Mathematik für Informatiker

Prof. Dr. Thomas Streicher

2008/2009

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen

I.1 Mengen

Die moderne Mathematik wird üblicherweise in der Sprache der Mengenlehre formuliert. *Intuitiv* ist eine Menge (nach G. Cantor 1895) "eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen". Die wesentlichen Beziehungen zwischen Mengen sind $\in$ (Elementbeziehung) und $=$ (Gleicheit). Wir schreiben $x \in M$, um auszudrücken, daß x ein Element von M ist, und $x \notin M$ für die Negation dieser Aussage. Mengen A und B heißen gleich (Not. $A = B$), wenn sie dieselben Elemente enthalten. Die *leere* Menge $\emptyset$ ist diejenige Menge, die kein Element enthält. Mengen können auf zwei verschiedene Weisen definiert werden

(i) durch Aufzählung, etwa $\{3, -7, 28, 2\}$, wobei Reihenfolge und Wiederholung irrelevant sind, etwa $\{1, 2\} = \{2, 2, 1\}$

(ii) durch Angabe einer definierenden Eigenschaft $\{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$.

Die zweite Methode kann im Extremfall zu Widersprüchen führen wie folgendes auf B. Russell zurückgehende Paradoxon zeigt: sei $R = \{x \mid x \notin x\}$, dann gilt $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, was logisch widersprüchlich ist! Dieses Problem kann behoben werden, indem man (ii) folgendermaßen einschränkt: wir betrachten bloß Mengen der Gestalt $\{x \in M \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$, wobei M eine vorher konstruierte Menge ist.
Eine Menge A ist *Teilmenge* von B (Not. $A \subseteq B$), wenn für alle $x \in A$ gilt, daß $x \in B$. Offenbar gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Es gilt immer $\emptyset \subseteq M$.

Definition I.1.1 (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz)
Für Mengen A und B ist

(1) *ihr Durchschnitt* $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(2) *ihre Vereinigung* $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

(3) *ihre Differenz* $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

wobei $\wedge$ für "und" und $\vee$ für nichtauschließendes "oder" steht.

Wenn $B \subseteq A$ (und A aus dem Kontext klar ist), schreiben wir B^c bzw. $\complement B$ abkürzend für $A \setminus B$.

Beispiel I.1.2 *Sei $A = \{3, 7, 12\}$ und $B = \{4, 7, 20, 40\}$, dann ist*

$$A \cup B = \{3, 4, 7, 12, 20, 40\} \quad A \cap B = \{7\} \quad A \setminus B = \{3, 12\} \quad B \setminus A = \{4, 20, 40\}$$

I.2 Die reellen Zahlen

Die den reellen Zahlen, dem "Kontinuum", zugrundeliegende Intuition ist die der *Zahlengeraden*, auf der zwei Punkte 0 und 1 fixiert sind (intuitiv liegt 0 links von 1). Neben der Gleichheit ist die Realtion $x < y$ grundlegend, die intuitiv besagt, daß x "links von" y liegt. Außerdem betrachten wir auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen die 2-stelligen Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation), für die wir Infixnotation $x + y$ and $x \cdot y$ verwenden, wobei wir statt $x \cdot y$ meist einfach xy schreiben.
Wir werden vorerst die reellen Zahlen nicht "konstruieren", sondern durch Axiome beschreiben.[1]

Körperaxiome

(A1) $a + b = b + a$

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(A3) es gibt ein $0 \in \mathbb{R}$, sodaß $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(A4) zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es (genau) ein $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$

(A5) $ab = ba$

(A6) $(ab)c = a(bc)$

(A7) es gibt ein $1 \in \mathbb{R}$, sodaß $a1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(A8) zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es (genau) ein $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a\frac{1}{a} = 1$

(A9) $(a + b)c = ac + bc$

(A1) und (A2) heissen Kommutativ- bzw. Assoziativgesetz für die Addition. (A3) besagt, daß es für die Addition ein neutrales Element 0 gibt. Dieses neutrale Element ist eindeutig, da wenn $0'$ ein weiteres neutrales Element für die Addition ist, dann gilt $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$. (A5) besagt, daß es für die Addition zu jedem Element ein eindeutiges inverses Element (bzgl. der Addition) gibt. (A5) und (A6) heissen Kommutativ- bzw. Assoziativgesetz für die Multiplikation. (A7) behauptet die Existenz eines neutralen Elements 1 für die Multiplikation. (A8) behauptet die Existenz eines multiplikativen Inversen $\frac{1}{a}$ zu jedem von 0 verschiedenen $a \in \mathbb{R}$. Oft schreiben wir statt $\frac{1}{a}$ auch a^{-1}, was sich später beim Rechnen mit Potenzen als nützlich erweisen wird. (A9) heißt Distributivgesetz.

Bezeichnungen für Teilmengen von $\mathbb{R}$
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die kleinste Teilmenge N von $\mathbb{R}$, sodaß $1 \in N$ und $x+1 \in N$,

[1] Wir hätten in I.1 auch Axiome für die Mengenlehre angeben können, haben jedoch darauf verzichtet, um den Leser nicht unnötig zu verwirren!

wannimmer $x \in N$. Wir schreiben $\mathbb{N}_0$ für $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Je nach Geschmack bezeichnet man $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ als Menge der *natürlichen* Zahlen. Die Menge der *ganzen* Zahlen ist $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Menge der *rationalen* Zahlen ist $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\}$.

Anordnungsaxiome
Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(A10) genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$, $b < a$

(A11) aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

(A12) aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

(A13) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$

Wir schreiben $a \leq b$ als Abkürzung für $a < b$ oder $a = b$. Man zeigt leicht, daß

(i) aus $a \leq b$ und $x \leq y$ folgt $a + x \leq b + y$

(ii) aus $a \leq b$ folgt $-b \leq -a$

(iii) aus $0 < a \leq b$ folgt $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

I.2.1 Logische Notation und Grundbegriffe

Wie oben bereits erwähnt, bezeichnet $A \wedge B$ die **Konjunktion** der Aussagen A und B, die wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr sind. Mit $\neg A$ bezeichnen wir die **Negation** der Aussage A, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist. Die **Disjunktion** von A und B ist definiert als $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$. Also ist $A \vee B$ genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist (wir lassen also auch zu, daß beide Aussagen wahr sind). Die **Implikation** $A \Rightarrow B$ ist definiert als $\neg A \vee B$ und ist somit genau dann wahr, wenn B wahr oder A falsch ist.[2] Anders gesagt ist $A \Rightarrow B$ genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Wir schreiben $A \Leftrightarrow B$ ("A und B sind logisch äquivelent") als Abkürzung für $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Offenbar ist $A \Leftrightarrow B$ genau dann wahr, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind.
Aufgrund der Definition von $\vee$ gelten die folgenden **de Morganschen** Gesetze

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \qquad \text{und} \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Offenbar sind auch die Ausagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ logisch äquivalent, wobei letztere **Kontraposition** der ersteren heißt. Offenbar gilt auch $\neg A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \bot)$, falls $\bot$ eine falsche Aussage ist.

[2] Es mag am Anfang verwirrend sein, daß $A \Rightarrow B$ automatisch wahr ist, falls A falsch ist. Jedoch erweist sich diese Auffassung als zweckmäßig in der Mathematik.

Um mathematische Aussagen zu formulieren, reicht es nicht Basisaussagen mithilfe obiger aussagenlogischer Verknüpfungen zusammenzusetzen, sondern man muß auch über Objekte (eines bestimmten Typs) quantifizieren. Um z.B. die Aussage "es gibt unendlich viele Primzahlen" zu formulieren, schreibt man

$$\forall n \exists p \, (n \leq p \wedge \mathrm{Prim}(p))$$

wobei man das Prädikat Prim als Abkürzung für

$$\forall k \, ((\exists \ell \, (p = k{\cdot}\ell)) \Rightarrow k = 1 \vee k = p)$$

einführen kann. Aus diesem Beispiel sieht man, daß man zumindest folgende **Quantoren** benötigt

$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt ein x

welche sich auch in der Praxis der Mathematik als ausreichend erweisen. Z.B. kann man die Aussage "es gibt genau ein x mit $A(x)$" folgendermaßen formulieren

$$\exists^1 x A(x) \equiv \exists x (A(x) \wedge \forall y (A(y) \Rightarrow x = y))$$

Für die Quantoren gelten die folgenden de Morganschen Gesetze

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \qquad\qquad \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

Aus dem zweiten de Morganschen Gesetz ergibt sich das Prinzip $\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$, was wir im weiteren sehr oft implizit verwenden werden.[3]

I.2.2 Die grundlegenden Axiome der Mengenlehre

Quantoren und aussagenlogische Verknüpfungen erweisen sich auch als nützlich, um mengentheoretische Beziehungen und Axiome zu formulieren. Man kann etwa $A \subseteq B$ verstehen als Abkürzung für $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ und dann das sogenannte **Extensionalitätsaxiom** der Mengenlehre formulieren als

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Das sogenannte **Aussonderungsaxiom** der Mengenlehre kann man formulieren als

$$\forall y \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow (x \in y \wedge A(x)))$$

[3] Es ist eine amüsante Übung(!), daraus die sogenannte "Deppenformel" $\exists x (A(x) \Rightarrow \forall y A(y))$ herzuleiten.

wobei $A(x)$ eine in der Sprache der Mengenlehre formulierbare Aussage ist, in der y und z nicht erwähnt werden.[4] Weitere Axiome, die üblicherweise postuliert werden, sind das **Paarmengenaxiom**

$$\forall x, y \exists z \forall u (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

das **Vereinigungsaxiom**

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \Leftrightarrow \exists z (u \in z \wedge z \in x))$$

(für die eindeutig bestimmte Menge y schreibt man üblicherweise $\bigcup x$) und das **Potenzmengenaxiom**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \forall u (u \in z \Rightarrow u \in x))$$

John von Neumann hatte die Idee natürliche Zahlen als bestimmte Mengen aufzufassen basierend auf der Idee, daß eine natürliche Zahl n gleich der Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$ sei. Dann ist $0 = \emptyset$ und $n+1 = n \cup \{n\} =: \mathsf{Sc}(n)$. Basierend auf dieser Idee kann man ein **Unendlichkeitsaxiom** folgendermaßen formulieren

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (\mathsf{Sc}(y) \in x))$$

was die Existenz einer Menge behauptet, die $\emptyset$ als Element enthält und unter der Operation Sc abgeschlossen ist. Die Menge $\mathbb{N}_0$ kann man dann als kleinste Teilmenge konstruieren, die $\emptyset$ als Element enthält und unter der Operation Sc abgeschlossen ist. Erstaunlicherweise reichen diese Axiome aus, um 99% der heutigen Mathematik daraus herzuleiten, zumindest wenn man das sogenannte **Auswahlaxiom** dazunimmt, das besagt, daß für eine Menge $\mathcal{M}$ nichtleerer Mengen eine (Auswahl-)Funktion $f : \mathcal{M} \to \bigcup \mathcal{M}$ existiert, sodaß $f(x) \in x$ für alle $x \in \mathcal{M}$.

I.2.3 Schreibweisen für Intervalle in $\mathbb{R}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \leq b$) heißt

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall mit Randpunkten a und b. Oft erweist es sich als nützlich auch folgende Intervalle zu betrachten

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

[4] Das ursprünglich von G. Frege vorgeschlagene uneingeschränkte **Komprehensionsaxiom**

$$\exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow A(x))$$

wurde wie bereits erwähnt von B. Russell als widersprüchlich nachgewiesen.

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

wobei letzteres das offene Intervall mit Randpunkten a und b heißt. Obwohl ∞ ("unendlich") definitiv keine Element aus $\mathbb{R}$ ist, verwendet man oft dieses Symbol (aus historischen Gründen), etwa um (teilweise) unbeschränkte Intervalle zu bezeichen wie in

$$[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \qquad]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

und analog $]-\infty, a]$ und $]-\infty, a[$.

I.2.4 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition I.2.1 *Eine* obere Schranke *einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in A\ x \le s$, wofür wir abkürzend schreiben $A \le s$. Die Menge A heißt* nach oben beschränkt, *wenn $\exists s \in \mathbb{R}\ A \le s$.*
Analog definiert man untere Schranke *und* nach unten beschränkt.

Beispielsweise ist $\{r \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq [-2,2]$ und somit nach unten und oben beschränkt.

Definition I.2.2 *Eine reelle Zahl s heißt* Supremum *von $A \subseteq \mathbb{R}$, falls s kleinste obere Schranke von A ist, d.h. $A \le s \wedge \forall t \in \mathbb{R}\ (A \le t \Rightarrow s \le t)$. Das eindeutig definierte Supremum von A bezeichnen wir mit* $\sup A$ *(sofern es existiert). Analog definiert man das Infimum einer Menge A als die größte untere Schranke von A und bezeichnet es mit* $\inf A$ *(sofern es existiert).*

Beispiel I.2.3 *Die Menge $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.*
Beweis: *Wir zeigen zuerst, daß keine rationale Zahl p existiert mit $p^2 = 2$. Zum Zwecke des Widerspruchs nehmen wir an $p = \frac{n}{m}$ mit $p^2 = 2$, wobei n und m teilerfremde natürliche Zahlen sind. Es gilt dann $n^2 = 2m^2$. Also ist n gerade (da das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist). Somit existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Es gilt dann $4k^2 = 2m^2$ und somit $2k^2 = m^2$. Also ist auch m gerade im Widerspruch zur Annahme, daß n und m teilerfremd seien.*
Als nächstes zeigen wir, daß A kein größtes Element hat. Angenommen $r \in A$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $r > 0$ (da $1 \in A$). Wir suchen nun nach einer rationalen Zahl h mit $0 < h < 1$, sodaß $x + h \in A$. Es gilt

$$(r+h)^2 < 2 \Leftrightarrow r^2 + 2rh + h^2 < 2 \overset{0 \le h \le 1}{\Longleftarrow} r^2 + 2rh + h < 2 \Leftrightarrow h < \frac{2-r^2}{2r+1}$$

Da $r^2 < 2$ und $r > 0$ gilt $\frac{2-r^2}{2r+1} > 0$. Sei h das Minimum von $\frac{1}{2} \cdot \frac{2-r^2}{2r+1}$ und $\frac{1}{2}$. Dann ist h eine rationale Zahl > 0 mit $r + h \in A$ und $r < r + h$.

Analog zeigt man, daß die Menge $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r \wedge 2 < r^2\}$ kein kleinstes Element hat. Da aber jede obere Schranke von A in der Menge $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r \wedge 2 < r^2\}$ liegt, folgt nun, daß A keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$ hat. $\square$

Die obigen Argumente lassen sich so umschreiben, daß man zeigen kann, daß

(i) $\{x \in \,]0,\infty \mid x^2 < 2\}$ *kein größtes und*

(ii) $\{x \in \,]0,\infty \mid x^2 > 2\}$ *kein kleinstes Element hat.*

Also ist das Supremum von A in $\mathbb{R}$ (falls es existiert) gleich $\sqrt{2}$.

Somit wird die Existenz von $\sqrt{2}$ durch folgendes

Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$
Jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

sichergestellt. Eine wichtige Konsequenz ist das sogenannte **Archimedische Prinzip**, das besagt, daß

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ x < n)$$

d.h. jede positive reelle Zahl liegt unterhalb einer natürlichen Zahl.
Beweis: Angenommen es gäbe eine reelle Zahl $x > 0$, sodaß $\forall n \in \mathbb{N}\ n \leq x$. Dann besitzt aufgrund des Vollständigkeitsaxioms die Menge $\mathbb{N}$ ein Supremum s. Dann ist aber $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$. Für dieses n gilt dann aber $s < n + 1 \leq s$, was unmöglich ist. $\square$

Man beachte, daß dieser Beweis einem nicht ermöglicht, für gegebenes $x > 0$ eine natürliche Zahl $n > x$ zu konstruieren, da der Beweis hochgradig indirekt ist.
Eine Konsequenz des Archimedischen Prinzips ist, daß zu jeder rellen Zahl $a > 0$ eine natürliche Zahl n existiert mit $\frac{1}{n} < a$.

Beispiel I.2.4 *Die Menge $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat Supremum 2 und Infimum 1, da $\frac{1}{n} = (1 + \frac{1}{n}) - 1$ beliebig klein wird.*

I.2.5 Vollständige Induktion

Die Menge $\mathbb{N}_0$ ist die kleinste Menge M mit $0 \in M$ und $\forall x \in M\ x{+}1 \in M$. Daraus ergibt sich unmittelbar das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion**, das besagt, daß $\forall n \in \mathbb{N}_0\ A(n)$ gilt, wenn

(Induktionsanfang)	$A(0)$
(Induktionsschritt)	$\forall x \in \mathbb{N}_0\ (A(x) \Rightarrow A(x{+}1))$

In (2) heißt $A(x)$ Induktionshypothese (IH).
Eine nützliche Variation dieses Beweisprinzips besagt, daß $\forall n \geq n_0\ A(n)$ gilt, falls

(Induktionsanfang)	$A(n_0)$
(Induktionsschritt)	$\forall x \in \mathbb{N}_0\ (x \geq n_0 \wedge A(x) \Rightarrow A(x{+}1))$

Als erste Anwendung des Induktionsprinzip beweisen wir

Satz I.2.5 (Bernoullische Ungleichung)
$\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in [1, \infty[\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$

Beweis: Offenbar gilt $(1{+}x)^0 = 1 = 1{+}0x$, womit der Induktionsanfang bewiesen ist.
Um den Induktionsschritt zu beweisen, nehmen wir als Induktionshypothese (IH) an, daß $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für alle $x \in [1, \infty[$. Es gilt dann für alle $x \in [1, \infty[$, daß

$$(1{+}x)^{n+1} = (1{+}x)^n(1{+}x) \geq (1{+}nx)(1{+}x) = 1{+}(n{+}1)x{+}nx^2 \geq 1{+}(n{+}1)x$$

wobei die erste Ungleichung aus IH folgt. □

Ein klassisches Beispiel eines Induktionsbeweises ist folgendes.

Satz I.2.6

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: Offenbar gilt die Aussage für $n = 0$.
Wir nehmen als IH an, es gelte die Aussage für n. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k{+}(n{+}1) \overset{\text{IH}}{=} \frac{n(n+1)}{2}{+}n{+}1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

□

I.2.6 Rekursive Definitionen

Um eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ zu definieren, genügt es a_{n_0} anzugeben und eine Vorschrift festzulegen, die angibt, wie man a_{n+1} aus $a_{n_0}, \ldots, a_n$ konstruiert. Dies ist eine in der Informatik übliche Vorgangsweise, mit der man aber auch grundlegende artihmetische Operationen definieren kann.

