX}(e^{j\omega})\} \quad \text{sind gerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6c)$$

$$\Im \{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Im \{S_{YX}(e^{j\omega})\} \quad \text{sind ungerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6d)$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{wenn } X(n) \text{ und } Y(n) \text{ orthogonal} \quad (3.3.4) \quad (4.6e)$$

4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse

$$P_{XY} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.7)$$

4.1.5 Wiener-Khinchine theorem

Ist $X(n)$ ein im weiteren Sinne stationärer (3.2.1) Zufallsprozess, so kann die Leistungsspektraldichte (4.1.1) aus der Fourier-Transformation der Momentenfunktion zweiter Ordnung (SOMF) (3.2) gewonnen werden:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{XX}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XX}(\kappa) e^{-k\omega\kappa} \quad (4.8a)$$

und invers

$$r_{XX}(\kappa) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(e^{j\omega})\} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega\kappa}) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.8b)$$

4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{XY}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XY}(\kappa) e^{-k\omega\kappa} \quad (4.9)$$

4.2 Kohärenz (coherence)

$$\text{Coh}_{XY}(e^{j\omega}) = \frac{|S_{XY}(e^{j\omega})|^2}{S_{XX}(e^{j\omega}) S_{YY}(e^{j\omega})} \quad (4.10)$$

4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz

Die Kohärenz zwischen den Zufallsprozessen $X(n)$ und $Y(n)$ besagt, wie gut X zu Y bei einer gegebenen Frequenz ω korrespondiert.

$$0 \leq \text{Coh}_{XY}(e^{j\omega}) \leq 1 \quad (4.11)$$

4.3 Root Mean Square (RMS) und Gleichstrom (DC) Werte

4.3.1 DC-Values

$$X_{dc} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n) = E[X(n)] = \mu_X \quad (4.12)$$

4.3.2 Normalisierte DC-Leistung

$$P_{dc} = \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n) \right]^2 = E[X(n)]^2 = X_{dc}^2 \quad (4.13)$$

4.3.3 RMS-Value

$$X_{RMS} = \sqrt{\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n)^2} = \sqrt{r_{XX}(0)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi}} \quad (4.14)$$

4.4 Spektrum

4.4.1 Spektrum eines stationären Zufallsprozesses

Ist $X(n)$ ein *stationärer* (3.1) Zufallsprozess, so ist sein Spektrum die Fouriertransformierte der *Kovarianzfunktion* (3.4)

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.15)$$

Eigenschaften des Spektrums

1. Wenn $\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$, dann existiert C_{XX} und ist begrenzt und stetig
2. C_{XX} ist Real, 2π -Periodisch und $C_{XX} \geq 0$
- 3.

$$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.16)$$

4.4.2 Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse

Ist $X(n)$ und $Y(n)$ gemeinsam stationär (3.3.1), dann ist das Kreuzspektrum definiert durch

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XY}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.17)$$

Eigenschaften der Kreuzspektrums

Das Spektrum eines Realen Zufallsprozesses ist komplett im Intervall $[0, \pi]$ bestimmt

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \quad (4.18a)$$

$$c_{XY}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XY}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.18b)$$

Wenn $X(n), Y(n) \in \mathbb{R}$ dann

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{-j\omega}) \quad (4.18c)$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{XY}(e^{-j\omega})^* = C_{YX}(e^{-j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \quad (4.18d)$$

5 Filter

5.1 Lineare Filter

Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ stationär (3.1) sind, $h(n)$ eine Impulsantwort eines LTI-Systems ist und das Filter stabil (5.1.1) ist, existiert mit *Wahrscheinlichkeit 1* (1.7.1)

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)X(k) \quad (5.1)$$

5.1.1 Stabilität

Die Stabilität eines Filters ist gegeben, wenn:

$$\sum |h(n)| < \infty \quad (5.2)$$

5.1.2 Eigenschaften eines Linearen Filters

- Ist $X(n)$ stationär (3.1) und $E[|X(n)|] < \infty$, dann ist $Y(n)$ stationär
- $Y(n)$ wird linearer Prozess genannt (linear process)

5.1.3 Instabiler linearer Filter

Ist das Filter nicht stabil (5.1.1), aber $\int |H(e^{j\omega})| d\omega < \infty$ trifft zu und für $X(n)$ $\sum |c_{XX}(n)| < \infty$, sodann existiert im *Mean-Square-Sense* (1.7.2) die Formel (5.1) und $Y(n)$ ist *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) mit

$$\mu_Y = E[Y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[X(n-k)] = \mu_X H(e^{j0}) \quad (5.3)$$

5.1.4 Kreukovarianz des Ausgangs des Filters

$$c_{YX} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)c_{XX}(\kappa - k) \quad (5.4a)$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) C_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.4b)$$

$$c_{YX} = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) C_{XX}(e^{j\omega}) e^{-j\omega\kappa} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5.4c)$$

5.1.5 Kreukovarianz des Ausgangs zweier Filter

$$c_{Y_1 Y_2}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(l) \cdot c_{X_1 X_2}(\kappa - k + l) \quad (5.5a)$$

$$c_{Y_1 Y_2}(\kappa) = h_1(\kappa) \star h_2(\kappa)^* \star c_{X_1 X_2}(\kappa) \quad (5.5b)$$

$$C_{Y_1 Y_2}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})^* C_{X_1 X_2}(e^{j\omega}) \quad (5.5c)$$

5.1.6 Kaskade linearer Filter

$$H(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^L H_i(e^{j\omega}) \quad (5.6a)$$

