Stochastische Signale und Systeme

Zusammenfassung Formeln

Autor: Daniel Thiem - studium@daniel-thiem.de

Version 0.8.1 - 24.09.2012

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Fehler und Verbesserungen bitte an studium@daniel-thiem.de senden oder als Issue bei `https://github.com/Tyde/stosigsysfs/issues` melden. Der Quelltext dieser Formelsammlung ist auf `https://github.com/Tyde/stosigsysfs` und darf gerne erweitert werden.

1 Kombinatorik & reine Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Sei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{1.1}$$

1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0 \tag{1.2a}$$

$$f_X(x) = P(X = x) \tag{1.2b}$$

1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen

Sei $Y = g(X)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Y, $f_y(t)$, sei gesucht, während die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(t)$ gegeben ist,

$$f_y(t) = f_x(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1} \right| \tag{1.3}$$

1.2 Verteilungsfunktion

$f(t)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen X

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.4}$$

1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{1.5a}$$
$$F_X(\infty) = 1 \tag{1.5b}$$
$$F_X(-\infty) = 0 \tag{1.5c}$$

$F_X(x)$ist rechtsstetig, d.h.

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x) \tag{1.5d}$$

1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion

$$F(a-) = \lim_{\epsilon \to 0} F_X(x - \epsilon) \tag{1.6a}$$
$$P(X = a) = F(a) - F(a-) \tag{1.6b}$$
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{1.6c}$$
$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-) \tag{1.6d}$$
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-) \tag{1.6e}$$
$$P(X > a) = 1 - F(a) \tag{1.6f}$$

1.3 Verteilungen

1.3.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.7}$$

1.3.2 Rechteckverteilung

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b] \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{1.9}$$

1.3.3 Exponentialverteilung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & x \geq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

1.4 Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cdot P(B|A_k))}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \tag{1.12}$$

1.5 Erwartungswerte

1.5.1 Erwartungswertberechnung

Allgemein

Sei $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$\mathrm{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \tag{1.13}$$

Erweitert

Sei $Y = g(X)$ und $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \tag{1.14}$$

1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

Sei A eine von B unabhängige Zufallsvariable

$$\mathrm{E}[A \cdot B] = \mathrm{E}[A] \cdot \mathrm{E}[B] \tag{1.15}$$

Sei X eine Zufallsvariable und a, b jeweils Konstanten

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b \tag{1.16}$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}[X_i] \tag{1.17}$$

1.6 Varianz

1.6.1 Berechnung der Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \tag{1.18}$$

1.6.2 Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(x) \tag{1.19}$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Var}[X_i] \tag{1.20}$$

1.7 Konvergenz

Es wird eine Konvergenz von Zufallsvariablen X_k mit $k = 0, 1, 2\dots$ betrachtet:

1.7.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)

$$P\left(\lim_{k\to\infty} |X_k - X| = 0\right) = 1 \tag{1.21}$$

1.7.2 Konvergenz im "Mean Square Sense"

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\left[|X_k - X|^2\right] = 0 \tag{1.22}$$

1.7.3 Convergence in Pobability

$$\lim_{k\to\infty} P\left(|X_k - X| > \epsilon\right) = 0 \tag{1.23}$$

1.7.4 Convergence in Distribution

$$\lim_{k\to\infty} F_{X_k}(x) = F_X(x) \quad \text{Für alle stetigen punkte } x \text{ aus } F_X \tag{1.24}$$

1.7.5 Gewichtung der Konvergenzen

- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in probability (1.7.3)
- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in the MSS (1.7.2), provided second order moments exist.
- Convergence in the MSS (1.7.2) implies convergence in probability (1.7.3).
- Convergence in probability (1.7.3) implies convergence in distribution (1.7.4).