Beispiel I.2.7

(1) *Summe, Produkt und Potenzen kann man folgendermaßen rekursiv definieren*

$$
\begin{array}{ll}
m+0=m & m+(n+1)=(m+n)+1 \\
m{\cdot}0=0 & m{\cdot}(n+1)=m{\cdot}n+m \\
a^0=1 & a^{n+1}=a^n\cdot a \quad \textit{für } a\in\mathbb{R}
\end{array}
$$

(2) *die Fakultätsfunktion definiert man wie folgt*

$$0!=1 \qquad (n+1)!=n!\cdot(n+1)$$

(3) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegebene Folge reeller Zahlen, dann sind (endliche) Summen und Produkte wie folgt definiert*

$$\sum_{k=n_0}^{n_0} a_k = a_{n_0} \qquad \sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \sum_{k=n_0} a_k \;+a_{n+1}$$

$$\prod_{k=n_0}^{n_0} a_k = a_{n_0} \qquad \prod_{k=n_0}^{n+1} = \prod_{k=n_0} a_k \;\cdot a_{n+1}$$

I.3 Funktionen

Um den Begriff einer Funktion formulieren können, bedarf es des Begriffs eines gordneten Paars. Für Objekte x und y bezeichnen wir mit (x,y) das geordnete Paar, dessen erste Komponente x und dessen zweite Komponente y ist. Für uns ist "geordnetes Paar" ein Grundbegriff, jedoch kann man ihn im Rahmen der Mengenlehre auf Mengen zurückführen, indem man K. Kuratowski folgend (x,y) gleich $\{\{x\},\{x,y\}\}$ setzt. Das wichtige an geordneten Paaren ist, daß man aus ihnen ihre Komponenten eindeutig ablesen kann, d.h., daß aus $(x,y)=(x',y')$ folgt $x=x'$ und $y=y'$ (was nachweislich der Fall ist, wenn man die Kuratowskische Paarcodierung zugrundelegt). Insbesondere ist $(x,y)\neq(y,x)$ sofern $x\neq y$.

Definition I.3.1 *Für Mengen A und B ist ihr* kartesisches Produkt *definiert als*

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

Eine Relation von A nach B *ist eine Teilmenge $R\subseteq A\times B$.*

Beispielsweise ist $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x<y\}$ eine Relation von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir führen nun Funktionen als spezielle Relationen ein.

Definition I.3.2 *Seien A und B Mengen. Eine* Funktion *von A nach B ist gegeben durch eine Menge $G \subseteq A \times B$, sodaß*

$$\forall x \in A \exists^1 y \in B\ (x, y) \in G$$

Die Funktion selbst wird beschrieben durch das Tripel $f = (A, B, G)$, wobei wir $D(f) = A$ als Definitionsbereich *von f, $W(f) = B$ als* Wertebereich *von f und und* $\mathrm{graph}(f) = G$ *als den* Graph *von f bezeichen. Für $x \in A$ bezeichnen wir mit $f(x)$ das eindeutig bestimmte $y \in B$ mit $(x, y) \in G_f$.*
Funktionen f und g heißen gleich, wenn $D(f) = D(g)$, $W(f) = W(g)$ und $\mathrm{graph}(f) = \mathrm{graph}(g)$.

Um auszudrücken, daß f eine Funktion von A nach B ist, schreiben wir $f : A \to B$. Wenn $f : A \to B$, so ist ihr *Bild* definiert als $B(f) = \{y \in B \mid \exists x \in D(f)\ f(x) = y$. Offenbar ist $B(f) \subseteq W(f)$ aber i.a. $W(f) \neq B(f)$. Für $y \in B$ sei $f^{-1}(y)$, das Urbild von y bzgl. f, definiert als $\{x \in D(f) \mid f(x) = y\}$. Für $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ heißt

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \quad \text{Bild von } X \text{ unter } f \text{ und}$$

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \quad \text{Urbild von } Y \text{ bzgl. } f.$$

Beispiel I.3.3

i) *$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ sind verschiedene Funktionen, da $D(f) \neq D(g)$.*

   g heißt Erweiterung *von f, wenn $D(f) \subseteq D(g)$ und $\forall x \in D(f)\ f(x) = g(x)$. In diesem Fall heißt f auch* Einschränkung *von g auf $D(f)$.*

ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{wenn } 0 \leq x \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

   Die so definierte Funktion f heißt Betragsfunktion *und wir schreiben $|x|$ abkürzend für $f(x)$.*

iii) *Die* Signums- *oder* Vorzeichen*funktion* $\mathsf{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ *sei definiert als*

$$\mathsf{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } 0 < x \\ 0 & \textit{wenn } 0 = x \\ -1 & \textit{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Folgende Eigenschaften von Funktionen sind wichtig.

Definition I.3.4 *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt*

> injektiv*, wenn* $\forall x_1, x_2 \in A\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
>
> surjektiv*, wenn* $\forall y \in B \exists x \in A\ f(x) = y$
>
> bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist, d.h.* $\forall y \in B \exists^1 x \in A\ f(x) = y$.

Mengen A und B heißen gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.*[5]

Beispiel I.3.5 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[: x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Die Funktion $h : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.*

Eine Funktion $f : A \to B$ ist *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ *höchstens* ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$, und f ist *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ *mindestens* ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.

Definition I.3.6 *Sei $f : A \to B$ injektiv, dann bezeichne f^{-1} diejenige Funktion g von $B(f)$ nach A, sodaß $g(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.*

Offenbar ist $f^{-1} : W(f) \to A$ bijektiv!

Beispiel I.3.7 *Sei $f : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto x^2$, dann ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.*

Definition I.3.8 *Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$, dann heißt*

$$g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$$

Komposition (Verkettung, Hintereinanderausführung) *von f und g.*
Die Funktion von A nach A, die $x \in A$ auf x abbildet, heißt identische Funktion *oder* Identität *auf A und wird mit id_A bezeichnet.*

Man beachte, daß $g \circ f$ genau dann definiert ist, wenn $W(f) = D(g)$.
Für $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt offenbar

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

und auch

$$f \circ \mathsf{id}_A = f = \mathsf{id}_B \circ f$$

Beispiel I.3.9 *Obwohl die Funktionskomposition assoziativ ist, ist sie im allgemeinen nicht kommutativ, wie folgendes Beispiel zeigt. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = x^2$, dann gilt $(g \circ f)(0) = 1 \neq -1 = (f \circ g)(0)$.*

[5] Im allgemeinen gibt es zwischen gleichmächtigen Mengen A und B viele verschiedene Bijektionen!

I.4 Die Ebene

I.4.1 Kartesische Koordinaten

Die Ebene wird üblicherweise mit der Menge $\mathbb{R}^2$ identifiziert, wobei man folgendermaßen vorgeht. Man wählt in der Ebene einen Ursprungspunkt O und eine orientierte Gerade, die durch O geht und als x-Achse bezeichnet wird. Die orientierte Gerade durch O, die man durch Drehung der x-Achse um einen rechten Winkel entgegen dem Urzeigersinn erhält, nennt man y-Achse. Die Koordinaten[6] (x_0, y_0) eines Punktes P_0 der Ebene erhält man, indem man von P_0 aus das Lot auf die x- bzw. y-Achse fällt und den Abstand zum Ursprung mißt. Diese Identifikation der Ebene mit $\mathbb{R}^2$ erlaubt einem

(1) die geometrische Veranschaulichung von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ als Teilmengen der Ebene und andererseits

(2) die Beschreibung geometrischer Gebilde in der Ebene als Lösungsmengen von Systemen von Gleichungen bzw. Ungleichungen.

I.4.2 Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man die Menge

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

betrachten. Wir nennen $f(x, y) = 0$ eine Gleichung der Menge C und wir nennen C die Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = 0$. Analog können wir vorgehen für Ungleichungen der Gestalt $f(x, y) \leq 0$ bzw. $f(x, y) \geq 0$. Wir können Teilmengen auch als Lösungsmengen von *Systemen* von Gleichungen bzw. Ungleichungen beschreiben.
Wir betrachten nun einige Beispiele.

Beispiel I.4.1

(1) *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der Graph von f die Lösungsmenge der Gleichung $f(x) - y = 0$.*

(2) *Die Gerade durch die verschiedenen Punkte $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ wird beschrieben als Lösungsmenge der Gleichung*

$$(b_1 - a_1)(y - a_2) - (b_2 - a_2)(x - a_1) = 0$$

Wenn $a_1 \neq b_1$, dann ist diese Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + a_2$$

[6] diese Idee geht auf den franz. Philosophen und Mathematiker René Descartes zurück und deshalb werden die Koordinaten eines Punktes auch als *kartesische* Koordinaten bezeichnet

d.h. der üblichen Gleichung für die Gerade durch die Punkte A und B. Andernfalls, wenn $a_1 = b_1$, erhält man die Gleichung $x = a_1$, welche in diesem Fall auch die Gerade durch A und B beschreibt.

(3) *Der Kreis um den Mittelpunkt $A = (a_1, a_2)$ mit Radius $r > 0$ wird beschreiben durch die Gleichung*

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - r^2 = 0$$

Die Lösungsmenge $C_{A,r}$ dieser Gleichung ist kein Funktionsgraph, da für $|x| < r$ es zwei verschieden y_1 und y_2 gibt, sodaß $(x, y_1), (x, y_2) \in C_{A,r}$.

Für $r = 1$ nennen wir die Lösungsmege Einheitskreis um den Punkt A.

(4) *Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = (b_1 - a_1)(y - a_2) - (b_2 - a_2)(x - a_1)$. Für die Lösungsmenge C der Ungleichung $f(x, y) \geq 0$ gilt im Falle $a_1 \leq b_1$, daß für alle $z \geq 0$*

$$(x, y) \in C \Longrightarrow (x, y + z) \in C$$
$$(x, y) \notin C \Longrightarrow (x, y - z) \notin C$$

d.h. C besteht aus den Punkten oberhalb der durch $f(x, y) = 0$ beschriebenen Geraden. Wenn $b_1 < a_1$, besteht C aus der Menge der Punkte unterhalb der durch $f(x, y) = 0$ beschriebenen Geraden.

Mengen dieser Art nennt man Halbebenen. *Durch Schnitte mehrerer Halbebenen erhält man n-Ecke (Polygone), Kegel, Streifen etc.*

I.4.3 Winkel und Winkelfunktionen

Ein Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ entsteht durch Drehung eines Zeigers (der Länge 1) um seinen Ursprung, wobei $|\alpha|$ die Länge des zugehörigen Einheitsbogens[7] und das Vorzeichen den Drehsinn angibt (≥ 0 heißt *entgegen* dem Urzeigersinn).
Wenn man den Punkt $(1, 0)$ um den Winkel α entgegen dem Urzeigersinn dreht, erhält man einen Punkt mit den Koordinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Die entsprechenden Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißen Cosinus- bzw. Sinusfunktion. Offenbar ist $B(\cos) = [-1, 1] = B(\sin)$. Mit π bezeichnen wir die kleinste Zahl $\alpha > 0$ mit $\sin\alpha = 0$. Es gilt $\cos\pi = -1$. Es gilt $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Es gilt $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \text{und} \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

[7] Es ist in der Mathematik üblich, die Größe eines Winkels nicht in Grad, sondern durch die Länge des entsprechenden Bogens am Einheitskreis anzugeben. Einem Winkel von a Grad entspricht die Bogenlänge $\alpha = \pi \cdot \frac{a}{180}$.

und außerdem

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \text{und} \qquad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Aufgrund des Satzes von Pythagoras gilt

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
Außerdem gelten folgende Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

die wir jedoch erst später begründen werden.

I.4.4 Drehung eines Punktes

Gegeben sei ein Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$. Die Koordinaten des Punktes (x_0', y_0'), den man erhält, indem man P_0 um den Winkel β entgegen dem Urzeigersinn um den Ursprung $O = (0, 0)$ dreht, berechnet man folgendermaßen

$$x_0' = r \cdot \cos(\alpha + \beta) \qquad \text{und} \qquad y_0' = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

wobei $\alpha \in [0, 2\pi]$ mit $x_0 = r \cdot \cos\alpha$ und $y_0 = r \cdot \sin\alpha$ ("Polarendarstellung" des Punktes P_0). Mithilfe der Additionstheoreme kann man leicht nachrechnen, daß

$$x_0' = x_0 \cdot \cos\beta - y_0 \cdot \sin\beta \qquad \text{und} \qquad y_0' = x_0 \cdot \sin\beta + y_0 \cdot \cos\beta$$

I.5 Die komplexen Zahlen

Aus den Anordnungsaxiomen für $\mathbb{R}$ sieht man, daß die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat. Deshalb ist es nützlich einen minimalen Körper $\mathbb{C}$ zu konstruieren, der den Körper $\mathbb{R}$ als Teilkörper enthält und außerdem eine Zahl $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$. Dies läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen.

Definition I.5.1 *Wir definieren* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *(die sogenannte* Gaußsche Zahlenebene*). Für* $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *heißt* x Realteil *(Not.* $\mathfrak{Re}(z)$*) und* y Imaginärteil *(Not.* $\mathfrak{Im}(z)$*) von* z*. Die Zahl* $(0, 1) \in \mathbb{C}$ *heißt* imaginäre Einheit *und wird mit i bezeichnet.*
Auf $\mathbb{C}$ *seien Addition und Multiplikation wie folgt definiert: für* $z_1 = (x_1, y_1)$ *und* $z_2 = (x_2, y_2)$ *sei*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Man kann nachrechnen, daß die so definierten Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{C}$ die Körperaxiome erfüllen. Außerdem gilt $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$ und $(x,0)\cdot(y,0)=(x{\cdot}y,0)$. Aus diesem Grund werden wir im weiteren $x\in\mathbb{R}$ mit $(x,0)\in\mathbb{C}$ identifizieren. Unter Verwendung dieser Konvention gilt für $z=(x,y)$, daß $z=x+iy$ (wie man leicht nachrechnet) und somit

$$z=\mathfrak{Re}(z)+i{\cdot}\mathfrak{Im}(z)$$

für alle $z\in\mathbb{C}$. Man rechnet leicht nach, daß $i^2=-1$.
Da komplexe Zahlen als Punkte in der (Gaußschen) Zahlenebene aufgefaßt werden können (und sollen!) kann man Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ auch geometrisch interpretieren. Offenbar entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition. Mithilfe der Additionstheoreme aus dem vorigen Unterabschnitt kann man leicht nachrechnen, daß

$$(r\cdot\cos\alpha,r\cdot\sin\alpha)\cdot(s\cdot\cos\beta,s\cdot\sin\beta)=(rs\cdot\cos(\alpha+\beta),rs\cdot\sin(\alpha+\beta))$$

d.h. man *multipliziert* komplexe Zahlen, indem man *ihre Längen multipliziert* und *ihre Winkel addiert*. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß die Lösungsmenge der Gleichung $z^2+1=0$ gleich $\{i,-i\}$ ist.

Definition I.5.2 *Sei $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Der* Betrag *von z ist definiert als $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.*[8] *Die* konjugiert komplexe Zahl *zu z ist definiert als $\overline{z}=x-iy$.*[9]

Offenbar gilt $\overline{\overline{z}}=z$ und $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=|\overline{z}|$. Außerdem kann man die Real- und Imaginärteile einer komplexen Zahl durch folgende Formeln berechnen

$$\mathfrak{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})\qquad\mathfrak{Im}(z)=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})$$

Folgende Rechenregeln für komplexe Zahlen sind sehr nützlich.

Satz I.5.3 *Für $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt*

i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(iii) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ *bekannt als "Dreiecksungleichung"*

(iv) $|z_1z_2|=|z_1|{\cdot}|z_2|$

[8] d.h. die Länge des Vektors (x,y) im Sinne des Euklidischen Abstandsbegriffs, wie er aus der Schule vertraut ist

[9] somit entspricht das Konjugieren einer komplexen Zahl der Spiegelung an der x-Achse

Beweis: Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$. Behauptung (i) ist klar. Behauptung (ii) sieht man wie folgt

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1z_2}$$

Behauptung (iv) beweist man, indem man nachrechnet, daß $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$. Am aufwendigsten ist der Nachweis von (iii). Zuerst beobachten wir, daß $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ äquivalent ist zu

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2$$

Also genügt es zu zeigen, daß

(1) $x_1x_2 + y_1y_2 \leq |z_1| \cdot |z_2|$

wofür es ausreicht zu zeigen, daß

(2) $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq |z_1|^2|z_2|^2$

Man rechnet nun leicht nach, daß

(3) $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$

(4) $|z_1|^2|z_2|^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$

Also reicht es zu zeigen, daß

(5) $2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$

Es gilt aber

$$0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2$$

woraus unmittelbar (5) folgt. $\square$

Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Also gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$, daß $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Beispiel I.5.4

$$\frac{2+4i}{1-3i} = \frac{1}{1^2+3^2}(2+4i)(1+3i) = \frac{1}{10}(-10+10i) = -1+i$$

Wie für die reellen Zahlen kann man auch für komplexe Zahlen ganzzahlige Potenzen wie folgt definieren. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $z^0 = 1$ und $z^{n+1} = z^n \cdot z$ $(n \geq 0)$. Falls $z \neq 0$ und $n > 1$ sei $z^{-n} = (\frac{1}{z})^n$.
Wir diskutieren nun für $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$. Da $|z^n| = |z|^n$, folgt aus $z^n = 1$, daß $|z| = 1$. Deshalb nennt man die Lösungen von $z^n = 1$ auch n-te Einheitswurzeln. Aufgrund der geometrischen Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$ gilt die sogenannte **de Moivresche Formel**

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha$$

woraus wir erschließen, daß es genau n n-te Einheitswurzeln gibt, nämlich

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

für $k = 0, \ldots n-1$.
Wichtig in diesem Zusammenhang ist die **Eulersche Formel**

$$\exp(i\phi) = \cos\phi + i\sin\phi \qquad (\phi \in \mathbb{R})$$

wobei $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diejenige stetige Funktion ist, für die gilt

$$\exp(0) = 1 \qquad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

Der Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit dieser Exponentialfunktion im Komplexen übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Sie stimmt jedoch für relle Argumente mit der später definierten Exponentialfunktion überein. Es ist eine leichte Übung, aus der Eulerschen Formel die Additionstheoreme für Winkelfunktionen herzuleiten.

II Konvergenz und Stetigkeit

In diesem Abschnitt behandeln wir die grundlegenden Begriffe der Analysis, nämlich Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen und darauf basierend die Stetigkeit von Funktionen, die (Teilmengen) reelle(r) Zahlen auf reelle Zahlen abbilden.

II.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Intuitiv ist eine Folge reeller Zahlen "etwas" der Gestalt

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

wobei die a_i reelle Zahlen sind. Rein mathematisch kann man dies aber wie folgt auf den Funktionsbegriff zurückführen.

Definition II.1.1 *Eine* Folge *reeller Zahlen ist eine Funktion*

$$a : \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n_0 \leq n \in \mathbb{N}_0\} \to \mathbb{R}$$

wobei $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben üblicherweise a_n für $a(n)$ und oft $(a_n)_{n_0 \leq n}$ oder einfach nur (a_n) für die Folge a.

Wir betrachten nun einige Beispiele von Folgen reeller Zahlen.