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^L |H_i(e^{j\omega})|^2 \quad (5.6b)$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^L H_i(e^{j\omega}) \quad (5.6c)$$

5.2 Matched Filter

5.2.1 Annahmen des Matched Filters

- Das eingehende Signal $X(n)$ besteht entweder aus einem Signal mit Rauschen oder nur Rauschen:

$$X(n) = \begin{cases} s(n) + V(n) \\ V(n) \end{cases} \quad (5.7)$$

- Dabei ist $s(n)$ reelwertig, deterministisch und betrachtet in $n \in [0, N]$
- $E[V(n)] = 0$ und $C_{VV}(e^{j\omega})$ bekannt

5.2.2 Ziel des Matched Filters

Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnis:

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \max \frac{|s_0(n_0)|^2}{E[V_0(n_0)^2]} \quad (5.8)$$

5.2.3 Übertragungsfunktion des Matched Filters

Sei $S(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{s(n)\}$, C_{VV} das Spektrum des Rauschens, n_0 die Abtastungszeit, bei welcher (S/N) berechnet wird, und k eine reelle Konstante

$$H(e^{j\omega}) = k \frac{S(e^{j\omega})^*}{C_{VV}(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0} \quad (5.9)$$

Dabei geht der Signalverlauf am Ende des Filters verloren und der Filter kann zur Signaldetektion genutzt werden

5.2.4 Matched Filter für Weißes Rauschen

Bei weißem Rauschen wird die Impulsantwort des Filters zu

$$h(n) \equiv c \cdot s(n_0 - n) \quad (5.10)$$

⇒ Die Impulsantwort des Filters ist das bekannte Signal "rückwärts gespielt" und um n_0 verschoben

Der Signal zu Rausch Abstand ergibt sich dann zu:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{E_s}{\sigma_V^2} \quad (5.11)$$

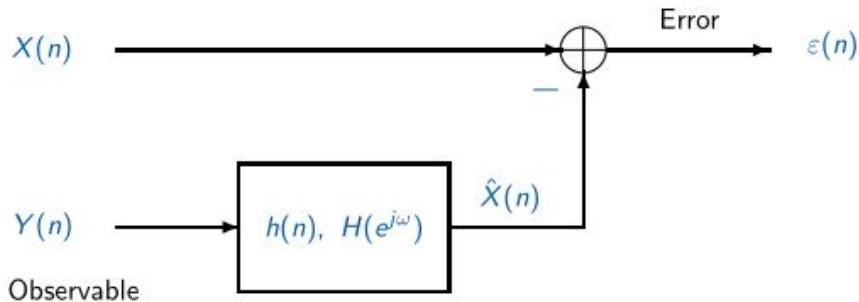
5.3 Wiener Filter

5.3.1 Ziel des Wiener Filters

Der Wiener Filter versucht die optimale Schätzung (nach (1.7.2)) eines Zufallsprozesses durch die Beobachtung eines anderen Prozesses

5.3.2 Annahmen des Wiener Filters

Not Observable



- $X(n)$ ist der zu schätzende Zufallsprozess
- $Y(n)$ ist der betrachtete Zufallsprozess
- $\epsilon(n)$ ist der Fehlerprozess
- $X(n)$ und $Y(n)$ sind reelwertig, mittelwertfrei und *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1)
- Aufgrund der *gemeinsamen Stationarität im weiteren Sinne* (3.3.1) der beiden Prozesse ist die Impulsantwort $h(n)$ stabil und der Fehlerprozess $\epsilon(n)$ *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1)

5.3.3 Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters

Entstehend aus den *Wiener-Hopf-Gleichungen*

$$c_{XY}(\kappa) = h_{opt}(\kappa) \star C_{YY}(\kappa) \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (5.12a)$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = G_{opt}(e^{j\omega}) C_{YY}(e^{j\omega}) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.12b)$$

erlangt man die optimale Übertragungsfunktion:

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})} \quad (5.13)$$

5.3.4 Mean Square Error des Wiener Filters

$$q_{min} = C_{XX}(0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m)C_{XY}(m) \quad (5.14a)$$

$$q_{min} = p(0) \quad \text{mit} \quad (5.14b)$$

$$p(\kappa) = C_{XX}(\kappa) - h_{opt}(\kappa) \star c_{YX}(\kappa)$$

5.3.5 Der Wiener Filter mit additivem Rauschen

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XX}(e^{j\omega})}{C_{XX}(e^{j\omega}) + C_{VV}(e^{j\omega})} \quad (5.15)$$

6 Sonstiges

6.1 Spezielle Funktionen

6.1.1 Gaussian white noise process

GauSSsches weißes Rauschen ist immer *stationär* (3.1)

$$\mathbb{E}[W(n)] = 0 \quad (6.1a)$$

$$r_{WW}(\kappa) = \sigma_W^2 \delta(\kappa) \quad (6.1b)$$

$$S_{WW}(e^{j\omega}) = \sigma_W^2 \quad (6.1c)$$

6.1.2 Kronecker delta function

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

6.2 Mathematische nützliche Formeln

6.2.1 Ungleichung von Schwarz

$$\left| \int_a^b \varphi_1(\omega) \varphi_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \left(\int_a^b |\varphi_1(\omega)|^2 d\omega \right) \cdot \left(\int_a^b |\varphi_2(\omega)|^2 d\omega \right) \quad (6.3)$$

6.2.2 Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6.4a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6.4b)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0 \quad (6.4c)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (6.4d)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (6.4e)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k + nt) dt = 0 \quad \text{mit } k = \text{const} \quad (6.4f)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k + nt) dt = 0 \quad \text{mit } k = \text{const} \quad (6.4g)$$