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation

2.1 Abtastung

2.1.1 Im Zeitbereich

Sei $x_c(t)$ das zu abtastende Signal und $T_s = \frac{1}{f_s}$ die Abtastdauer bzw. Abtastfrequenz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \tag{2.1}$$

2.1.2 Im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s})) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s) \quad \text{mit} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \qquad (2.2) \\ & \qquad (2.3) \end{aligned}$$

2.2 Transformation

2.2.1 Rücktransformation

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{2.4}$$

2.2.2 Zusammenhang Ω und n

ACHTUNG: Dieser zusammenhang ist in SSS etwas anders im gegensatz zu dem Hilfsblatt von DSS

$$\omega = \Omega T_s \tag{2.5}$$

2.2.3 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall

1. Zeitkontinuierliches $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ berechnen
2. Formel aus (2.2.2) einsetzen, um $H(j\Omega)$ zu erreichen

3 Prozesse

3.1 Strikte Stationarität

$$F_x(x_1,\ldots,x_N;n_1,\ldots,n_N) = F_x(x_1,\ldots,x_N;n_1+n_0,\ldots,n_N+n_0) \quad \text{mit } N\to\infty \tag{3.1}$$

3.2 Second order moment function(SOMF)

$$r_{XX}(n_1,n_2) = \mathrm{E}\left[X(n_1)X(n_2)\right] \tag{3.2}$$

3.2.1 Stationär im weiteren Sinne

$$\mathrm{E}\left[X(n)\right] = \text{const.} \tag{3.3a}$$

$$r_{XX}(n_1,n_2) = r_{XX}(\kappa) = \mathrm{E}\left[X(n+\kappa)\cdot X(n)\right] \quad \text{mit} \quad \kappa = |n_2 - n_1| \tag{3.3b}$$

3.2.2 Eigenschaften der SOMF

$$r_{XX}(0) = \mathrm{E}\left[X(n)^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_x^2 \tag{3.4a}$$

$$r_{XX}(\kappa) = r_{XX}(-\kappa) \tag{3.4b}$$

$$r_{XX}(0) \geq |r_{XX}(\kappa)| \quad ,|\kappa| > 0 \tag{3.4c}$$

3.3 Cross-SOMF

$$r_{XY}(n_1,n_2) = \mathrm{E}\left[X(n_1)\cdot Y(n_2)\right] \tag{3.5}$$

3.3.1 Gemeinsame Statonarität (joint stationary)

Sei $X(n)$ und $Y(n)$ nach (3.2.1) *stationär*, dann sind die Prozesse gemeinsam stationär, wenn gilt:

$$r_{XY} = r_{XY}(n_1 - n_2) = r_{XY}(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = n_1 - n_2 \tag{3.6}$$

3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF

$$r_{XY}(-\kappa) = r_{YX}(\kappa) \tag{3.7a}$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \sqrt{r_{XX}(0) \cdot r_{YY}(0)} \tag{3.7b}$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \frac{1}{2}(r_{XX}(0) + r_{YY}(0)) \tag{3.7c}$$

3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF

$$r_{XY}(\kappa) = \mu_x \cdot \mu_y = \mathrm{E}\left[X(n+\kappa)\right]\mathrm{E}\left[Y(n)\right] \tag{3.8}$$

3.3.4 Orthogonalität

$$r_{XY}(\kappa) = 0 \tag{3.9}$$

3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}\left[(X(n+\kappa) - \mathrm{E}\left[X(n+\kappa)\right]) \cdot (X(n) - \mathrm{E}\left[X(n)\right])\right] \tag{3.10a}$$

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(n+\kappa, n) - \mathrm{E}\left[X(n+k)\right]\mathrm{E}\left[X(n)\right] \tag{3.10b}$$

3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz

Falls X zumindest *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$c_{XX}(\kappa) = r_{XX}(\kappa) - (\mathrm{E}[X(n)])^2 \tag{3.11}$$