Beispiel II.1.2 *Wir betrachten zuerst* explizit *definierte Folgen*

(i) $a_n = c \in \mathbb{R}$ *für* $n \geq 0$ *(***konstante** *Folge mit Wert c)*

(ii) $b_n = (-1)^n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *($n \geq 1$)*

(iii) $c_n = c_0 q^n$ *($n \geq 0$) für $c_0, q \in \mathbb{R}$ (***geometrische** *Folge)*

(iv) $d_n = (-1)^n$ *($n \geq 0$)*

Es gibt aber auch rekursiv *definierte Folgen*

(v) $e_0 = 1$ *und* $e_{n+1} = (n+1) \cdot e_n$

(vi) $f_0 = f_1 = 1$ *und* $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ *heißt* **Fibonacci** *Folge.*

Definition II.1.3 *Eine Folge $a = (a_n)_{n_0 \leq n}$ heißt* nach unten/oben beschränkt*, falls die Menge $\{a_n \mid n_0 \leq n\}$ nach unten/oben beschränkt ist. Eine Folge heißt* beschränkt*, wenn sie nach unten und oben beschränkt ist.*

Von den Folgen aus Beispiel II.1.2 sind (i), (ii), (iv) beschränkt, (v) und (vi) unbeschränkt und bei (iii) hängt es von der Wahl der Parameter c_0 und q ab (Übung!).

Definition II.1.4 (Folgenkonvergenz)
Eine Folge $a = (a_n)_{n_0 \leq n}$ **konvergiert** *gegen eine relle Zahl b, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq n_0 \forall n \geq N |a_n - b| < \varepsilon$$

gilt, d.h. für jede (noch so kleine) reelle Zahl $\varepsilon > 0$ liegen "fast alle", d.h. alle bis auf endlich viele, Folgenglieder in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(b) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - b| < \varepsilon\}$ von b. Wir nennen so ein b auch Grenzwert *der Folge a.*

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, um auszudrücken, daß b ein Grenzwert von a ist. Folgen mit Grenzwert 0 nennt man oft auch *Nullfolgen.*

Satz II.1.5

(1) *Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

(2) *Eine konvergente Folge ist immer beschränkt.*

Beweis: (1) : Angenommen b_1 und b_2 seien Grenzwerte der Folge a. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$, sodaß

$$\forall n \geq N_i \; |a_n - b| < \varepsilon$$

für $i = 1, 2$. Für $n = \max(N_1, N_2)$ gilt dann, daß

$$|b_1 - b_2| \leq |b_1 - a_n| + |a_n - b_2| < 2\varepsilon$$

Also haben wir gezeigt, daß $\forall \varepsilon > 0 \; |b_1 - b_2| < \varepsilon$, woraus folgt, daß $b_1 = b_2$ wie behauptet.
(2) Sei a eine Folge mit Grenzwert b. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $\forall n \geq N \; |a_n - b| < 1$, also $\forall n \geq N \; a_n < b+1$. Somit ist die Folge a nach oben beschränkt durch $\max(a_0, \ldots, a_{N-1}, b+1)$. Analog zeigt man, daß a nach unten beschränkt ist. □

Aus der ersten Behauptung von diesem Satz folgt, daß die Notation $\lim_{n\to\infty} a_n$ sinnvoll ist, da es ja höchstens ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.
Als nächstes diskutieren wir die Konvergenz der meisten in Beispiel II.1.2 betrachteten Folgen.

Beispiel II.1.6

(1) *Sei $c \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge mit $a_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, da für $\varepsilon > 0$ man $N = 0$ wählen kann, denn für alle $n \geq 0$ gilt $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.*

(2) *Sei* $b_n = (-1)^n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *für* $n \in \mathbb{N}$*. Wir zeigen, daß* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*. Sei* $\varepsilon > 0$*. Wir müssen ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *finden, sodaß für alle* $n \geq n_\varepsilon$ *gilt* $|b_n| = |b_n - 0| < \varepsilon$*. Da* $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$*, genügt es ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *zu finden, sodaß* $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ *für alle* $n \geq n_\varepsilon$*. Es ist aber* $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ *äquivalent zu* $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$*. Somit reicht es für* n_ε *eine Zahl natürliche Zahl* n *zu wählen mit* $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$*. Dies ist aber aufgrund des archimedischen Prinzips möglich.*

(3) *Sei* $d_n = (-1)^n$*. Wir zeigen, daß die Folge* (d_n) *keinen Grenzwert hat. Angenommen* b *sei ein Grenzwert von* (d_n)*. Dann gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}_0$*, sodaß für alle* $n \geq n_0$ *gilt* $|d_n - b| < \frac{1}{2}$*. Also gilt für alle* $n, m \geq n_0$*, daß* $|d_n - d_m| \leq |d_n - b| + |b - d_m| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$*. Aber für* $n = n_0$ *und* $m = n_0 + 1$ *gilt* $2 = |d_n - d_m| < 1$*, was nicht möglich ist.*

(4) *Die in (v) und (vi) von Beispiel II.1.2 betrachteten Folgen sind nicht beschränkt und konvergieren somit nicht.*

Definition II.1.7 *Eine Folge* (a_n) divergiert gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$*, wenn*

$$\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \; a_n > K$$

bzw. wenn

$$\forall K < 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0 \; a_n < K$$

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wenn die Folge (a_n) gegen ∞ bzw. $-\infty$ divergiert.

Beispiel II.1.8 *Die Folge* $d_n = (-1)^n$ *divergiert, d.h. konvergiert nicht, aber sie divergiert auch nicht uneigentlich gegen* ∞ *oder* $-\infty$*.*
Die Folgen (e_n) *und* (f_n) *aus Beispiel II.1.2 divergieren uneigentlich gegen* ∞*, da man durch Induktion nachweisen kann, daß* $e_n \geq n$ *bzw.* $f_{n+1} \geq n$*.*

Als nächstes beweisen wir einige nützliche Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz II.1.9 *Seien* (a_n) *und* (b_n) *konvergente Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*, dann gilt*

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(3) *wenn* $b \neq 0$*, dann* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

(4) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

(5) *wenn* $a > 0$, *dann* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. [10]

Beweis: (1) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodaß

(1) $\forall n \geq n_1 \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und

(2) $\forall n \geq n_2 \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Es gilt dann für $n \geq n_0$, daß

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wie zu zeigen war.
(2) Da konvergente Folgen beschränkt sind, gibt es ein $K > 0$ mit $|b_n| < K$ für alle n. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, sodaß

(1) $\forall n \geq n_1 \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ und

(2) $\forall n \geq n_2 \ |b_n - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Für $n \geq \max(n_1, n_2)$ gilt dann

$$\begin{aligned}&|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| = \\ &= |a_n - a|\cdot|b_n| + |a|\cdot|b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2K}K + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

wie zu zeigen war.
(3) Aus $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ folgt die Existenz eines $m_0 \in \mathbb{N}_0$, sodaß für alle $n \geq m_0$ gilt, daß $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Weil $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$, gilt $0 < \frac{|b|}{2} < |b_n|$ für $n \geq m_0$. Also ist $\frac{a_n}{b_n}$ definiert für $n \geq m_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \geq m_0$, sodaß für alle $n \geq n_0$ gilt $|b_n - b| < \varepsilon\frac{|b|^2}{2}$. Dann gilt für $n \geq n_0$ aber auch

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2\frac{1}{|b|}\frac{2}{|b|} = \varepsilon$$

wie zu zeigen war. Wegen der bereits bewiesenen Behauptung (2) des Satzes folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
(4) Folgt aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, da $||a_n - |a||| \leq |a_n - a|$ für alle n gilt.
(5) Da $a > 0$ gibt es ein m_0, sodaß $a_n > 0$ für alle $n \geq m_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 (\geq m_0)$, sodaß $|a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für $n \geq n_0$, daß

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

wie zu zeigen war. □

Als Anwendung dieses Satzes zeigen wir, wie man mit seiner Hilfe Grenzwerte komplizierterer Folgen berechnet.

---

[10] Die Schreibweise $\frac{1}{a_n}$ ist etwas unpräzise, da nicht alle $a_n \geq 0$ sein müssen. Da aber der Grenzwert von (a_n) vorraussetzungsgemäß echt größer 0 ist, muß es ein m_0 geben, sodaß $a_n \geq 0$ für alle $n \geq m_0$. Mit $\sqrt{a_n}$ *meinen* wir dann die Folge $(\sqrt{a_n})_{m_0 \leq n}$.

Beispiel II.1.10

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 + 1 = 1$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{6n^4 + 3n^2 - 12}{7n^4 + 12n^3 + 6}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{6 + \frac{3}{n^2} - \frac{12}{n^4}}{7 + \frac{12}{n} + \frac{6}{n^4}}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

Satz II.1.11 (Einschließungskriterium) *Seien* (a_n), (b_n) *und* (c_n) *Folgen mit* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für genügend große* n. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = d = \lim_{n\to\infty} b_n$, *dann gilt auch* $\lim_{n\to\infty} c_n = d$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodaß für alle $n \geq N$ $|a_n - d| < \varepsilon$ und $|b_n - d| < \varepsilon$. Es gilt dann für $n \geq N$, daß

$$-\varepsilon < a_n - d < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad -\varepsilon < b_n - d < \varepsilon$$

und somit, da $a_n \leq c_n \leq b_n$, auch, daß

$$-\varepsilon < a_n - d \leq c_n - d \leq b_n - d < \varepsilon$$

d.h. $|c_n - d| < \varepsilon$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = d$. □

Beispiel II.1.12 *Eine Folge* (a_n) *ist eine Nullfolge genau dann, wenn* $(|a_n|)$ *eine Nullfolge ist.*
Beweis: *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *dann gilt wegen Satz II.1.9 (4) auch* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |0| = 0$.
Wenn $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *dann gilt auch* $\lim_{n\to\infty} -|a_n| = 0$ *und somit wegen des Einschließungskriteriums auch* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Satz II.1.13 *Seien* (a_n) *und* (b_n) *konvergente Folgen mit* $a_n \leq b_n$. *Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Wir schreiben a bzw. b für den Grenzwert von (a_n) bzw. (b_n). Um zu zeigen, daß $a \leq b$, argumentieren wir mit Widerspruch. Angenommen $b < a$. Dann gibt es zu $\varepsilon := \frac{a-b}{4} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodaß für $n \geq N$ gilt $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$. Dann gilt für $n \geq N$, daß $a - b + b_n - a_n \geq a - b = 4\varepsilon$ und somit

$$4\varepsilon \leq |a - b + b_n - a_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

was unmöglich ist. □

Wir betrachten nun das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge.

Satz II.1.14 *Für $q \in \mathbb{R}$ betrachten wir die* geometrische Folge $c_n = q_n$. *Es gilt*

(1) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ *wenn* $|q| < 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ *wenn* $q = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ *wenn* $q > 1$

(4) *für $q \leq -1$ konvergiert (c_n) nicht und divergiert auch nicht uneigentlich gegen ∞ oder $-\infty$.*

Beweis: (1) : Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Wenn $q = 0$, ist klarerweise der Grenzwert 0, da $0^n = 0$ für $n \geq 1$. Nehamne wir also an, daß $|q| > 1$. Dann ist $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Wegen der Bernoullischen Ungleichung gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$, daß

$$0 \leq |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{nh}$$

und somit $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$, da ja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nh} = 0$.
(2) : klar!
(3) : Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$. Setze $h = q - 1 > 0$. Wegen der Bernoullischen Ungleichung gilt $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$. Da $\lim_{n\to\infty} 1 + nh = \infty$, gilt auch $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.
(4) : Für $q = -1$ ist die Folge q^n beschränkt und konvergiert nicht. Für $q < -1$ wird $|q|^n$ beliebig groß, woraus folgt, daß die Folge nicht konvergiert, und sie divergiert weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$, da die Vorzeichen der Folgenglieder alternieren. □

Als nächstes betrachten wir das Konvergenzverhalten monotoner Folgen.

Definition II.1.15 *Eine Folge (a_n) heißt* monoton fallend *bzw.* monoton wachsend*, wenn für alle n gilt, daß $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$.*

Obwohl beschränkte Folgen nicht notwendigerweise konvergieren, ist dies der Fall für beschränkte monotone Folgen.

Satz II.1.16 *Eine monoton wachsende bzw. fallende beschränkte Folge $(a_n)_{n_0 \leq n}$ konvergiert gegen* $\sup_{n_0 \leq n} a_n$ *bzw.* $\inf_{n_0 \leq n} a_n$.

Beweis: Wir betrachten den Fall einer monoton wachsenden beschränkten Folge (a_n). Der monoton fallende Fall ist anlog zu zeigen.
Aufgrund des Vollständigkeitaxioms hat die beschränkte nichtleere Menge $M := \{a_n \mid n_0 \leq n\}$ ein Supremum b. Sei $\varepsilon > 0$. Da b die kleinste obere Schranke von M ist, gibt es ein N mit $b - \varepsilon < a_N$. Da (a_n) monoton wachsend ist, gilt auch für $n \geq N$, daß $b - \varepsilon < a_n \leq b$. Also gilt für $n \geq N$, daß $a_n \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$. Somit konvergiert (a_n) gegen b wie behauptet. □

Dieser Satz ist unter anderem hilfreich, um die **Exponentialfunktion** à la L. Euler zu definieren.

Satz II.1.17
Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ und ihr Grenzwert wird mit $\exp(x)$ *bezeichnet. Die so definierte Funktion auf $\mathbb{R}$ heißt* **Exponentialfunktion**. *Alle Werte von* $\exp$ *sind* > 0 *und es gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Beweis: Offenbar gilt $\exp(0) = 1$, da in diesem Fall alle $a_n = 1$.
Als nächstes zeigen wir, daß für beliebige $x < 0$ die Folge (a_n) beschränkt ist und für genügend große n monoton wächst. Sei n_0 so groß gewählt, daß $n_0 > |x| + 1$. Sei $n \geq n_0$. Für solche n gilt offenbar $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1$, da ja $-1 < \frac{x}{n} < 0$. Offenbar ist dann $\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq 1^n = 1$. Wir zeigen nun, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und somit $a_n \leq a_{n+1}$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \\ &\overset{(1)}{=} \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq \\ &\overset{(2)}{\geq} \left(1 - (n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right) \overset{(3)}{=} 1\end{aligned}$$

wobei wir die Schritte (1)-(3) folgendermaßen begründen.
ad (1) : $\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1+\frac{x}{n}-\left(\frac{x}{n}-\frac{x}{n+1}\right)}{1+\frac{x}{n}} = 1 - \frac{\frac{x(n+1)-xn}{n(n+1)}}{\frac{x+n}{n}} = 1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}$
ad (2) : Da $n + 1 \geq |x|$, gilt $\left|\frac{x}{n+1}\right| \leq 1$ und $n + x \geq 1$, woraus folgt, daß $\left|\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right| \leq 1$ und somit die Bernoullische Ungleichung anwendbar ist, die Behauptung (2) zur Folge hat.
ad (3) :

$$\begin{aligned}\left(1 - (n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \left(1 - \frac{x}{n+x}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n+x} - \frac{x^2}{n(n+x)} = \\ &= 1 + \frac{x(n+x)-nx-x^2}{n(n+x)} = 1 + 0 = \\ = 1\end{aligned}$$

Also ist ab n_0 die Folge (a_n) monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Da ab n_0 alle Folgenglieder > 0 sind und die Folge monoton wachsend ist, ist der Grenzwert auch > 0.
Für $x > 0$ betrachten wir zuzüglich zur Folge a_n auch die Folge $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, die wegen obiger Betrachtung gegen einen Grenzwert $c > 0$ konvergiert, da $-x < 0$. Es gilt außerdem $a_n b_n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$. Für $n > x$ gilt dann $1 \geq a_n b_n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$, wobei die zweite Ungleichung sich aus der Bernoullischen Ungleichung ergibt. Da $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{x^2}{n} = 1$ folgt mithilfe des Einschließungskriteriums, daß $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n b_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 1 \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} > 0$. Also nimmt $\exp$ nur echt positive Werte an. Daß $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, ergibt sich aus dem oben gezeigten $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$. □

Wir nennen $e := \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ die **Eulersche Zahl**.

Bemerkung Um die Zahl e zu berechnen, können wir versuchen, den Beweis von Satz II.1.17 nutzbar zu machen. Wir betrachten die Folgen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

die gegen e bzw. $\frac{1}{e}$ konvergieren. Da die Folge (b_n) für genügend große n monoton wachsend ist (tatsächlich ab 3 wie man aus dem Beweis von Satz II.1.17 ersieht), ist die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ für genügend große n monoton fallend.
Wir zeigen nun, daß die Folge a_n monoton wächst. Für $n \geq 1$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 - \tfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n(n+1)} = 1 + \tfrac{n+1-n-1}{n(n+1)} = 1 + 0 = \\ \geq 1 \end{aligned}$$

Also ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und durch e beschränkt (da sie gegen e konvergiert). Also gilt für $n \geq 3$, daß

$$a_n \leq e \leq \frac{1}{b_n}$$

Somit befindet sich für $n \geq 3$ die Eulersche Zahl e im Intervall $\left[a_n, \frac{1}{b_n}\right]$. Folgende Beispiele zeigen, daß dieses Approximationsverfahren **sehr langsam** konvergiert:

- $\left[a_{10}, \frac{1}{b_{10}}\right] = [\underline{2}.593742460100002, \underline{2}.86797199079244]$
- $\left[a_{1000}, \frac{1}{b_{1000}}\right] = [\underline{2.71}69239322355208, \underline{2.71}9642216442829]$
- $\left[a_{100000}, \frac{1}{b_{100000}}\right] = [\underline{2.7182}682371975284, \underline{2.7182}95419978943]$

Ein viel schnelleres Verfahren ergibt sich aus der Reihendarstellung $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Als nächstes charakterisieren wir die Konvergenz einer Folge ohne Bezugnahme auf ihren Grenzwert.

Satz II.1.18 *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine* Cauchyfolge *ist, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n, m \geq N \; |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Beweis: Angenommen $\lim_{n \to \infty} a_n = b$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodaß für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $n, m \geq N$. Dann gilt

$$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq |a_n - b| + |a_m - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also ist (a_n) eine Cauchyfolge.
Für die Rückrichtung nehmen wir an, (a_n) sei einen Cauchyfolge. Dann ist die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ beschränkt (warum?). Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann die Menge $\{a_m \mid n \leq m\}$ auch nichtleer und beschränkt und hat somit aufgrund des Vollständigkeitsaxioms ein Supremum b_n. Offenbar ist die Folge (b_n) beschränkt und monoton fallend und besitzt somit einen Grenzwert c. Wir zeigen nun, daß $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ gibt es in $N_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $|b_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$. Da (a_n) Cauchy ist, gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}_0$, sodaß $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n, m \geq N_2$. Also ist auch $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (warum?) für $n \geq N_2$. Für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ gilt nun

$$|a_n - c| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wie zu zeigen war. □

Bemerkung
Wegen des archimedischen Prinzips ist offenbar (a_n) genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt

$$\forall k > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n, m > N \ |a_n - a_m| < \frac{1}{k}$$

Somit kann man Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ formulieren, ohne auf $\mathbb{R}$ bezug zu nehmen. Dies erlaubt es einem das Kontinuum $\mathbb{R}$ wie folgt zu konstruieren: eine reelle Zahl ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, wobei solche Folgen (r_n) und (q_n) als gleich angesehen werden, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall m \geq n \ |r_m - q_m| < \frac{1}{k}$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium erweist sich als nützlich bei folgenden Konvergenzbetrachtungen.