3.4.2 Überführung der Central-SOMF in die Varianz

$$c_{XX}(0) = \mathrm{Var}(X) \tag{3.12}$$

3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(X(n+\kappa) - \mathrm{E}[X(n+\kappa)]) \cdot (Y(n) - \mathrm{E}[Y(n)])] \tag{3.13a}$$
$$c_{XY}(n+\kappa, n) = r_{XY}(n+\kappa, n) - \mathrm{E}[X(n+k)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.13b}$$

3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz

Falls X und Y zumindest *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1) sind, gilt:

$$c_{XY}(\kappa) = r_{XY}(\kappa) - \mathrm{E}[X(n)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.14}$$

3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz

$$c_{XY}(\kappa) = 0 \tag{3.15}$$

3.6 Komplexe Prozesse

Seien $X(n)$ und $Y(n)$ reale Zufallsprozesse, so ist

$$Z(n) \hat{=} X(n) + jY(n) \tag{3.16}$$

ein Komplexer Zufallsprozess

3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess

$$\mathrm{E}[Z(n)] = \mathrm{E}[X(n)] + j\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.17}$$

3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess

$$r_{ZZ}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[Z(n_1) \cdot Z(n_2)^*] \tag{3.18}$$

Besondere Eigenschaften

Für einen komplexen Zufallsprozess, welcher *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$r_{ZZ}(-\kappa) = r_{ZZ}(\kappa)^* \tag{3.19}$$

3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse

$$r_{Z_1Z_2}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[Z_1(n_1) \cdot Z_2(n_2)^*] \tag{3.20}$$

3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess

$$c_{ZZ}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(Z(n+\kappa) - \mathrm{E}[Z(n+\kappa)]) \cdot (Z(n) - \mathrm{E}[Z(n)])^*] \tag{3.21}$$

3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse

$$c_{Z_1Z_2}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(Z_1(n+\kappa) - \mathrm{E}[Z_1(n+\kappa)]) \cdot (Z_2(n) - \mathrm{E}[Z_2(n)])^*] \tag{3.22}$$

3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse

Unkorreliertheit verhält sich wie (3.5.2), genauso wie *Orthogonalität* (3.3.4)

4 Spektraldichten (Power Spectral Density)

4.1 Leistungsdichte

4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD)

$$S_{XX}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \to \infty} \frac{\mathrm{E}\left[\left|X_N\left(e^{j\omega}, \xi\right)\right|^2\right]}{2M+1} \tag{4.1}$$

mit

$$X_N(e^{j\omega}, \xi) = \sum_{n=-M}^{M} x_N(n, \xi) e^{-j\omega n} \tag{4.2}$$

Eigenschaften der Leistungsspektraldichte

$$S_{XX}(e^{j\omega})^* = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit} \quad X(n) \in \mathbb{C} \tag{4.3a}$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{mit} \quad X(n) \in \mathbb{C} \tag{4.3b}$$

$$S_{XX}(e^{-j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit} \quad X(n) \in \mathbb{R} \tag{4.3c}$$

4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses

$$P_{XX} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} = r_{XX}(0) \tag{4.4a}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{E}\left[\left|X_N\left(e^{j\omega},\xi\right)\right|^2\right]}{2M+1} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.4b}$$

4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density)

$$S_{XY}(e^{j\omega},\xi) = \lim_{M\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left[X_N\left(e^{j\omega},\xi\right) Y_N\left(e^{j\omega},\xi\right)^*\right]}{2M+1} \tag{4.5}$$

Eigenschaften der Kreuzleistungsdichte

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(e^{j\omega}) \qquad \text{mit} \quad X(n),Y(n) \in \mathbb{C} \tag{4.6a}$$

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(-e^{j\omega}) \qquad \text{mit} \quad X(n),Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6b}$$

$$\mathfrak{Re}\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \mathfrak{Re}\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \qquad \text{sind gerade, wenn } X(n),Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6c}$$

$$\mathfrak{Im}\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \mathfrak{Im}\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \qquad \text{sind ungerade, wenn } X(n),Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6d}$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega}) = 0 \qquad \text{wenn } X(n) \text{ und } Y(n) \text{ orthogonal (3.3.4)} \tag{4.6e}$$