Beispiel II.1.19

(1) *Die Folge* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *ist keine Cauchyfolge und konvergiert deshalb nicht.*[11]

(2) *Die Folge* $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$ *ist eine Cauchyfolge und konvergiert deshalb.*[12]

Beweis: (1) Für $n \geq 1$ gilt

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

woraus folgt, daß (a_n) keine Cauchyfolge ist und somit (gegen ∞) divergiert.

[11]Diese Folge wird “harmonische Reihe” genannt und geschrieben als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
[12]Diese Folge wird “alternierende harmonische Reihe” genannt und geschrieben als $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

(2) Wir zeigen zuerst, daß für $m \geq n$ gilt $|b_m - b_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Offenbar gilt

$$b_m - b_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right)$$

Wenn nun $m - n$ ungerade ist, dann gilt

$$|b_m - b_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{n+1}$$

da die in Klammern stehenden Ausdrücke alle ≥ 0 sind. Ähnlich zeigt man die Abschätzung, wenn $m - n$ gerade ist.
Nun können wir zeigen, daß (b_n) eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt dann für $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a_N| + |a_N - a_m| < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

wie zu beweisen war. $\square$

Eine weitere Anwendung von Satz II.1.16 ist die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

Satz II.1.20 *Es gibt keine Folge* (f_n) *mit* $\mathbb{R} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Beweis: Angenommen (f_n) sei eine Folge reeller Zahlen, die alle reellen Zahlen aufzählt. Wir konstruieren eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, sodaß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

(1) $|I_n| = b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$

(2) $I_{n+1} \subseteq I_n$

(3) $\{f_k \mid k \leq n\} \cap I_n = \emptyset$.

Als I_0 wähle ein Intervall der Länge 1 mit $f_0 \notin I_0$. Angenommen wir haben $I_0, I_1, \ldots, I_n$ so konstruiert, daß sie die Bedingungen erfüllen. Wir unterteilen nun I_n in drei gleich lange Intervalle, die sich nur an den Randpunkten berühren. Da f_{n+1} nur in zwei dieser Intervalle liegen kann, wählen wir als I_{n+1} eines der drei Intervalle, in dem f_{n+1} nicht liegt.
Die Folgen (a_n) ist beschränkt und monoton wachsend und die Folge (b_n) ist beschränkt und monoton fallend. Also haben die Folgen (a_n) und (b_n) aufgrund von Satz II.1.16 Grenzwerte c bzw. d. Für alle n gilt $a_n \leq c \leq d \leq b_n$ und somit $|d - c| \leq |b_n - a_n| = \frac{1}{3^n}$. Also ist $c = d$ und es gilt $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$. Da $c \in I_n$ und $f_n \notin I_n$ gilt $c \neq f_n$. Also ist c eine relle Zahl, die von allen f_n verschieden ist. $\square$

II.2 Relle Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen nach $\mathbb{R}$, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert sind. Wir betrachten zuerst einige Beispiele.

Beispiel II.2.1

(1) *Für Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die "quadratische" Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Im Falle $a = 0$ sprechen wir von einer* affinen *Funktion und, wenn überdies $b = 0$, dann ist die Funktion f konstant mit Wert c.*

(2) $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$

(4) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ *hat einen von $\mathbb{R}$ verschiedenen Definitionsbereich*

(5) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ *hat ebenfalls einen von $\mathbb{R}$ verschiedenen Definitionsbereich.*

Man kann auf reellwertigen Funktionen die üblichen arithmetischen Operationen punktweise ausführen.

Definition II.2.2 *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$. Dann kann man durch punktweise Addition die Funktion*

$$f + g : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$$

und durch punktweise Multiplikation die Funktion

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

definieren. Wenn außerdem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, kann man auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

vermittels punktweiser Division definieren.

Beispiel II.2.3

(1) *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = \cos(\pi x)$, dann ist*

$$\left(\frac{1}{2} f + 4g\right)(x) = \frac{1}{2} x^2 - 1 + 4\cos(\pi x)$$

(2) *Sei* $D = [0, \infty[$ *und seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $f(x) = \sqrt{x}$ *und* $g(x) = x^2 - 1$. *Dann kann man die Funktion* $\frac{f}{g} : D \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ *definieren, wobei man allerdings den ursprünglichen Definitionsbereich* D *auf diejenigen Elemente einschränken muß, die nicht Nullstellen von* g *sind.*

(3) *Die* Tangens*funktion* $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ *ist definiert auf* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *und die* Cotangens*funktion* $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ *ist definiert auf* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Als nächstes definieren wir einige wichtige Eigenschaften reeller Funktionen.

Definition II.2.4 *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$ *heißt* monoton wachsend *bzw.* monoton fallend, *wenn* $\forall x, y \in D(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ *bzw.* $\forall x, y \in D(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$ *und sie heißt* streng monoton wachsend *bzw.* streng monoton fallend, *wenn* $\forall x, y \in D(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$ *bzw.* $\forall x, y \in D(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.
Wenn außerdem $-x \in D$ *für alle* $x \in D$, *dann heißt* f gerade *bzw.* ungerade, *wenn für alle* $x \in D$ *gilt* $f(-x) = f(x)$ *bzw.* $f(-x) = -f(x)$.

Die Sinusfunktion ist also ungerade, wohingegen die Cosinusfunktion gerade ist.

Definition II.2.5 *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $D_0 \subseteq D$ *dann sei die* Einschränkung *von* f *auf* D_0 *definiert als*

$$f_{|D_0} : D_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$$

Beispiel II.2.6

(i) *Wir analysieren, für welche Werte* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *die quadratische Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

gerade bzw. ungerade ist. Offenbar ist f *genau dann gerade, wenn* $b = 0$, *und* f *ist genau dann ungerade, wenn* $ax^2 + c = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *d..h. wenn* $a = c = 0$.

Nehmen wir an, es sei $a > 0$. *Da dann*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

kann f *nicht monoton sein, jedoch ist* f *auf dem Intervall* $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right[$ *streng monoton fallend und auf dem Intervall* $\left]-\frac{b}{2a}, \infty\right[$ *streng monoton wachsend. Also nimmt* f *an der Stelle* $-\frac{b}{2a}$ *den kleinsten Wert an.*

(ii) *Die Funktion* sin *ist ungerade und im Intervall* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *streng monoton wachsend.*

Die Funktion cos *hingegen ist gerade, im Intervall* $]0, \pi[$ *streng monoton fallend und im Intervall* $]-\pi, 0[$ *streng monoton wachsend.*

Ein sehr wichtige Klasse von Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind die sogenannten *Polynome.*

Definition II.2.7 *Eine Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$ *heißt* Polynom n-ten Grades, *sofern* $a_n \neq 0$. *Die* a_k *heißen* Koeffizienten *des Polynoms. Die Funktion* $f(x) = 0$ *heißt* Nullpolynom *und ihm wird der Grad* -1 *zugeschrieben.*

Die Berechnung von $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ erfordert n Additionen und $2n-1$ Multiplikationen. Es erhebt sich die Frage, ob man mit weniger Rechenoperationen auskommt. Betrachten wir vorerst als Motivation das Polynom $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 1$, zu dessen (naiver) Berechnung man 3 Additionen und 5 Multiplikationen braucht. Allerdings kann man dieses Polynom folgendermaßen umschreiben

$$3x^3 - 7x^2 + x - 1 = (3x^2 - 7x + 1)x - 1 = \big((3x-7)x + 1\big)x - 1$$

und wir beobachten, daß man die rechte Seite mit 3 Additionen und 3 Multiplikationen – also kostengünstiger – berechnen kann.
Diese Idee wird in folgendem Satz verallgemeinert.

Satz II.2.8 *Sie* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Wir definieren*

$$\begin{array}{ll} c_n = a_n & \textit{und} \\ c_i = c_{i+1} \cdot x_0 + a_i & \textit{für } i = n-1, \ldots, 0. \end{array}$$

Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0$$

und insbesondere $f(x_0) = c_0$.

Beweis: Wir rechnen wie folgt

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x^i - x_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0 = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x^i - \sum_{i=1}^{n} x_0 c_i x^{i-1} + c_0 = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_0 c_{i+1} x^i + c_0 = \\ &= c_n x^n + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} (c_i - x_0 c_{i+1}) x^i - x_0 c_1 + c_0 = \\ &= a_n x^n + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i + a_0 = \end{aligned}$$

$$= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

unter Verwendung der rekursiven Definition der c_i. $\square$

Man beachte, daß man zur Berechnung von $c_0 = f(x_0)$ nur n Additionen und n Multiplikationen benötigt. Den rekursiven Algorithmus zur Berechnung von $f(x_0)$ nennt man *Hornerschema*, das man folgendermaßen veranschaulichen kann

$$\begin{array}{cccccccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_{i+1} & a_i & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & x_0 \cdot c_n & \dots & x_0 \cdot c_{i+2} & x_0 \cdot c_{i+1} & \dots & x_0 \cdot c_2 & x_0 \cdot c_1 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_{i+1} & c_i & \dots & c_1 & c_0 \end{array}$$

wobei sich die dritte Zeile als Summe der ersten und zweiten Zeile ergibt.

Beispiel II.2.9 *Die Auswertung des Polynoms $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 1$ an der Stelle $x_0 = 2$ vermittels des Hornerschemas sieht dann wie folgt aus*

$$\begin{array}{cccc} 3 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{array}$$

d.h. $f(2) = -3$.

Wenn x_0 eine Nullstelle des Polynoms $f(x)$ ist, d.h. $c_0 = f(x_0) = 0$, dann folgt aus Satz II.2.8, daß

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1}$$

Natürlich kann man diesen Zerlegungsprozeß auch iterieren wie in folgendem

Beispiel II.2.10 *Wir betrachten das Polynom $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Offenbar ist $f(1) = 0$. Mit dem Hornerschema erhalten wir*

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

und somit $(x - 1)(x^2 + x - 2)$. Das Polynom $g(x) = x^2 + x - 2$ hat wiederum die Nullstelle 1. Mit dem Hornerschema erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

und somit $g(x) = (x - 1)(x + 2)$. Also haben wir insgesamt

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2)$$

Somit hat das Polynom f die Nullstellen 1 und -2, wobei aber die erste in gewissem Sinne doppelt vorkommt.

Eine weitere Konsequenz von Satz II.2.8 ist folgender

Satz II.2.11 *Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis: Ein Polynom vom Grad 0 hat keine Nullstellen.
Angenommen f sei ein Polynom vom Grad $n+1$. Wenn f keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat, dann ist die Behauptung klar. Wenn $f(x_0) = 0$, dann gibt es nach Satz II.2.8 ein Polynom g vom Grad n mit $f(x) = (x-x_0)g(x)$. Eine Nullstelle von f ist also eine Nullstelle von g oder gleich x_0. Da g nach Induktionshypotheses höchstens n Nullstellen hat, hat somit f höchstens $n+1$ Nullstellen. $\square$

Daraus ergibt sich folgende Eindeutigkeitsaussage.

Satz II.2.12 (Koeffizientenvergleich)
Seien $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ Polynome, sodaß $f(x) = g(x)$ für unendlich viele $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist $n = m$ und $a_k = b_k$ für $k = 0, \ldots, n$. Insbesondere sind also Polynome genau dann gleich, wenn sie dieselben Koeffizienten haben.[13]

Beweis: Das Polynom $f-g$ hat unendlich viele Nullstellen. Also ist das Polynom $f-g$ aufgrund von Satz II.2.11 vom Grad ≤ -1, woraus folgt, daß $a_k = b_k$ für alle in Frage kommenden k. $\square$

Für Polynome vom Grad ≥ 0 gilt deshalb folgende *Kürzungsregel*: wenn $pq_1 = pq_2$, dann $q_1 = q_2$. (Wenn nämlich pq_1 und pq_2 gleich sind, dann stimmen q_1 und q_2 für unendlich viele Argumente überein.)

Lemma II.2.13 *Sei f ein Polynom mit Grad ≥ 1 und x_0 eine Nullstelle von f. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $k \in \mathbb{N}$, die sogenannte* Vielfachheit der Nullstelle *x_0, sodaß $f(x) = (x-x_0)^k g(x)$ für ein Polynom g mit $g(x_0) \neq 0$.*

Beweis: Durch iterierte Anwendung von Satz II.2.8 weist man die Existenz eines solchen k nach. Die Eindeutigkeit sieht man wie folgt. Angenommen $(x-x_0)^k g(x) = f(x) = (x-x_0)^\ell h(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g(x_0)$ und $h(x_0)$ sind beide von 0 verschieden. O.B.d.A. sei $k \leq \ell$. Dann gilt $g(x) = (x-x_0)^{\ell-k}h(x)$ für alle von x_0 verschiedenen $x \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Kürzungsregel gilt dann $g(x) = (x-x_0)^{\ell-k}h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt insbesondere $g(x_0) = (x_0-x_0)^{\ell-k}h(x_0)$. Da aber sowohl $g(x_0)$ als auch $h(x_0)$ von 0 verschieden sind, folgt $1 = (x_0-x_0)^{\ell-k} = 0^{\ell-k}$ und somit $k = \ell$. $\square$

[13] Dies gilt nicht Polynome über endlichen Körpern wie z.B. $\mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl ist.

Satz II.2.14 *Sei f ein Polynom n-ten Grades und $x_1, \ldots, x_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom g ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = (x - x_1)^{\ell_1} \ldots (x - x_k)^{\ell_k} g(x)$$

wobei ℓ_i die Vielfachheit der Nullstelle x_i von f ist. Außerdem gilt $\ell_1 + \ldots \ell_k \leq n$.

Beweis: Die Existenz eines solchen Polynoms g ergibt sich aus der iterierten Anwendung von Lemma II.2.13. Die Eindeutigkeit von g folgt vermittels der Kürzungsregel.
Das Polynom g hat Grad ≥ 0 und somit ist der Grad n von f größer gleich $\ell_1 + \cdots + \ell_k$. $\square$

Man kann Polynome nicht nur über dem Körper $\mathbb{R}$ sondern auch über beliebigen Körpern betrachten. Sofern der Körper unendlich ist, gelten alle der oben formulierten Aussagen über Faktorisierung von Polynomen. Im Falle des Körpers $\mathbb{C}$ gilt sogar noch mehr, nämlich

Satz II.2.15 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle. Somit läßt sich ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $a_n = 1$ faktorisieren als $f(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$ wobei $x_1, \ldots, x_n$ eine Liste der Nullstellen von f mit Vielfachheiten ist, die bis auf Umordnung eindeutig ist.

Der Fundamentalsatz der Algebra wurde ursprünglich von C. F. Gauß Anfang des 19. Jahrhunderts bewiesen. Inzwischen gibt es einige verschiedene Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra, die aber alle den Rahmen der gegenwärtigen Vorlesung übersteigen. Stattdessen illustrieren wir die Aussage anhand folgenden Beispiels

Beispiel II.2.16 *Das Polynom $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 8 = (x-1)(x+2)^2(x^2+2) = (x-1)(x+2)^2(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$.*

Wir behandeln nun die Frage, wie wir für Vorgaben $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$, wobei die x_i als paarweise verschieden angenommen sind, ein *interpolierendes* Polynom f n-ten Grades finden können, das alle diese Vorgaben erfüllt. Für diesen Zweck erweist sich folgender Ansatz als nützlich

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \alpha_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

Für $x = x_0$ erhalten wir $\alpha_0 = y_0$. Angenommen, wir haben bereits $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ ermittelt, dann kann man α_k aus der Bedingung $f(x_k) = y_k$ ermitteln, indem man nach α_k auflöst.

Man sieht überdies leicht, daß es nur ein solches Polynom n-ten Grades geben kann. Angenommen p und q seinen Polynome n-ten Grades, die beide die Vorgaben erfüllen. Dann sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$ Nullstellen des Polynoms $p - q$. Da $p - q$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist, muß wegen Satz II.2.11 sein Grad gleich -1 sein, da es $n + 1$ Nullstellen hat. Also haben p und q dieselben Koeffizienten.

Beispiel II.2.17 *Im Falle $n = 1$ läuft das Verfahren darauf hinaus, eine Gerade durch 2 vorgegebene Punkte zu legen.*
Illustrieren wir nun das Verfahren für $n = 2$. Wir suchen nach einem Polynom 2-ten Grades $f(x) = ax^2 + bx + c$, sodaß

$$f(-1) = 1 \qquad f(1) = -1 \qquad f(2) = 0$$

Wir machen den Ansatz $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x + 1) + \alpha_2(x + 1)(x - 1)$.
Aus $f(-1) = 1$ erhalten wir $\alpha_0 = 1$.
Aus $f(1) = -1$ erhalten wir $1 + 2\alpha_1 = -1$ und somit $\alpha_1 = -1$.
Aus $f(2) = 0$ erhalten wir $1 - 3 + 3\alpha_2 = 0$ und somit $\alpha_2 = \frac{2}{3}$.
Also ist $f(x) = 1 - (x + 1) + \frac{2}{3}(x^2 - 1) = \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$.

Schlußendlich kann man auch Funktionen betrachten, die als Quotienten von Polynomen definiert sind.

Definition II.2.18 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* rational, *wenn es Polynome p und q gibt, sodaß der Grad von $q \geq 0$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}\}$ und $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für $x \in D$. Wenn der Grad von $q \geq 1$ ist, heißt die Funktion $\frac{p}{q}$* gebrochen rational.

Offenbar sind rationale Funktionen $\frac{p}{q}$, für die der Grad von q gleich 0 ist, einfach Polynome. Beispiele für echt gebrochen rationale Funktionen sind etwa folgende.

Beispiel II.2.19

i) $f(x) = \frac{1}{x}$ *mit Definitionsbereich* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ii) *Gegeben seien die Polynome*

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$$

und

$$q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

dann ist $\frac{p}{q}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ definiert und es gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)} = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

woraus man ersieht, daß $\frac{p}{q}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ fortgesetzt werden kann.

Definition II.2.20 *Für Polynome p und q mit $q \neq 0$ heißt $x \in \mathbb{R}$ k-*facher Pol von $\frac{p}{q}$, *wenn $p(x) \neq 0$ und x k-fache Nullstelle von q ist.*

Beispiel II.2.21

i) *Die Funktion $\frac{1}{x}$ hat den 1-fachen Pol 0.*

ii) *Die Funktion $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ hat den 1-fachen Pol 2 und 1 ist kein Pol dieser Funktion.*

iii) *Die Funktion $\frac{x}{(x-2)^2}$ hat den 2-fachen Pol 2.*

II.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

In Beispiel II.2.19 ii) haben eine auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ definierte gebrochen rationale Funktion kennengelernt, die sich auf "natürliche" Art und Weise auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ fortsetzen läßt. Ein anderes Beispiel ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

die sich durch die Setzung $f(0) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt. In beiden Fällen ist die Fortsetzung in dem Sinne "natürlich", daß sie "stetig" ist und dann auch eindeutig als solche.
Um den Begriff der Stetigkeit definieren zu können, bedarf es allerdings einiger Vorbereitung.

Definition II.3.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Ein* Häufungspunkt von D *ist ein $y \in \mathbb{R}$, sodaß $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ für eine Folge (x_n), deren Glieder alle in $D \setminus \{y\}$ liegen. Wir bezeichnen die Menge der Häufungspunkte von D mit $H(D)$.*

Beispiel II.3.2

(1) *Sei $D =]a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann ist $H(D) = [a, b]$.*

(2) *$H(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, aber $H(\mathbb{N}_0) = \emptyset$*

(3) *$H(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}) = \emptyset$.*

(4) *$H\left(]0, 1[\cup \{-1\}\right) = [0, 1]$*

Anhand von Beispiel II.3.2 (4) sieht man, daß nicht jeder Punkt einer Menge D auch in $H(D)$ liegen muß. Die Punkte in $D \setminus H(D)$ nennt man *isolierte* Punkte von D.

Definition II.3.3 (Funktionsgrenzwert)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle $a \in H(D)$ den Grenzwert b, wofür wir schreiben $\lim_{x\to a} f(x) = b$, wenn für **alle** *Folgen (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, daß $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*[14]

Man sieht leicht, daß es für $a \in H(D)$ höchstens ein b gibt mit $\lim_{x\to a} f(x) = b$, da der Grenzwert einer Folge eindeutig ist. Man beachte, daß für $a \notin H(D)$ der Ausdruck $\lim_{x\to a} f(x)$ keinen Sinn macht, da es keine Folge in $D \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiel II.3.4
i) Sei $p(x) = (x-1)^2(x+1)$ und $q(x) = (x-1)(x-2)$ und

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

Offenbar ist $H(\mathbb{R} \setminus \{1,2\}) = \mathbb{R}$.
Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt leicht, daß für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ gilt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Für jede Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-1)^2(x_n+1)}{(x_n-1)(x_n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-2} = \frac{\lim_{n\to\infty}(x_n-1)(x_n+1)}{\lim_{n\to\infty} x_n - 2} = \frac{0\cdot 2}{-1} = 0$$

und somit $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.
Wir betrachten die Folgen

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad y_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ die beide den Grenzwert 2 haben. Es gilt einerseits

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-2} = -\infty$$

und andererseits

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \frac{(y_n-1)(y_n+1)}{y_n-2} = +\infty$$

also gibt es kein $b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to 2} f(x) = b$ und überdies gilt weder $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ noch $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

ii) Für $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ gilt $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, da für jede Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Grenzwert 0 gilt, daß $-|x_n| \leq f(x_n) \leq |x_n|$ und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, da $\lim_{n\to\infty} -|x_n| = 0 = \lim_{n\to\infty}$.

[14] Dieser Begriff macht auch Sinn für ∞ bzw. $-\infty$ statt b.

iii) Betrachten wir hingegen die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. *Betrachten wir weiters die Folgen*

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \qquad \textit{und} \qquad y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *die beide den Grenzwert* 0 *haben. Es gilt* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ *und* $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1$, *woraus folgt, daß* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *nicht existiert.*

iv) Für die Signumsfunktion $\mathsf{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(siehe Bsp. I.3.3 iii)) existiert* $\lim_{x\to 0} \mathsf{sgn}(x_n)$ *nicht, da* $\lim_{n\to\infty} \mathsf{sgn}(\frac{1}{n}) = 1$ *wohingegen* $\lim_{n\to\infty} \mathsf{sgn}(-\frac{1}{n}) = 1$

Satz II.3.5 (Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f, g : D \to \mathbb{R}$. *Wenn* $a \in H(D)$ *mit* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *dann gilt*

(1) $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = b + c$

(2) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = bc$

(3) $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{b}{c}$, *sofern* $c \neq 0$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus den entsprechenden Rechenregeln für konvergente Folgen (siehe Satz II.1.9). □

Bemerkung
Im allgemeinen gilt nicht, daß $H(D) \subseteq H(D(\frac{f}{g}))$ (betrachte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ und $g(x) = 0$, dann ist $D(\frac{f}{g}) = \emptyset$ und somit auch $H(D(\frac{f}{g})) = \emptyset \neq \mathbb{R}$). Wenn aber f und g Polynome sind mit g vom Grad ≥ 1, dann gilt $H(D(\frac{f}{g}))$, denn $H(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathbb{R}$ (wobei $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen von g sind).

Als unmittelbare Konsequenz von Satz II.1.11 erhalten wir folgendes Einschließungskriterium für Funktionsgrenzwerte.

Satz II.3.6 *Seien* $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$. *Sei* $a \in H(D)$ *und* $\varepsilon > 0$ *mit* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\}$. *Wenn* $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} g(x)$, *dann gilt auch* $\lim_{x\to a} h(x) = b$.

Wir betrachten nun links- bzw. rechtsseitige Funktionsgrenzwerte.

Definition II.3.7 *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $a \in H(D \cap]a, \infty[)$ *bzw.* $a \in H(D \cap]-\infty, a[)$. *Die Funktion* f *besizt an der Stelle* a *den* rechts- *bzw.* linksseitigen Grenzwert b, *wenn*

$$f_{|D\cap]a,\infty[} \qquad \textit{bzw.} \qquad f_{|D\cap]-\infty,a[}$$

an der Stelle a *den Grenzwert* b *hat, wofür wir*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = b$$

schreiben.

Beispiel II.3.8
i) Es gilt $\lim_{x\to 0^+} \mathsf{sgn}(x) = 1$, *aber* $\lim_{x\to 0^-} \mathsf{sgn}(x) = -1$.
ii) Es gilt $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, *aber* $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Definition II.3.9 *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und es existiere in* D *eine Folge* (x_n) *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. *Dann* besitzt f für x gegen ∞ *bzw.* $-\infty$ den Grenzwert b, *wenn für* **alle** *Folgen* (x_n) *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$, *wofür wir*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

schreiben.

Beispiel II.3.10
i) Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ *und auch* $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.
ii) Die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} \cos x$ *und* $\lim_{x\to-\infty} \cos x$ *existieren beide nicht.*

Nun führen wir den Begriff der Stetigkeit ein.

Definition II.3.11 (Stetigkeit)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$. *Die Funktion* f *heißt* stetig im Punkt $a \in D$, *wenn für* **alle** *Folgen* (x_n) *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *gilt, daß* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. *Die Funktion* f *heißt* stetig, *wenn* f *in allen* $a \in D$ *stetig ist.*

Bemerkung

(1) Für $a \in D \cap H(D)$ gilt

$$f \text{ stetig in } a \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(2) Für $a \in D \setminus H(D)$ ist f trivialerweise in a stetig.

(3) f ist genau dann in $a \in D$ *unstetig*, d.h. nicht stetig in a, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, sodaß $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ aber $f(a)$ nicht Grenzwert der Folge $(f(x_n))$ ist.

Beispiel II.3.12
i) $f : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$ *ist stetig.*
ii) Die Signumsfunktion $\mathsf{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist in jedem Punkt außer* 0 *stetig.*

Satz II.3.13 *Seien die Funktionen* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq \mathbb{R}$ *stetig auf* D. *Dann sind* $f + g$ *und* $f \cdot g$ *auch auf* D *stetig. Außerdem ist die Funktion* $\frac{f}{g}$ *auf ihrem Definitionsbereich* $D \setminus \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ *auch stetig.*

Beweis: folgt unmittelbar aus Satz II.1.9. $\square$

Beispiel II.3.14 *Die Funktion* $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ *ist offensichtlich stetig. Somit ist aufgrund des vorigen Satzes auch die Funktion* $\frac{1}{x}$ *auf ihrem Definitionsbereich* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *stetig.*

Satz II.3.15 *Seien* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $g : E \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $D, E \subseteq \mathbb{R}$ *und* $B(f) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E$. *Wenn* f *in* a *und* g *in* $f(a)$ *stetig ist, dann ist* $g \circ f$ *in* a *stetig. Somit ist* $g \circ f$ *stetig, wenn* f *und* g *stetig sind.*

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Weil f in a stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Da g in $f(a)$ stetig ist, gilt auch $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$, wie zu zeigen war. $\square$

Satz II.3.16

(1) *Polynome sind stetig auf* $\mathbb{R}$.

(2) *Rationale Funktionen* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *sind stetig auf* $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

(3) *Die (Quadrat-)Wurzelfunktion ist auf* $[0, \infty[$ *stetig.*

(4) *Die Betragsfunktion* $x \mapsto |x|$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *stetig.*

(5) *Die Funktionen* sin *und* cos *sind stetig auf* $\mathbb{R}$. *Somit sind auch* tan *und* cot *auf ihrem Definitionsbereich stetig.*

(6) *Die Exponentialfunktion* exp *ist auf* $\mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen folgen aus Satz II.3.13.
Mithilfe von Satz II.1.9 (5) zeigt man leicht, daß die Wurzelfunktion in Argumenten $a > 0$ stetig ist. Die Stetigkeit an der Stelle 0 sieht man folgendermaßen. Sei (x_n) ein Folge in $[0, \infty[$ mit Grenzwert 0. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, sodaß für $n \geq N_\varepsilon$ gilt $x_n \leq \varepsilon^2$ und somit $\sqrt{x_n} < \varepsilon$.
Behauptung (4) rechnet man leicht direkt nach. Sie folgt aber auch aus (1) und (3) mit Satz II.3.15, da $|x| = \sqrt{x^2}$.
Für (5) beweisen wir zuerst, daß sin stetig ist. Aus geometrischen Gründen gilt (warum?) für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, daß $|\sin(x)| \leq |x|$. Somit gilt für Nullfolgen (x_n) aufgrund des Einschließungskriteriums, daß $\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = 0$. Also ist sin an der Stelle 0 stetig. Wegen $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, gilt auch, daß cos an der Stelle 0 stetig ist. Angenommen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Wegen des entsprechenden Additionstheorems gilt, daß

$$\sin(x_n) = \sin(x_n - a + a) = \sin(x_n - a)\cos(a) + \cos(x_n - a)\sin(a)$$

und somit ist $\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \sin(a)$, da $\lim_{n\to\infty} \sin(x_n - a) = \sin(0) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \cos(x_n - a) = \cos(0) = 1$ (weil $\lim_{n\to\infty} x_n - a = 0$ und sin und cos an der

Stelle 0 bereits als stetig nachgewiesen wurden). Da $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ ist auch cos stetig aufgrund von Satz II.3.15.
Behauptung (6) werden wir später beweisen. $\square$

Definition II.3.17 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f heißt* stetig fortsetzbar *auf eine Menge E mit $D \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$, wenn eine stetige Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ existiert mit $f = g_{|D}$.*

Wenn $a \in H(D) \setminus D$, dann ist f genau dann auf $D \cup \{a\}$ stetig fortsetzbar, wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert. Die Fortsetzung $\widetilde{f}$ ist dann eindeutig mit $\widetilde{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Beispiel II.3.18
i) *Gegeben seien die Polynome $p(x) = x^2 - 2x = (x-2)x$ und $q(x) = 3(x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2) = 3x^2(x-1)^2(x-2)$. Die Funktion $f = \frac{p}{q}$ ist definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$, aber stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ vermittels $\widetilde{f}(x) = \frac{1}{3x(x-1)^2}$.*
ii) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ ist stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$ vermittels der Setzung $\widetilde{f}(0) = 0$, da $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$.*
iii) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$, ist nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar, da der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht existiert.*
iv) *Die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x-1}$ ist nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar, da $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ nicht existiert.*

Definition II.3.19 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* beschränkt*, wenn $B(f)$ als Menge beschränkt ist, d.h., wenn*

$$\exists K > 0 \forall x \in D \; |f(x)| < K$$

d.h., wenn $a \leq b$ existieren mit $B(f) \subseteq [a,b]$.

Beispiel II.3.20
i) *Die Funktionen* sin *und* cos *sind beschränkt, wohingegegen die Funktionen* tan *und* cot *nicht beschränkt sind.*
ii) *Ein Polynom ist genau dann beschränkt, wenn sein Grad ≤ 0 ist, d.h., wenn es konstant ist. Angenommen $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. O.B.d.A. sei $a_n > 0$. Es gilt dann $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^n} = a_n$. Es gibt dann eine Folge (x_k), sodaß $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{p(x_k)}{x_k^n} = a_n$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodaß für $k \geq N$ gilt, daß $\frac{p(x_k)}{x_k^n} > \frac{a_n}{2}$. Sei $K \geq 1$. Es gibt dann ein $k \geq N$ mit $x_k \geq K$. Somit gilt dann $p(x_k) \geq \frac{a_n}{2} x_k^n \geq \frac{a_n}{2} x_k \geq \frac{a_n}{2} K$. Also ist p unbeschränkt. Sollte $a_n < 0$ sein, wendet man dieselbe Argumentation auf $-p$ an.*

Mithilfe eines "topologischen" Arguments, das den Rahmen unserer Vorlesung überschreitet, kann man folgenden Satz beweisen.

Satz II.3.21
Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist $B(f) = [c, d]$ für geeignete $c, d \in \mathbb{R}$.

Insbesondere heißt dies, daß für stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt, daß

(1) f ist beschränkt

(2) f nimmt sein Minimum c und sein Maximum d auf $[a, b]$ an

(2) alle zwischen Minimum und Maximum liegenden Werte werden von f angenommen.

Beispiel II.3.22
i) *Betrachte die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$. Diese Funktion ist unbeschränkt, aber in 0 nicht stetig.*
ii) *Die Funktion $g :]0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht beschränkt.*
iii) *Die Funktion $h :]-1, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist stetig und beschränkt, nimmt aber keinen größten Wert auf ihrem Definitionsbereich an.*

Satz II.3.23 (Bisektionsverfahren)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann gibt es zu jedem $d \in [f(a), f(b)]$ ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.

Beweis: Sei $d \in [f(a), f(b)]$. Wir basteln eine Folge $[a_n, b_n]$ von Teilintervallen von $[a, b]$, sodaß für alle n gilt

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

iii) $f(a_n) \leq d \leq f(b_n)$

Angenommen wir haben eine solche Folge, dann sind die Folgen (a_n) und (b_n) wegen Bedingung i) beschränkt und monoton und haben somit Grenzwerte c bzw. c' in $[a, b]$, die aber wegen Bedingung ii) gleich sind. Wegen der Stetigkeit von f (im Punkt c) gilt somit $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Wegen Bedingung iii) gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq d \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ und somit $f(c) \leq d \leq f(c)$, also $f(c) = d$.
Nun zur Konstruktion der Folge $[a_n, b_n]$. Wir setzen $[a_0, b_0] = [a, b]$. Angenommen wir haben $[a_k, b_k]$ für $k \leq n$ bereits konstruiert, sodaß sie die Bedingungen i)–iii) erfüllen. Die Konstruktion des nächsten Intervalls erfolgt nun durch die Setzung

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, b_n] & \text{wenn } f(c_n) < d \\ [a_n, c_n] & \text{wenn } d \leq f(c_n) \end{cases}$$

wobei $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ (Mittelpunkt des Intervalls $[a_n, b_n]$). Offenbar ist die Länge von $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ gleich der Hälfte der Länge von $[a_n, b_n]$. Die Bedingungen i) und iii) werden offensichtlich durch die Konstruktion auch sicher gestellt. $\square$

Es gilt auch das Analogon des Satzes II.3.23 für den Fall, daß $f(a) > f(b)$ (z.B., indem man $-f$ betrachtet!).

Als nächstes beweisen wir eine alternative Charakterisierung der Stetigkeit, die auch eine "rechnerische" Bedeutung hat.

Satz II.3.24 (ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Für $a \in D$ sind folgende beide Aussagen äquivalent

(1) *f ist in a stetig*

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$.

Beweis: $\Leftarrow$: Angenommen (2) gilt. Sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Wir müssen zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $\delta > 0$, sodaß $\forall x \in D \big(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$. Weil (x_n) gegen a konvergiert, gibt es ein n_0 mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt dann aber auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
$\Rightarrow$: Angenommen es gilt die Negation von (2), d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\forall \delta > 0 \exists x \in D \big(|x-a| \leq \delta \wedge \varepsilon \leq |f(x)-f(a)|\big)$. Dann gibt es aber zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$, aber $\varepsilon \leq |f(x_n) - f(a)|$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, aber nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Also ist f in a nicht stetig. $\square$

Obige Charakterisierung der Stetigleit von f in a kann man intuitiv wie folgt interpretieren: um $f(a)$ bis auf Genauigkeit ε zu berechnen, muß man a bis auf Genauigkeit δ kennen. Eine Funktion $M :]0, \infty[\to]0, \infty[$ heißt ein *Stetigkeitsmodul* für f an der Stelle a, wenn $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \big(|x-a| < M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$. Folgende Beispiele zeigen, daß der Stetigkeitsmodul stetiger Funktionen von a abhängt, d.h., auch wenn $f : D \to \mathbb{R}$ auf D stetig ist, braucht **nicht** zu gelten, daß

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D \big(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|\big)$$

Wenn jedoch diese Bedingung gilt, dann heißt f auf D *gleichmäßig stetig.*

Beispiel II.3.25
i) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Es gilt $f(x+\delta) - f(x) = 2\delta x + \delta^2$. Dieser Wert kann auch für sehr kleine δ betragsmäßig beliebig groß werden (wenn x sehr groß wird). Deshalb ist f auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig.*
ii) *Die Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf ihrem Definitionsbereich stetig. Es gilt $f(x+\delta) - f(x) = \frac{\delta-(x+\delta)}{\delta(x+\delta)} = \frac{-x}{\delta(x+\delta)}$. Dieser Wert kann auch für sehr kleine δ betragsmäßig beliebig groß werden, da $\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\delta(x+\delta)} = -\infty$.*

Es gilt aber folgender wichtiger Satz, dessen Beweis allerdings den Rahmen dieser Vorlesung übersteigt.

Satz II.3.26 *Stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind immer gleichmäßig stetig.*

Man beachte, daß dies i.a. nicht mehr gilt, wenn der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall ist (siehe Bsp. II.3.25).
Eine in der Praxis sehr oft anzutreffende hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung, die gleichmäßige Stetigkeit zur Folge hat ist die der **Lipschitz-Stetigkeit**

$$\exists L > 0 \forall x, y \in D \; |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$$

Ein $L > 0$ mit $\forall x, y \in D \; |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$ heißt Lipschitz-Konstante für die Funktion f.

Beispiel II.3.27
i) *Die Funktion $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ hat Lipschitzkonstante 2, da*

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2 \cdot |x - y|$$

für $x, y \in [0, 1[$.
ii) *Die Funktion $f :]0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist wegen Satz II.3.26 nicht Lipschitz-stetig, da sie ja nicht gleichmäßig stetig ist (siehe Bsp. II.3.25 ii). Man kann dies aber auch direkt begründen. Angenommen $L > 0$ sei eine Lipschitz-Konstante für f. Dann gilt für alle $x, y \in]0, 1[$, daß*

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| < L \cdot |x - y|$$

also $\frac{1}{xy} < L$ für alle $x, y \in]0, 1[$ mit $x \neq y$. Dies ist aber nicht der Fall: sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > L$, dann gilt $\frac{1}{\frac{1}{n} \frac{1}{n+1}} = n(n + 1) \geq n > L$, obwohl $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$ verschiedene Elemente von $]0, 1[$ sind.