4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse

$$P_{XY} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.7}$$

4.1.5 Wiener-Khinchine theorem

Ist $X(n)$ ein *im weiteren Sinne stationärer*(3.2.1) Zufallsprozess, do kann die *Leistungsspektraldichte* (4.1.1) aus der Fourier-Transformation der *Momentenfunktion zweiter Ordnung(SOMF)* (3.2) gewonnen werden:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{r_{XX}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XX}(\kappa)e^{-k\omega\kappa} \tag{4.8a}$$

und invers

$$r_{XX}(\kappa) = \mathscr{F}^{-1}\{S_{XX}(e^{j\omega})\} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega\kappa})\frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.8b}$$

4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{r_{XY}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XY}(\kappa)e^{-k\omega\kappa} \tag{4.9}$$

4.2 Kohärenz (coherence)

$$\mathrm{Coh_{XY}}(\mathrm{e^{j\omega}}) = \frac{\left|\mathrm{S_{XY}}(\mathrm{e^{j\omega}})\right|^2}{\mathrm{S_{XX}}(\mathrm{e^{j\omega}})\,\mathrm{S_{YY}}(\mathrm{e^{j\omega}})} \tag{4.10}$$

4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz

Die Kohärenz zwischen den Zufallsprozessen $X(n)$ und $Y(n)$ besagt, wie gut X zu Y bei einer gegebenen Frequenz ω korrespondiert.

$$0 \leq \mathrm{Coh_{XY}}(\mathrm{e^{j\omega}}) \leq 1 \tag{4.11}$$

4.3 Root Mean Square (RMS) und Gleichsstrom (DC) Werte

4.3.1 DC-Values

$$X_{dc} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} X(n) = \mathrm{E}\left[X(n)\right] = \mu_X \tag{4.12}$$

4.3.2 Normalisierte DC-Leistung

$$P_{dc} = \left[\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} X(n) \right]^2 = \mathrm{E}\left[X(n)\right]^2 = X_{dc}^2 \tag{4.13}$$

4.3.3 RMS-Value

$$X_{RMS} = \sqrt{\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} X(n)^2} = \sqrt{r_{XX}(0)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi}} \tag{4.14}$$

4.4 Spektrum

4.4.1 Spektrum eines stationären Zufallsprozesses

Ist $X(n)$ ein *stationärer* (3.1) Zufallsprozess, so ist sein Spektrum die Fouriertransformierte der *Kovarianzfunktion* (3.4)

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) e^{-j\omega n} \tag{4.15}$$

Eigenschaften des Spektrums

1. Wenn $\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$, dann existiert C_{XX} und ist begrenzt und stetig
2. C_{XX} ist Real, 2π-Periodisch und $C_{XX} \geq 0$
3. $$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{4.16}$$

4.4.2 Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse

Ist $X(n)$ und $Y(n)$ *gemeinsam stationär* (3.3.1), dann ist das Kreuzspektrum definiert durch

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XY}(n) e^{-j\omega n} \tag{4.17}$$

Eigenschaften der Kreuzspektrums

Das Spektrum eines Realen Zufallsprozesses ist komplett im Intervall $[0, \pi]$ bestimmt

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \tag{4.18a}$$

$$c_{XY}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XY}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{4.18b}$$

Wenn $X(n), Y(n) \in \mathbb{R}$ dann

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{-j\omega}) \tag{4.18c}$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{XY}(e^{-j\omega})^* = C_{YX}(e^{-j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \tag{4.18d}$$

5 Filter

5.1 Lineare Filter

Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ *stationär* (3.1) sind, $h(n)$ eine Impulsantwort eines LTI-Systems ist und das Filter *stabil* (5.1.1) ist, existiert mit *Wahrscheinlichkeit 1* (1.7.1)