III Differentiation

III.1 Differenzierbarkeit (und Rechenregeln)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Für $a \in D \cap H(D)$ betrachten wir die Funktion $g : D \setminus \{a\}$ mit

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

wobei offensichtlich $g(x)$ die Steigung der Geraden (“Sekante”) durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ angibt.

Definition III.1.1 *Die Funktion f heißt* differenzierbar *in $a \in D \cap H(D)$, wenn $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Sofern existent bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $f'(a)$ und nennen ihn* “Differentialquotient” *an der Stelle a.*

Physikalisch bedeutet $f'(a)$ die *Momentangeschwindigkeit des Massenpunkts mit Ortskurve f zum Zeitpunkt t.*
Geometrisch bedeutet $f'(a)$ die *Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt* $(a, f(a))$. Diese Tangente ist in Parameterform beschrieben durch $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$.

Beispiel III.1.2
i) *Für konstante Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$) gilt*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0$$

f́”ur alle $a \in \mathbb{R}$.
ii) *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Ableitung der Funktion x^n nach x gleich nx^{n-1}.*
Beweis: *Wir beweisen die Behauptung mit Induktion über n. Der Fall $n = 0$ folgt aus* i)*. Nehmen wir als IH an, die Aussage gelte für n. Es gilt für $x \neq a$, daß*

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = \frac{(x^n - a^n)x + a^n(x - a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a}x + a^n$$

und somit

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} \overset{IH}{=} na^{n-1}a + a^n = na^n + a^n = (n + 1)a^n$$

wie behauptet. □

iii) *Für die Absolutbetragsfunktion $f(x) = |x|$ gilt*

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

iv) *Sei* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x}$. *Für* $x \neq a$ *gilt*

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

und somit

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

falls $a > 0$ *und andernfalls gilt*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

da $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, *d.h.* $f'(0)$ *ist undefiniert.*

Definition III.1.3
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $D \subseteq H(D)$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$. *Dann heißt* f differenzierbar auf einer Menge $M \subseteq D$, *falls* f *in allen Punkten von* M *differenzierbar ist, und die Funktion* f *heißt* differenzierbar, *wenn* f *auf* D *differenzierbar ist.*

Beispiel III.1.4
i) *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist die Funktion* $f(x) = x^n$ *auf ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar.*
ii) *Die Funktion* $f(x) = |x|$ *ist auf* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *differenzierbar.*
iii) *Die Funktion* $f(x) = \sqrt{x}$ *ist auf* $]0, \infty[$ *differenzierbar.*

Wir zeigen nun, daß Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft ist als Stetigkeit.

Satz III.1.5 *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$. *Wenn* f *in* $a \in D \cap H(D)$ *differenzierbar ist, dann ist* f *in* a *auch stetig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.*

Beweis: Angenommen f ist in a differenzierbar. Für $x \in D \cap H(D) \setminus \{a\}$ sei $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Offenbar gilt für solche x, daß

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + g(x)(x - a)$$

und somit auch

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + g(x)(x - a) = f(a) + f'(a)0 = f(a)$$

da $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a)$. Also ist f in a stetig.
Die Absolutbetragsfunktion und die Quadratwurzelfunktion sind in 0 stetig, aber nicht differenzierbar. $\square$

Als nächstes wollen wir die Kettenregel beweisen, die besagt, daß $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$, falls die Komposition von f und g definiert ist und die Ableitungen $f'(a)$ und $g'(f(a))$ existieren. Ein unmittelbar sich aufdrängendes intuitives Argument ist folgendes: sei (x_n) eine gegen a konvergierende Folge, dann gilt

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{g(f(x_n))-g(f(a))}{x_n-a} \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{g(f(x_n))-g(f(a))}{f(x_n)-f(a)} \tfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{g(f(x_n))-g(f(a))}{f(x_n)-f(a)} \cdot \lim_{n\to\infty} \tfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \\
&= g'(f(a))f'(a)
\end{aligned}
$$

was jedoch problematisch ist, da $f(x_n) - f(a)$ für unendlich viele n gleich 0 sein kann. Um dieses Problem in der Argumentation zu umgehen, erweist sich folgende Reformulierung der Differenzierbarkeit als nützlich, die auch deswegen von größter Wichtigkeit ist, da sie sich auf Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern läßt.

Satz III.1.6 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat in $a \in D \cap H(D)$ die Ableitung b genau dann, wenn eine Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ existiert, sodaß*

(1) *$f(x) - f(a) - b(x-a) = r(x)(x-a)$ für alle $x \in D$ und*

(2) *$\lim_{x\to a} r(x) = 0$.*

Beweis: Sei $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x \in D \setminus \{a\}$.
Angenommen f hat in a die Ableitung b. Dann $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Sei nun $r : D \to \mathbb{R}$ definiert als

$$
r(x) = \begin{cases} g(x) - b & \text{wenn } x \neq a \\ 0 & \text{wenn } x = a \end{cases}
$$

Offenbar erfüllt diese Funktion aufgrund ihrer Definition die Bedingung (1) und sie erfüllt die Bedingung (2), da $\lim_{x\to a} g(a) = b$.
Angenommen $r : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die die Bedingungen (1) und(2) erfüllt. Aus (1) folgt, daß $r(x) = g(x)-b$ für $x \neq a$, und somit folgt aus Bedingung (2), daß $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Also hat f im Punkt a die Ableitung b. □

Satz III.1.7 *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $B(f) \subseteq E$. Wenn f in $a \in D$ und g in $f(a)$ differenzierbar sind, dann ist $g \circ f$ auch in a differenzierbar, wobei $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Beweis: Da g in $f(a)$ differenzierbar ist, gibt es aufgrund von Sazt III.1.6 eine Funktion $r : E \to \mathbb{R}$ mit

(1) $g(y) - g(f(a)) - g'(f(a))(y - f(a)) = r(y)(y - f(a))$ für alle $y \in E$ und

(2) $\lim_{y\to f(a)} r(y) = 0$.

Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x\to a} \tfrac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \tfrac{g'(f(a))(f(x)-f(a))+r(f(x))(f(x)-f(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \tfrac{g'(f(a))(f(x)-f(a))}{x-a} + \lim_{x\to a} \tfrac{r(f(x))(f(x)-f(a))}{x-a} \\
&= g'(f(a))f'(a) + 0 \cdot f'(a) \\
&= g'(f(a))f'(a)
\end{aligned}
$$

wobei die vorletzte Gleichung aus $\lim_{x\to a} r(f(x)) = 0$ folgt, was sich wie folgt begründen läßt. Angenommen (x_n) sei eine Folge in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Dann konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(a)$, da f in a differenzierbar und somit stetig ist. Da $\lim_{y\to f(a)} r(y) = 0$, folgt somit $\lim_{n\to\infty} r(f(x_n)) = 0$. $\square$

Beispiel III.1.8 *Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x) = x + a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $f'(x) = 1$. Für die Funktion $h = g \circ f$ gilt dann nach der Kettenregel $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(x+a)$.*

Als nächstes beweisen wir ein paar Rechenregeln für die Differentiation.

Satz III.1.9 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D \cap H(D)$.*

(1) *Wenn f und g an der Stelle a differenzierbar sind, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ an der Stelle a differenzierbar, wobei*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad \text{und} \qquad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

wobei die zweite Gleichheit als Produkt- bzw. Leibnizregel bekannt ist.

(2) *Wenn f und g an der Stelle a differenzierbar sind und $g(a) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ an der Stelle a differenzierbar, wobei*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

bekannt als Quotientenregel.

Beweis: Seien f und g in $a \in D \cap H(D)$ differenzierbar. Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \tfrac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \tfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a) + g'(a)
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \tfrac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \tfrac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \tfrac{(f(x)-f(a))g(x)}{x-a} + \lim_{x\to a} \tfrac{f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, daß aufgrund von Satz III.1.5 die Funktion g in a stetig ist, da sie dort nach Annahme differenzierbar ist.
Nehmen wir weiters an, daß $g(a) \neq 0$. Weil g in a auch stetig ist, ist auch $g(x) \neq 0$ für x in einer hinreichend kleinen Umgebung von a. Es gilt nun, daß

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$$

da $\lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{x-a} = -g'(a)$ und $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} = \frac{1}{g(a)^2}$. Mithilfe der bereits bewiesenen Produktregel erhalten wir dann

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

wie behauptet. □

Als unmittelbare Konsequenz dieses Satzes erhalten wir, daß Polynome und rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind. Die Ableitung eines Polynoms $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist aufgrund von Beispiel III.1.2 ii) gegeben durch $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.
Als nächstes zeigen wir die Differenzierbarkeit der Winkelfunktionen.

Satz III.1.10 *Die Funktionen* sin *und* cos *sind auf ganz* $\mathbb{R}$ *differenzierbar, wobei* $\sin' = \cos$ *und* $\cos' = -\sin$. *Also sind auch* tan *und* cot *auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar, wobei*

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \textit{und} \qquad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß $\sin'(0) = 1$. Für reelle x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, wie eine naheliegende geometrische Überlegung zeigt, und somit $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$. Da sin ungerade und cos gerade ist, gilt

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

auch für alle x mit $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Da cos stetig und somit $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, folgt aufgrund des Einschließungskriteriums, daß

$$\sin'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Mithilfe des Additionstheorem für sin können wir nun die Ableitung von sin wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}\sin' x &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(x)\tfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\tfrac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

weil nämlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)^2-1}{h(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)^2}{h^2}\frac{h}{\cos(h)+1} = 0$$

Da $\cos(x) = \cos(x)\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})\sin(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ gilt

$$\cos'(x) = \sin'\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

wie behauptet.
Die Behauptungen für tan und cot ergeben sich unmittelbar aus Satz III.1.9 (2).

$\square$

Wir betrachten nun ein etwas umfänglicheres

Beispiel III.1.11 *Seien $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_1(x) = x^2 + 2x \qquad f_2(x) = \sin(x) \qquad f_3(x) = x^3$$

mit den Ableitungen

$$f_1'(x) = 2x + 2 \qquad f_2'(x) = \cos(x) \qquad f_3'(x) = 3x^2$$

Durch iterierte Anwendung der Kettenregel berechnet man die Ableitung von $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ folgendermaßen

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_3'((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot (f_2 \circ f_1)'(x) = f_3'((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) \\ &= 3(\sin(x^2+2x))^2 \cdot \cos(x^2+2x) \cdot (2x+2) \end{aligned}$$

Natürlich kann man viele Funktionen nicht nur einmal, sondern mehrmals und manchmal sogar beliebig oft differenzieren.

Definition III.1.12 (mehrfache Ableitungen)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \subseteq H(D)$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt einmal differenzierbar, wenn für alle $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ existiert. Die Funktion f heißt n+1-mal differenzierbar, wenn sie n-mal differenzierbar ist und ihre n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf ganz D differenzierbar ist, wobei wir die Ableitung von $f^{(n)}$ mit $f^{(n+1)}$ bezeichnen.
Die Funktion f heißt n-mal stetig differenzierbar, wenn f n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ auf D stetig ist.
Die Funktion f heißt unendlich differenzierbar bzw. glatt, wenn für alle n die n-te Ableitung von f existiert.

Beispiel III.1.13
i) *Die Funktionen* sin *und* cos *sind glatt.*
ii) *Die Funktion* $f(x) = x^n$ *ist glatt, wobei*

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} & \textit{wenn } k \leq n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Somit sind alle Polynome glatt.

III.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Im Verlauf dieses Abschnitts sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definition III.2.1 *Die Funktion* f *besitzt in* $a \in D$ *ein* globales Maximum*, wenn* $\forall x \in D\ f(x) \leq f(a)$*, und sie besitzt in* a *ein* lokales Maximum*, wenn*

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in D \cap\,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\;\; f(x) \leq f(a)$$

Analog erhält man die Begriffe globales und lokales Minimum, wenn man $\leq$ *durch* $\geq$ *ersetzt. Extremum heißt Minimum bzw. Maximum.*

Satz III.2.2 *Sei* $D =]a, b[$ *und* f *auf ganz* D *differenzierbar. Wenn* f *in* $a \in D$ *ein lokales Extremum besitzt, dann ist* $f'(a) = 0$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung für den Fall, daß f in a ein lokales Maximum annimmt. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$, sodaß $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq D$ und $f(x) \leq f(a0$ für alle x mit $|x - a| < \varepsilon$. Für die Funktion $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ gilt

$$g(x) = \begin{cases} \leq 0 & \text{wenn } x \in]a, a+\varepsilon[\\ \geq 0 & \text{wenn } x \in]a-\varepsilon, a[\end{cases}$$

und somit

$$0 \leq \lim_{x \to a^-} g(x) = f'(a) = \lim_{x \to a^+} g(x) \leq 0$$

also $f'(a) = 0$.
Für lokales Minimum ist der Beweis analog. □

Obiger Satz III.2.2 gilt im allgemeinen nicht für $D = [a, b]$. Betrachten wir z.B. die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Diese Funktion hat (globale) Extrema in -1 und 1, aber ihre Ableitung verschwindet dort nicht.
Außerdem läßt sich die Implikation des Satz III.2.2 nicht umkehren, denn die Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ hat in 0 kein lokales Extremum, obwohl $f'(0) = 0$.

Als nächstes beweisen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Satz III.2.3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis: Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie wegen Satz II.3.21 auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.
Wenn $f(a) = f(b)$, dann nimmt f ein Extremum in einem $c \in]a, b[$ an. Mit Satz III.2.2 ist dann $f'(c) = 0$, woraus die Behauptung folgt.
Im Falle $f(a) \neq f(b)$, betrachten wir die Funktion $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$, die auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Da $g(a) = f(a) = g(b)$, folgt aus der Überlegung im vorigen Absatz, daß ein $c \in]a, b[$ existiert mit $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, d.h. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Eine naheliegende physikalische Interpretation des Mittelwertsatzes ist, daß im Verlauf einer (1-dimensionalen) Bewegung zu irgendeinem Zeitpunkt die Augenblicksgeschwindigkeit mit der Durchschnittsgeschwindigkeit übereinstimmt.

Beispiel III.2.4 *Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ ist stetig und für $x \in [0, 1[$ ist $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Steigung der Sekante von $(0, f(0))$ nach $(1, f(1))$ ist offenbar -1. Der Mittelwertsatz stellt sicher, daß ein $x \in]0, 1[$ existiert mit $f'(x) = -1$. Ein solches x kann man aber in diesem Fall bestimmen, da $f'(x) = -1$ gdw $x = \sqrt{1 - x^2}$ gdw $x^2 = 1 - x^2 \land x \geq 0$ gdw $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Der Mittelwertsatz erlaubt es uns, aus der Ableitung einer Funktion auf ihr Monotonieverhalten zu schließen.

Satz III.2.5 *Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf D. Dann gilt*

(1) *Wenn $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$, dann ist f streng monoton wachsend bzw. fallend.*

(2) *f ist monoton wachsend bzw. falled genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: Wenn f monoton wachsend ist, dann gilt $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$ und somit $f'(z) \geq 0$ für alle $z \in [a, b]$. Angenommen $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn $x_1 < x_2$ in D, dann gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein $x_3 \in]x_1, x_2[$ mit $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_3) \geq 0$ und somit $f(x_1) \leq f(x_2)$. Wenn alle $f(x) > 0$, dann gilt aber auch $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_3) > 0$ und somit $f(x_1) < f(x_2)$.
Fü "fallend" statt "wachsend" beweist man die Behauptungen analog. □

Die Implikation der ersten Behauptung läßt sich nicht umkehren, da die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ streng monoton wächst, aber $f'(0) = 0$.

Korollar III.2.6 *Wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f' = g'$, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$.*

Beweis: Wenn $f' = g'$, dann ist $(f - g)' = f' - g' = 0$ und somit ist $f - g$ aufgrund von Satz III.2.5 sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend, d.h. konstant, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Satz III.2.5 erlaubt einem auch ggf. die Existenz globaler Extrema nachzuweisen wie in folgendem

Beispiel III.2.7 *Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{x} + 2x$. Offenbar gilt für $x \in]0,1[$, daß $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$. Es gilt*

$$f'(x) \square 0 \qquad gdw \qquad x \square \frac{1}{\sqrt{2}}$$

für $\square \in \{<, >, =\}$. Also ist f im Intervall $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ streng monoton fallend und im Intervall $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$ streng monoton wachsend. Also hat f in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein globales Minimum.

Durch Betrachtung der zweiten Ableitungen kann man ggf. feststellen, ob lokale Minima bzw. Maxima vorliegen.

Satz III.2.8 *Sei $D =]a, b[$ mit $a < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Wenn $f'(x) = 0$, dann gilt*

(1) *wenn $f''(x) > 0$, dann hat f in x ein lokales Minimum*

(2) *wenn $f''(x) < 0$, dann hat f in x ein lokales Maximum.*

Beweis: Angenommen $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$. Da f'' stetig ist, ist f'' in einer ganzen ε-Umgebung von x echt größer 0 und somit ist f' dort monoton wachsend. Da $f'(x) = 0$, ist dann f in $]x-\varepsilon, x[$ monoton fallend und in $]x, x+\varepsilon[$ monoton wachsend. Also hat f in x ein lokales Minimum.
Analog zeigt man die zweite Behauptung. $\square$

Beispiel III.2.9 *Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Ihre erste Ableitung ist*

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

und deshalb ist $f'(x) = 0$ gdw $x \in \{-1, 1\}$. Um festzustellen, welche Art von lokalem Extremum bei 1 bzw. -1 vorliegt, betrachten wir die zweite Ableitung der Funktion f

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)2(1 + x^2)2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

woraus sich ergibt, daß $f''(-1) = \frac{1}{2}$ und $f''(1) = -\frac{1}{2}$. Also liegt bei -1 ein lokales Minimum und bei 1 ein lokales Maximum vor. Da aber $f'(x) < 0$ gdw $|x| > 1$ und $f(x) < 0$ gdw $x < 0$, liegt in -1 ein globales Minimum und in 1 ein globales Maximum vor.

Als weitere Anwendung des Mittelwertsatzes beweisen wir die Regel von de l'Hôpital.

Satz III.2.10 (Regel von de l'Hôpital)
Sei $D =]a, b[$ mit $a < b$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in [a, b]$, sodaß

(1) $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$

(2) $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$

(3) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existiert.*

Dann gilt $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis: Aus Annahme (2) folgt mit dem Mittelwertssatz, daß g injektiv ist. Daraus und Annahme (1) folgt (warum?), daß g in einer ε-Umgebung von c von 0 verschieden ist. Sein nun (x_n) eine gegen c konvergierende Folge in D. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $|x_n - c| < \varepsilon$ für alle n gilt.
Wir zeigen nun, daß zu jedem n ein ξ_n echt zwischen c und x_n existiert, mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

da dann daraus folgt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wie behauptet.
Für den Nachweis der Existenz eines geeigneten ξ_n betrachten wir die Funktion $h(x) = f(x) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} g(x)$ auf $D \cup \{c\}$. Es gilt $h(c) = 0 = h(\xi_n)$ und $h'(x) = f'(x) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} g'(x)$ für $x \in D$. Also gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein ξ_n echt zwischen c und x_n mit $h'(\xi_n) = 0$ und somit $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. □

Beispiel III.2.11 *Sei $f(x) = 1 - \cos(x)$ und $g(x) = 1 - \cos(2x)$. Diese Funktionen erfüllen in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 die Voraussetzungen von Satz III.2.10 und somit gilt* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Da aber $f'(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = 2\sin(2x)$ ebenfalls die Voraussetzungen von Satz III.2.10 erfüllen, gilt auch* $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. *Also gilt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{4\cos(2x)} = \frac{1}{4}$$

III.3 Spezielle Differenzierbare Funktionen

III.3.1 Ableitung der Umkehrfunktion

Da viele Funktionen als Umkehrfunktionen einfacherer Funktionen definiert sind, ist folgender Satz äußerst hilfreich.