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)X(k) \tag{5.1}$$

5.1.1 Stabilität

Die Stabilität eines Filters ist gegeben, wenn:

$$\sum |h(n)| < \infty \tag{5.2}$$

5.1.2 Eigenschaften eines Linearen Filters

- Ist $X(n)$ *stationär* (3.1) und $\mathrm{E}[|X(n)|] < \infty$, dann ist $Y(n)$ *stationär*
- $Y(n)$ wird linearer Prozess genannt (linear process)

5.1.3 Instabiler linearer Filter

Ist das Filter nicht *stabil* (5.1.1), aber $\int |H(e^{j\omega}|d\omega < \infty)$ trifft zu und für $X(n)$ $\sum |c_{XX}(n) < \infty$, sodann existiert im *Mean-Square-Sense* (1.7.2) die Formel (5.1) und $Y(n)$ ist *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) mit

$$\mu_Y = \mathrm{E}[Y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathrm{E}[X(n-k)] = \mu_X H(e^{j0}) \tag{5.3}$$

5.1.4 Kreukovarianz des Ausgangs des Filters

$$c_{YX} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) c_{XX}(\kappa - k) \tag{5.4a}$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, C_{XX}(e^{j\omega}) \tag{5.4b}$$

$$c_{YX} = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\, C_{XX}(e^{j\omega})\, e^{-j\omega\kappa} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{5.4c}$$

5.1.5 Kreukovarianz des Ausgangs zweier Filter

$$c_{Y_1Y_2}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(l) \cdot c_{X_1X_2}(\kappa - k + l) \tag{5.5a}$$

$$c_{Y_1Y_2}(\kappa) = h_1(\kappa) \star h_2(\kappa)^* \star c_{X_1X_2}(\kappa) \tag{5.5b}$$

$$C_{Y_1Y_2}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})^* C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) \tag{5.5c}$$

5.1.6 Kaskade linearer Filter

$$H(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^{L} H_i(e^{j\omega}) \tag{5.6a}$$

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^{L} \left| H_i(e^{j\omega}) \right|^2 \tag{5.6b}$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^{L} H_i(e^{j\omega}) \tag{5.6c}$$

5.2 Matched Filter

5.2.1 Annahmen des Matched Filters

- Das eingehende Signal $X(n)$ besteht entweder aus einem Signal mit Rauschen oder nur Rauschen:

$$X(n) = \begin{cases} s(n) + V(n) \\ V(n) \end{cases} \tag{5.7}$$

- Dabei ist $s(n)$ reelwertig, deterministisch und betrachtet in $n \in [0, N)$
- $E[V(n)] = 0$ und $C_{VV}(e^{j\omega})$ bekannt

5.2.2 Ziel des Matched Filters

Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnis:

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \max \frac{|s_0(n_0)|^2}{\mathrm{E}\left[V_0(n_0)^2\right]} \tag{5.8}$$

5.2.3 Übertragungsfunktion des Matched Filters

Sei $S(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{s(n)\}$, C_{VV} das Spektrum des Rauschens, n_0 die Abtastunszeit, bei welcher (S/N) berechnet wird, und k eine reele Konstante

$$H(e^{j\omega}) = k \frac{S(e^{j\omega})^*}{C_{VV}(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0} \tag{5.9}$$

Dabei geht der Signalverlauf am Ende des Filters verloren und der Filter kann zur Signaldetektion genutzt werden

5.2.4 Matched Filter für Weißes Rauschen

Bei weißem Rauschen wird die Impulsantwort des Filters zu

$$h(n) \equiv c \cdot s(n_0 - n) \tag{5.10}$$

$\Rightarrow$ Die Impulsantwort des Filters ist das bekannte Signal "rückwärts gespielt" und um n_0 verschoben
Der Signal zu Rausch Abstand ergibt sich dann zu:

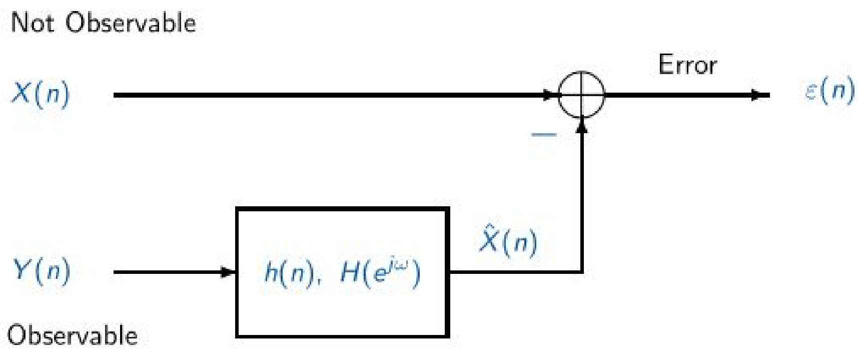
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{E_s}{\sigma_V^2} \tag{5.11}$$

5.3 Wiener Filter

5.3.1 Ziel des Wiener Filters

Der Wiener Filter versucht die optimale Schätzung (nach (1.7.2)) eines Zufallsprozesses durch die Beobachtung eines anderen Prozesses

5.3.2 Annahmen des Wiener Filters



- $X(n)$ ist der zu schätzende Zufallsprozess
- $Y(n)$ ist der betrachtete Zufallsprozess
- $\epsilon(n)$ ist der Fehlerprozess
- $X(n)$ und $Y(n)$ sind reelwertig, mittelwertfrei und *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1)
- Aufgrund der *gemeinsamen Stationarität im weiteren Sinne* (3.3.1) der beiden Prozesse ist die Impulsantwort $h(n)$ stabil und der Fehlerprozess $\epsilon(n)$ *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1)

5.3.3 Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters

Enstehend aus den *Wiener-Hopf-Gleichungen*

$$c_{XY}(\kappa) = h_{opt}(\kappa) \star C_{YY}(\kappa) \qquad \kappa \in \mathbb{Z} \tag{5.12a}$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = G_{opt}(e^{j\omega}) C_{YY}(e^{j\omega}) \qquad \omega \in \mathbb{R} \tag{5.12b}$$

erlangt man die optimale Übertragungsfunktion:

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})} \tag{5.13}$$

5.3.4 Mean Square Error des Wiener Filters

$$q_{min} = C_{XX}(0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m) C_{XY}(m) \tag{5.14a}$$

$$q_{min} = p(0) \quad \text{mit} \tag{5.14b}$$

$$p(\kappa) = C_{XX}(\kappa) - h_{opt}(\kappa) \star c_{YX}(\kappa)$$

5.3.5 Der Wiener Filter mit additivem Rasuchen

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XX}(e^{j\omega})}{C_{XX}(e^{j\omega}) + C_{VV}(e^{j\omega})} \tag{5.15}$$

6 Sonstiges

6.1 Spezielle Funktionen

6.1.1 Gaussian white noise process

GauSSsches weiSSes Rauschen ist immer *stationär* (3.1)

$$\mathrm{E}\left[W(n)\right] = 0 r_{WW}(\kappa) = \sigma_W^2 \delta(\kappa) \tag{6.1a}$$

$$S_{WW}(e^{j\omega}) = \sigma_W^2 \tag{6.1b}$$

6.1.2 Kronecker delta function

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

6.2 Mathematische nützliche Formeln

6.2.1 Ungleichung von Schwarz

$$\left| \int_a^b \varphi_1(\omega)\varphi_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \left(\int_a^b |\varphi_1(\omega)|^2 d\omega \right) \cdot \left(\int_a^b |\varphi_2(\omega)|^2 d\omega \right) \tag{6.3}$$