Satz III.3.1 (Ableitung der Umkehrfunktion)
Sei $D =]a,b[$ mit $a < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' > 0$ oder $f' < 0$. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \to \mathbb{R}$ und ist differenzierbar, wobei

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für alle $y \in B(f)$.

Beweis: Da $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, folgt aus dem Mittelwertsatz, daß f injektiv ist. Wenn $f' > 0$, dann ist f streng monoton wachsend, und wenn $f' < 0$, dann ist f streng monoton fallend. In beiden Fällen ist $B(f)$ ein offenes Intervall wegen Satz II.3.23, da f ja stetig ist, und es existiert die Umkehrfunktion f^{-1}.
Wir zeigen nun leicht, daß f^{-1} stetig ist. Nehmen wir O.B.d.A. an, daß $f' > 0$ und somit f streng monoton wachsend ist. Sei $f^{-1}(y) = x$ und $\varepsilon > 0$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subseteq D$. Sei $\delta = \min(|f^{-1}(x+\varepsilon)-y|, |f^{-1}(x-\varepsilon) - y|)$, welches > 0, da f injektiv ist. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $f^{-1}\left(]y-\delta, y+\delta[\right) \subseteq]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Somit haben wir nachgewiesen, daß f^{-1} stetig ist. Analog argumentiert man in Falle $f' < 0$.
Sei (y_n) eine Folge in $B(f)\setminus\{y\}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Da f^{-1} stetig ist, konvergiert die Folge $(f^{-1}(y_n))$ gegen $f^{-1}(y)$. Da f injektiv ist, sind alle $f^{-1}(y_n)$ von $f^{-1}(y)$ verschieden. Es gilt nun

$$\left(f^{-1}\right)'(f^{-1}(y)) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(f^{-1}(y))}$$

Also ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(f^{-1}(y))}$$

wie behauptet. □

III.3.2 Arcusfunktionen

Betrachten wir folgende Einschränkungen der Winkelfunktionen

1) $f = \sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ hat Bild $[-1,1]$ und ist streng monoton wachsend

2) $f = \cos_{|[0,\pi]}$ hat Bild $[-1,1]$ und ist streng monoton fallend

3) $f = \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ hat Bild $\mathbb{R}$ und ist streng monoton wachsend

4) $f = \cot_{|]0,\pi[}$ hat Bild $\mathbb{R}$ und ist streng monoton fallend.

Die Umkehrfunktionen dieser Funktionen existieren und heißen $\arcsin, \arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ bzw. $\arctan, \mathrm{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mithilfe von Satz III.3.1 kann man zeigen, daß

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{und} \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für x mit $|x| < 1$ und

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Für den Fall des arcsin sieht man dies folgendermaßen

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und die anderen Fälle seien als Übung empfohlen.

III.3.3 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir haben bereits gesehen, daß für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x) = x^n$ auf $[0,\infty[$ streng monoton wachsend ist und die Ableitung $f_n'(x) = nx^{n-1}$ besitzt. Die Umkehrfunktion f_n^{-1} heißt n-te Wurzel und wir schreiben $x^{\frac{1}{n}}$ bzw. $\sqrt[n]{x}$ für $f_n^{-1}(x)$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty[$ schreiben wir $x^{\frac{n}{m}}$ als Abkürzung für $\sqrt[m]{x^n}$. Offenbar gilt $x^{\frac{n}{m}} = y$ gdw $x^n = y^m$. Daraus folgt nun, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, daß $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[km]{kn}$. Somit hängt der Wert von $x^{\frac{n}{m}}$ bloß vom Quotienten $q = \frac{n}{m}$ ab, was die Notation x^q rechtfertigt. Für rationale Zahlen $q < 0$ schreiben wir x^q als Abkürzung für $\frac{1}{x^{-q}}$. Wir schreiben überdies x^0 für 1.

Lemma III.3.2 *Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $x^{\frac{n}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n$ für alle $x \geq 0$.*

Beweis: Es gilt

$$(x^n)^{\frac{1}{m}} = y \iff x^n = y^m$$

und

$$(x^{\frac{1}{m}})^n = y \iff x^{\frac{1}{m}} = y^{\frac{1}{n}} \iff (x^{\frac{1}{m}})^{nm} = (y^{\frac{1}{n}})^{nm} \iff x^n = y^m$$

und somit $(x^n)^{\frac{1}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n$ wie behauptet. $\square$

Wir können nun die üblichen Rechenregeln für Potenzen beweisen.

Satz III.3.3 *Für $p, q \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \,]0, \infty[$ gilt*

(1) $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$

(2) $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$

(3) $x^p \cdot y^p = (xy)^p$

Beweis: Sei $p = \frac{n}{m}$ und $q = \frac{\tilde{n}}{\tilde{m}}$.
ad (1) : Es gilt dann aufgrund von Lemma III.3.2

$$x^p \cdot x^q = x^{\frac{n\tilde{m}}{m\tilde{m}}} \cdot x^{\frac{m\tilde{n}}{m\tilde{m}}} = (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{n\tilde{m}} \cdot (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{m\tilde{n}} = (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{n\tilde{m}+m\tilde{n}} = x^{\frac{n\tilde{m}+m\tilde{n}}{m\tilde{m}}} = x^{p+q}$$

ad (2) : wegen Lemma III.3.2 gilt

$$(x^p)^q = ((x^{\frac{1}{m}})^n)^{\frac{1}{\tilde{m}}})^{\tilde{n}} = (((x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{\tilde{m}}})^n)^{\tilde{n}} = (x^{\frac{1}{m\tilde{m}}})^{n\tilde{n}} = x^{\frac{n\tilde{n}}{m\tilde{m}}} = x^{p \cdot q}$$

ad (3) : Es gilt $x^p \cdot y^p = (x^{\frac{1}{m}})^n \cdot (y^{\frac{1}{m}})^n = (x^{\frac{1}{m}} \cdot y^{\frac{1}{m}})^n = ((xy)^{\frac{1}{m}})^n = (xy)^p$. $\square$

Satz III.3.4 *Sei q eine rationale Zahl und $f_q : [0, \infty[\,\to \mathbb{R} : x \mapsto x^q$. Dann gilt für alle $x > 0$, daß $f_q'(x) = qx^{q-1}$.*

Beweis: Aufgrund von Satz III.3.1 gilt für $x > 0$, daß $(f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{(\frac{1}{n}-1)}$. Da auch $f_n'(x) = nx^{n-1}$ gilt die Behauptung für q der Gestalt n oder $\frac{1}{n}$.
Sei $p = \frac{n}{m}$. Für $f(x) = x^p$, $g(x) = x^n$ und $h(x) = x^{\frac{1}{m}}$ gilt $f = g \circ h$. Somit gilt aufgrund der Kettenregel, daß

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = nh(x)^{n-1} \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}} x^{\frac{1-m}{m}} = px^{\frac{n-m}{m}} = px^{p-1}$$

Aufgrund der Quotientenregel gilt

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2} = -px^{p-1}x^{-2p} = -px^{-p-1}$$

Die Ableitung von x^0 ist gleich 0 und somit gleich $0x^{-1}$. Also gilt für alle $q \in \mathbb{Q}$, daß die Ableitung von x^q gleich qx^{q-1} ist. $\square$

III.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Für die Eulersche Zahl $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kann man die Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R} : q \mapsto e^q$ betrachten und sich fragen, ob sie zu einer *stetigen* Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. Falls existent ist diese stetige Fortsetzung eindeutig, da jede reelle Zahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden kann. Wir zeigen, daß dies durch die die Eulersche Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

bewerkstelligt wird. Zur Erinnerung sei erwähnt, daß wir aus dem Beweis von Satz II.1.17 bereits wissen, daß

(1) $\exp(x) > 0$ und

(2) $\exp(x)\exp(-x) = 1$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Der nächste Satz bringt einige wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion zum Ausdruck.

Satz III.4.1

(1) *Die Funktion* $\exp$ *ist streng monoton wachsend und differenzierbar mit* $\exp' = \exp$. *Also ist* $\exp$ *unendlich oft differenzierbar.*

(2) $1 + x \le \exp(x)$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^k} = \infty$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$

(5) $B(\exp) =]0,\infty[$.

Beweis: (1) Wir zeigen zuerst, daß $\exp$ monoton wachsend ist. Dies ist klar für das Intervall $[0,\infty[$ aufgrund des Einschließungskriteriums. Da $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, ist $\exp$ auch auf $]-\infty,0]$ monoton wachsend. Da $\exp(0) = 1$ und $\exp(x) \le 1$ für $x \le 0$, ist $\exp$ auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.
Wir zeigen nun, daß

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Offenbar genügt es $h \in]0,1]$ zu betrachten. Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es zu jedem n ein $\xi_n \in]x, x+h[$ mit

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = h\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}$$

und somit
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}=\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$$
Da $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{\xi_n}{n}=1$ gilt auch
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}=\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$$
Wegen der Monotonie von $x\mapsto x^n$ für ungerade $n\in\mathbb{N}$ folgt nun, daß für ungerade n gilt
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{x+1}{n}\right)^n$$
Durch Multiplikation mit h und $n\to\infty$ erhält man
$$h\exp(x)\leq\exp(x+h)-\exp(x)\leq h\exp(x+1)$$
und somit aufgrund des Einschließungskriteriums
$$\lim_{h\to 0^+}\exp(x+h)-\exp(x)=0$$
Da für ungerade n gilt
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n$$
folgt mit $n\to\infty$, daß
$$\exp(x)\leq\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}\leq\exp(x+h)$$
und somit $\lim_{h\to 0^+}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}=\exp(x)$.
Ähnlich zeigt man, daß
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}=\exp(x)$$
woraus folgt, daß $\exp'=\exp$.
Aus $\exp>0$ folgt nun, daß exp auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

(2) Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt $1+x\leq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für genügend große n und somit $1+x\leq\exp(x)$.

(3) Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert als $f_k(x)=\exp(x)-\frac{x^k}{k!}$. Offenbar gilt $f'_{k+1}=f_k$. Da $\exp(0)=1$ und exp monoton wachsend ist, gilt $f_0(x)\geq 0$ für alle $x\geq 0$. Angenommen $f_k(x)\geq 0$ für alle $x\geq 0$. Dann gilt auch $f'_{k+1}(x)=f_k(x)\geq 0$ für $x\geq 0$. Somit ist f_{k+1} auf $[0,\infty[$ monoton wachsend. Da $f_{k+1}(0)=\exp(0)=$

$1 \geq 0$, gilt $f_{k+1}(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Mit Induktion folgt, daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, daß $f_k(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$.
Da für $x \geq 0$ gilt, daß $\exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, gilt für $x > 0$, daß $\frac{x}{(k+1)!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!x^k} \leq \frac{\exp(x)}{x^k}$, woraus folgt, daß $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty$, wie behauptet.

(4) Aus (3) folgt

$$\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

(5) Sei $y > 0$. Wegen (3) und (4) gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sodaß $\exp(a) \leq y \leq \exp(b)$. Da exp monoton wachsend und stetig (da differenzierbar) ist, gibt es aufgrund von Satz II.3.23 ein $x \in [a, b]$ mit $y = f(x)$. Somit ist $B(f) =]0, \infty[$ wie behauptet. □

Da exp differenzierbar ist und $\exp' = \exp > 0$, folgt mit Satz III.3.1, daß exp eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt.

Definition III.4.2 (natürlicher Logarithmus)
Die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ *von* exp *heißt* natürlicher Logarithmus

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \exp^{-1}(x)$$

und ist offenbar surjektiv.

Satz III.4.3 *Die Funktion* ln *is differenzierbar mit* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis: Aufgrund von Satz III.3.1 gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

□

Satz III.4.4 (Charakterisierung der Exponentialfunktion)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und es gelte*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = a \cdot f(x)$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. *Dann existiert ein* $c \in \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = c \cdot \exp(ax)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Somit ist exp *eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaften* $\exp' = \exp$ *und* $\exp(0) = 1$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot \exp(-ax)$$

für deren Ableitung gilt

$$g'(x) = f'(x)\exp(-ax) - af(x)\exp(-ax) = f'(x)\exp(-ax) - f'(x)\exp(-ax) = 0$$

und somit existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \cdot \exp(-ax) = g(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $f(x) = c\exp(ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Die Gleichung $f'(x) = af(x)$ ist ein einfaches Beispiel einer *Differentialgleichung*, d.h. einer Gleichung, in der Werte einer Funktion mit Werten ihrer Ableitung(en) in bezug gesetzt werden. Die Gleichung $f(0) = c$ nennt man *Anfangsbedingung*, welche zusammen mit der Differentialgleichung die Funktion eindeutig bestimmt.

Satz III.4.5 (Funktionalgleichungen für exp und ln)
Es gilt

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *für* $x, y \in \mathbb{R}$ *und*

(2) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für* $x, y > 0$.

Beweis: (1) Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x+y)$ für deren Ableitung gilt $f'(x) = \exp(x+y) = f(x)$. Da $f(0) = \exp(y)$, gilt wegen Satz III.4.4, daß $\exp(x+y) = f(x) = \exp(y)\exp(x) = \exp(x)\exp(y)$.
(2) Es gilt wegen (1), daß

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x))\exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$$

woraus wegen der Injektivität von exp folgt, daß $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ wie behauptet. □

Eine unmittelbar Konsequenz von (2) ist $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$. Wichtiger aber ist folgendes Korollar, daß die Beziehung zu Potenzen mit rationalen Exponenten herstellt.

Korollar III.4.6 *Für* $q \in \mathbb{Q}$ *und* $a \in \,]0, \infty[$ *gilt*

i) $a^q = \exp(q \cdot \ln(a))$

ii) $\ln(a^q) = q \cdot \ln(a)$.

Beweis: Sei $q = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a^n = \exp(\ln(a))^n = \exp(n \cdot \ln(a)) = \exp\left(m \cdot \frac{n}{m} \cdot \ln(a)\right) = \exp\left(\frac{n}{m} \cdot \ln(a)\right)^m$$

und somit $a^q = a^{\frac{n}{m}} = \exp\left(\frac{n}{m} \cdot \ln(a)\right) = \exp(q \cdot \ln(a))$. Außerdem gilt $a^{-q} = \frac{1}{a^q} = \frac{1}{\exp(q \cdot \ln(a))} = \exp(-q \cdot \ln(a))$. Somit haben wir Behauptung i) gezeigt. Behauptung ii) folgt aus Behauptung i) durch Anwendung der Funktion ln. $\square$

Korollar III.4.6 legt folgende Definition der Exponentiation nahe.

Definition III.4.7 *Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$$

genannt Exponentialfunktion zur Basis *a.*

Da $\ln(e) = 1$ gilt $e^x = \exp(x)$. Da $\ln(1) = 0$ gilt $1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $a > 1$ ist die Funktion $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ ist sie streng monoton fallend.

Definition III.4.8 *Für $a > 0$ mit $a \neq 1$ sei $\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$, d.h. $a^{\log_a(x)} = x$ für $x > 0$. Die Funktion $\log_a$ heißt* Logarithmus zur Basis *a.*

Da für $a > 0$ die Ableitung der Funktion $f_a = a^x$ aufgrund der Kettenregel gleich $f_a'(x) = \exp'(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot f_a(x)$, folgt mit Satz III.3.1, daß

$$\log_a'(x) = \frac{1}{f_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot f_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

sofern $a \neq 1$
Es gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln

Satz III.4.9 *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

Daraus folgt, wenn überdies $a, b \neq 1$ und $x, y > 0$, daß

iv) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

v) $\log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x)$

vi) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$.

Beweis: Als Übung empfohlen! $\square$

IV Integration

Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist mit $f \geq 0$, kann man sich die Frage stellen, wie groß die Fläche $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ zwischen Funktionsgraph und x-Achse ist. Alternativ kann man sich fragen, wie groß der "durchschnittliche" Wert von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist. Natürlich ist dies nur möglich für hinreichend gutartige Funktionen.

IV.1 Riemann Integral

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\overline{m}(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \qquad \text{und} \qquad \underline{m}(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

Definition IV.1.1 *Eine* Zerlegung von $[a,b]$ *ist eine Liste* $Z = x_0, x_1, \ldots, x_n$ *reeller Zahlen mit* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*. Die* Feinheit von Z *ist definiert als* $\delta(Z) = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$*. Sei*

$$\overline{m}_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad \textit{und} \qquad \underline{m}_i(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dann heißt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z &= \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1}) \quad && \text{Obersumme } \textit{und} \\ \underline{S}_Z &= \textstyle\sum_{i=1}^n \underline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1}) \quad && \text{Untersumme} \end{aligned}$$

zur Zerlegung Z*.*

Wenn $Z_1 = x_0, x_1, \ldots, x_n$ und $Z_2 = y_0, y_1, \ldots, y_m$ Zerlegungen sind, dann schreiben wir $Z_1 \subseteq Z_2$ als Abkürzung für $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$. Offenbar gilt im Falle $Z_1 \subseteq Z_2$, daß

$$\underline{m}(f)(b-a) \leq \underline{S}_{Z_1} \leq \underline{S}_{Z_2} \leq \overline{S}_{Z_2} \leq \overline{S}_{Z_1} \leq \overline{m}(f)(b-a)$$

Deshalb gilt für beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$, daß $\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$ für $Z = Z_1 \cup Z_2$.
Die Idee der **Riemann Integration** ist nun, durch immer feinere Zerlegungen Z die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse von untern durch $\underline{S}_Z$ und von oben durch $\overline{S}_Z$ anzunähern. Wenn dies funktioniert, dann heißt f Riemann-integrierbar, wie in folgender Definition festgehalten.

Definition IV.1.2 (Riemann Integral)
Bezeichne

$$\underline{I}(f) = \sup\{\underline{S}_Z \mid Z \textit{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

und

$$\overline{I}(f) = \inf\{\overline{S}_Z \mid Z \textit{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

dann heißt f (Riemann)-integrierbar auf $[a,b]$, *wenn* $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. *In diesem Fall heißt* $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ *das* Integral von f über $[a,b]$ *und wird mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet, wobei a "untere Grenze", b "obere Grenze", f "Integrand" und x "Integrationsvariable" heißt.

Man sieht leicht (Übung!), daß $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z existiert mit $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$.

Warnung Ein Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kann gleich 0 sein, auch wenn f nicht konstant 0 ist, wie z.B. $\int_{-1}^1 x\,dx$.

Als nächstes zeigen wir, daß sehr große Klassen von Funktione Riemann-integrierbar sind.

Satz IV.1.3 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $a < b$. *Dann gilt*

(1) *wenn f stetig ist, ist f integrierbar*

(2) *wenn f monoton ist, ist f integrierbar.*

Beweis: (1) : Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen, daß für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$ und somit $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen Satz II.3.26 ist f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ und somit gibt es ein $\delta > 0$, sodaß

$$\forall x, y \in [a,b] \ \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right)$$

Sei $Z = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ eine Zerlegung mit $\delta(Z) < \delta$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$, daß

$$\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

und somit

$$\begin{aligned} \overline{I}(f) - \underline{I}(f) &\leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \textstyle\sum_{i=1}^n (\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

und somit $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$.
(2) Wenn f auf $[a,b]$ monoton wachsend ist, dann gilt für jede Zerlegung $Z = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, daß

$$
\begin{aligned}
\overline{I}(f) - \underline{I}(f) &\le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\
&\le \textstyle\sum_{i=1}^n (\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\
&\le \delta(Z) \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
= \delta(Z)(f(b) - f(a))
\end{aligned}
$$

Da $\delta(Z)$ beliebig klein werden kann, gilt $\overline{I}(f) - \underline{I}(f)$. $\square$

Im Beweis von Satz IV.1.3(1) haben wir gesehen, daß $\overline{S}_{Z_n} - \underline{S}_{Z_n}$ gegen 0 konvergiert, wenn $\delta(Z_n)$ gegen 0 konvergiert. Sei nun $Z_n = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \delta(Z_n) = 0$ und $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ für $i = 1, \ldots, n$ und

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

die zugehörige Folge von **Riemann-Summen**, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f)$$

da $\underline{S}_{Z_n}(f) \le R_n(f) \le \overline{S}_{Z_n}(f)$.
Man kann folgende Verschärfung von Satz IV.1.3(1) zeigen: $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert, falls $u_1, \ldots, u_k \in [a,b]$ existieren, sodaß f auf $[a,b] \setminus \{u_1, \ldots, u_k\}$ **stetig** und **beschränkt** ist.

Beispiel IV.1.4
1) *: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$, daß $\underline{S}_Z(f) = c(b-a) = \overline{S}_Z(f)$ und somit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(2) *: Betrachte $f : [0,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ für $b > 0$. Wähle $x_i^{(n)} = b \cdot \frac{i}{n}$ und $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)}$. Die zugehörigen Riemannsummen sind*

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{bi}{n}^2\right) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Mit Induktion zeigt man leicht, daß $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, und somit gilt

$$R_n(f) = \frac{b^3}{6} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n}$$

also

$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f) = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b}{3}$$

Wie wir bald sehen werden, gilt nicht zufälligerweise für $F(x) = \frac{x^3}{3}$, daß $F'(x) = x^2$ und $\int_0^b f(x)\,dx = F(b) - F(0)$.

Die folgenden Eigenschaften des Riemann-Integrals sind im weiteren nützlich.

Satz IV.1.5 *Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Dann gilt*

i) *$f + g$ ist integrierbar und $\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$*

ii) *für $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $c \cdot f$ integrierbar und $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$*

iii) *wenn für alle $x \in [a, b]$ gilt, daß $f(x) \leq g(x)$, dann $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$*

iv) *$\underline{m}(f)(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{m}(f)(b - a)$*

v) *die Funktion $|f|$ ist integrierbar und es gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.*

Beweis: Wir beweisen die Behauptungen bloß für den wichtigen Fall stetiger Funktionen, in welchem Fall wir auch mit Riemann Summen argumentieren können. Seien also f und g stetig.
i) Die Funktion $f + g$ ist stetig und somit integrierbar. Da die Folgen $(R_n(f))$ und $(R_n(g))$ gegen $\int_a^b f(x)\,dx$ bzw. $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergieren, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, sodaß für $n \geq N$ gilt, daß

$$\left|R_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{and} \qquad \left|R_n(g) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned}&\left|R_n(f + g) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| = \\ &\left|R_n(f) + R_n(g) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| \leq \\ &\left|R_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|R_n(g) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f + g) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ii) Da $c{\cdot}f$ stetig ist, ist es auch integrierbar. Für $c = 0$ gilt die behauptete Gleichheit trivialerweise. Sei $c \neq 0$. Da $R_n(f)$ gegen $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$\left|R_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

für alle $n \geq N$. Multiplikation mit $|c|$ ergibt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c \cdot f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) - c \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

waraus folgt, daß $\lim_{n\to\infty} R_n(c\cdot f) = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$ und somit $c \cdot \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b c\cdot f(x)\, dx$.
iii) Wenn $f \leq g$, dann auch $R_n(f) \leq R_n(g)$ und somit

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f) \leq \lim_{n\to\infty} R_n(g) = \int_a^b g(x)\, dx$$

aufgrund des Einschließungskriteriums.
iv) Es gilt $\underline{m}(f)(b-a) \leq R_n(f) \leq \overline{m}(f)(b-a)$ und somit $\underline{m}(f)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \overline{m}(f)(b-a)$ aufgrund des Einschließungskriteriums.
v) Da f stetig ist, sind auch $|f|$ und $-|f|$ stetig und somit integrierbar. Da $-|f| \leq f \leq |f|$, folgt mit iii), daß

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \overset{ii)}{=} \int_a^b -|f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

und somit

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

da ganz allgemein aus $-u \leq v \leq u$ folgt, daß $|v| \leq u$. □

Der nächste Satz besagt, daß eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ ihren Mittelwert $\frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}$ auch tatsächlich auf ihrem Definitionbereich annimmt.

Satz IV.1.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a)$$

für ein $\xi \in [a,b]$.

Beweis: Da f stetig ist, nimmt f die Werte $\underline{m}(f)$ und $\overline{m}(f)$ tatsächlich an. Deshalb nimmt die stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)(b-a)$ die Werte $\underline{m}(f)(b-a)$ und $\overline{m}(f)(b-a)$ auch tatsächlich an. Da aber $\int_a^b f(x)\, dx$ zwischen diesen Werten liegt und g stetig ist, gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $g(\xi) = \int_a^b f(x)\, dx$ und somit $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\, dx$. □

Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist und $a < c < b$, dann sind die Einschränkungen von f auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\, dx =$

$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Damit in Einklang sind die Setzungen $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ und $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, da dann $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x) = 0 = \int_a^a f(x)\,dx$.

Als nächstes beweisen wir mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz IV.1.7 (Haupsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$. Dann gilt

(1) *F ist differenzierbar mit $F' = f$, d.h. F ist eine* Stammfunktion *von f*

(2) *wenn G eine Stammfunktion von f ist, dann $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.*

Beweis: (1) Sei (x_n) eine Folge in $[a,b] \setminus \{c\}$ mit Grenzwert c. Wegen Satz IV.1.6 gibt es zu jedem n ein ξ_n zwischen x_n und c mit $f(\xi_n)(x_n - c) = \int_c^{x_n} f(x)\,dx = F(x_n) - F(c)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n)(x_n - c)}{x_n - c} = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(c)$$

wobei die letze Gleichheit aus der Stetigkeit von f folgt. Also ist $F'(c) = f(c)$ wie behauptet.
(2) Wenn $G' = f = F'$, dann ist $(F-G)' = 0$ und somit $F - G = c$, d.h. $F = G + c$. Dann gilt aber

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

wie behauptet. □

Beispiel IV.1.8
(i) *Die Funktion $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = x^2$. Somit folgt mit Satz IV.1.7, daß $\int_a^b x^2\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.*
(ii) *$F(x) = -\cos(x)$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sin(x)$ und somit $\int_a^b \sin(x)\,dx = \cos(a) - \cos(b)$.*
(iii) *Da $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ gilt für $0 < a < b$, daß $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(a)$.*
(vi) *Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert als*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{wenn } x \in [0,1[\\ 1 & \textit{wenn } x \in [1,2] \end{cases}$$

Die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ sieht dann folgendermaßen aus

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{wenn } x \in [0,1[\\ x-1 & \textit{wenn } x \in [1,2] \end{cases}$$

Offenbar ist F stetig, aber im Punkt 1 nicht differenzierbar. Die Funktion f kann keine Stammfunktion G besitzen, da für diese aufgrund von Satz IV.1.7 gelten müßte, daß

$$G(x) = \begin{cases} c_0 & \textit{wenn } x \in [0,1[\\ x + c_1 & \textit{wenn } x \in [1,2] \end{cases}$$

mit $c_0 = G(1) = 1 + c_1$, und somit ist G in 1 nicht differenzierbar.

(v) *Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die* Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{wenn } x \in [1,2] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

d.h. die charakteristische Funktion der Teilmenge $\{x \in [0,1] \mid x \in \mathbb{Q}\}$ von $[0,1]$. Da in jedem nichttrivialen Intervall rationale und irrationale Zahlen liegen, gilt für jede Zerlegung Z von $[0,1]$, daß $\underline{S}_Z(f) = 0$ und $\overline{S}_Z(f) = 1$, und somit ist f nicht Riemann integrierbar.

IV.2 Integrationsregeln

In diesem Unterabschnitt diskutieren wir Techniken zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen durch Aufsuchen einer Stammfunktion, die auf der "Inversion" bekannter Ableitungsregeln beruhen. Im weiteren schreiben wir $f(x)\,|_{x=a}^{x=b}$ als Abkürzung für $f(b) - f(a)$.

Satz IV.2.1 (partielle Integration)
Sei $a < b$ und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\,|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Beweis: Aufgrund der Produktregel ist fg eine Stammfunktion von $f'g + fg'$. Da letztere Funktion stetig ist, gilt aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, daß

$$f(x)g(x)\,|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beispiel IV.2.2
i) *Wir berechnen das Integral $\int_a^b \exp(x) \cdot x\,dx$ mithilfe der Methode der partiellen Integration, indem wir $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = x$ setzen. Da $f' = f$ und $g'(x) = 1$ gilt dann*

$$\begin{aligned}\int_a^b \exp(x)\cdot x\,dx &= \exp(x)\cdot x\,|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \exp(x)\cdot 1\,dx \\ &= \exp(x)\cdot x\,|_{x=a}^{x=b} - \exp(x)\,|_{x=a}^{x=b} = \exp(x)(x-1)\,|_{x=a}^{x=b} \\ = \exp(b)(b-1) - \exp(a)(a-1)\end{aligned}$$

ii) *Sei f stetig differenzierbar. Es gilt dann mit partieller Integration, daß*

$$\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = f(x)^2\,|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)f'(x)\,dx$$

woraus folgt, daß

$$\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f(x)^2\,|_{x=a}^{x=b} = \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}$$

iii) *Wir wollen für $0 < a < b$ das Integral $\int_a^b \ln(x)\,dx$ berechnen. Zu diesem Zweck instantiieren wir Satz IV.2.1 mit $f(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$. Es gilt dann*

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln(x)\,dx &= x\cdot\ln(x)\,|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b x\cdot\tfrac{1}{x}\,dx \\ &= x\cdot\ln(x)\,|_{x=a}^{x=b} - x\,|_{x=a}^{x=b} \\ &= (\ln(x)-1)x\,|_{x=a}^{x=b} \\ = (\ln(b)-1)b - (\ln(a)-1)a\end{aligned}$$

Satz IV.2.3 (Substitutionsregel)
Seien $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $B(g) \subseteq [c,d]$. Wenn g überdies stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Wenn g überdies bijektiv ist, dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t))g'(t)\,dt$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt wegen der Kettenregel, daß

$$(F\circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

und somit wegen des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung, daß

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F\circ g)(t)\,|_{t=a}^{t=b} = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

$\square$

Beispiel IV.2.4

i) *Für* $0 < a < b$ *wollen wir das Integral* $\int_a^b \frac{\ln(x)^2}{x}\,dx$ *berechnen. Sei* $f(x) = x^2$ *und* $g(t) = \ln(t)$. *Mithilfe der Substitutionsregel erhalten wir*

$$\int_a^b \frac{\ln(x)^2}{x}\,dx = \int_a^b f(g(t))^2 g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \frac{\ln(b)^3 - \ln(a)^3}{3}$$

ii) *Wir wollen den Flächeninhalt des Halbkreises berechnen, d.h. das Integral* $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. *Sei* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *und* $g(t) = \sin(t)$. *Für* $-1 \le a \le b \le 1$ *gilt dann aufgrund der Substitutionsregel, daß*

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt\\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-x^2}\cos(x)\,dx\\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos(x)^2\,dx\end{aligned}$$

Das Integral von $\cos(x)^2$ *berechnen wir nun mithilfe partieller Integration folgendermaßen. Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \cos(x)^2\,dx &= \int_\alpha^\beta \sin'(x)\cos(x)\,dx \qquad \textit{(part.Int.)}\\ &= \sin(x)\cos(x)\,|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_\alpha^\beta -\sin(x)^2\,dx\\ &= \sin(x)\cos(x)\,|_{x=\alpha}^{x=\beta} + \int_\alpha^\beta \sin(x)^2\,dx\\ &= \sin(x)\cos(x)\,|_{x=\alpha}^{x=\beta} + \int_\alpha^\beta 1-\cos(x)^2\,dx\\ &= \sin(x)\cos(x)\,|_{x=\alpha}^{x=\beta} + x\,|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_\alpha^\beta \cos(x)^2\,dx\\ &= (\sin(x)\cos(x)+x)\,|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_\alpha^\beta \cos(x)^2\,dx\end{aligned}$$

woraus wir erhalten, daß

$$\int_\alpha^\beta \cos(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\big(\sin(x)\cos(x)+x\big)\,|_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

und somit

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\big)\,|_{x=a}^{x=b}$$

da $\sin(\arcsin(x)) = x$ *und* $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2} = \cos(\arcsin(x))$ *Speziell für* $a = -1$ *und* $b = 1$ *erhalten wir*

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Also hat der Halbkreis mit Radius 1 *den Flächeninhalt* $\frac{\pi}{2}$ *und somit der Einheitskreis den Flächeninhalt* π.

IV.3 Uneigentliche Integrale

Wir betrachten nun Integrale über Intervalle allgemeinerer Gestalt als $[a, b]$.

Definition IV.3.1 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b > a$ oder $b = \infty$. Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, c]$ für alle c mit $a < c < b$. Wenn der Grenzwert $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$ existiert, dann heißt f* uneigentlich integrierbar auf $[a, b[$ *und wir schreiben dann*

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{für} \qquad \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

Analog definiert man uneigentliche Integrale für Funktionen $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ oder $a = -\infty$, die für alle $a < c < b$ auf $[c, b]$ integrierbar sind, als

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

sofern dieser Grenzwert existiert.
Für $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ definiert man $\int_a^b f(x)\, dx$ als $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$, wobei $a < c < b$.

Beispiel IV.3.2
i) *Wir wollen für $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha\, dx$ berechnen.*
Wenn $\alpha \neq -1$, dann gilt für $c \in [1, \infty[$, daß

$$\int_1^c x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} |_{x=1}^{x=c}$$

und somit ist x^α auf $[1, \infty[$ uneigentlich integrierbar, wenn $\alpha + 1 < 0$, d.h. $\alpha < -1$, in welchem Falle $\int_1^c x^\alpha\, dx = \frac{-1}{\alpha+1}$.
Wenn $\alpha = -1$, dann gilt für $c \in [1, \infty[$, daß

$$\int_1^c x^\alpha\, dx = \int_1^c \frac{1}{x}\, dx = \ln(c) - \ln(0) = \ln(c)$$

und somit existiert $\int_1^\infty x^{-1}\, dx$ nicht, da $\lim_{c \to \infty} \ln(c) = \infty$.
ii) *Wir berechen das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$. Für $c \in]0, 1[$ gilt*

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = -2\sqrt{1-x}\Big|_{x=0}^{x=c} = 2(1 - \sqrt{1-c})$$

und somit

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{c \to 1} 2(1 - \sqrt{1-c}) = 2$$

Satz IV.3.3 (Vergleichskriterium)
Sei $a < b$ bzw. $b = \infty$ und $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ Funktionen, die für alle c mit $a < c < b$ auf $[a, c]$ integrierbar sind. Wenn $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b[$ und das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ existiert, dann existieren auch die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textit{und} \qquad \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Beweis: Setze $F(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$ und $G(x) = \int_a^c g(t)\,dt$ für $x \in [a, b[$. Die Funktionen F und G sind monoton wachsend und es gilt

$$0 \leq F(x) \leq G(x) \leq \lim_{x \to b^-} G(x) = \int_a^b g(x)\,dx$$

für $x \in [a, b[$. Da F monoton wachsend und beschränkt ist, existiert $\lim_{x \to b^-} F(x)$ und es gilt

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{x \to b^-} F(x) \leq \lim_{x \to b^-} G(x) = \int_a^b g(x)\,dx$$

Sei nun

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$ sind auf allen $[a, c]$ mit $c \in [a, b[$ integrierbar. Somit sind auch die Funktionen $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ auf diesen Intervallen integrierbar. Da $|f^+(x)| \leq |f(x)|$ und $|f^-(x)| \leq |f(x)|$ für alle $x \in [a, b[$ gilt, sind auch $f^+ = |f^+|$ und $f^- = |f^-|$ auf $[a, b[$ integrierbar und somit ist auch $f = f^+ - f^-$ auf $[a, b[$ integrierbar. □

Beispiel IV.3.4 *Sei $f : 0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Wir zeigen, daß das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existiert. Zu diesem Zweck setzen wir f stetig fort auf $[0, \infty[$ durch die Setzung $f(0) = 1$ (da $\sin'(0) = \cos(0) = 1$). Also existiert $\int_0^1 f(x)\,dx$. Für $b \in]1, \infty[$ gilt*

$$\int_1^b f(x)\,dx = -\cos(x) \cdot \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

Weil $0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$, gilt $\lim_{b \to \infty} -\cos(x) \cdot \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} = \cos(1)$. Aus $0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, Satz IV.3.3 und Beispiel IV.3.2i) existiert das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$. Also existiert auch das Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Somit existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$.

V Reihen

Wir werden später sehen, daß komplizierte Funktionen f darstellbar sind als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, wobei die f_n einfachere Funktionen wie z.B. Polynome sind. Viele, die sogenannten "analytischen" Funktionen, f sind z.B. darstellbar als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Zu diesem Zweck studieren wir als Vorbereitung in diesem Abschnitt "unendliche Summen" $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, sogenannte "Reihen".

V.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition V.1.1 (Reihen) *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die n-te Partialsumme. *Die Folge der Partialsummen (s_n) heißt* (unendliche) Reihe mit den Gliedern $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *und wird mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, *wenn die Folge (s_n) der zugehörigen Partialsummen konvergiert, in welchem Fall $\lim_{n\to\infty} s_n$ die* Summe der Reihe *genannt und (auch) mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet wird.*

Natürlich machen diese Begriffe und Notationen auch Sinn, wenn (a_k) statt bei 0 bei einer beliebigen natürlichen Zahl n_0 beginnt.

Beispiel V.1.2

i) *Die* harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergiert gegen ∞ (siehe Bsp. II.1.19(1)).*

ii) *Die* alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *konvergiert (siehe Bsp. II.1.19(2)).*

iii) *Für $q \in \mathbb{R}$ betrachten wir die* geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$ (zur Basis q). *Für $q = 1$ divergiert die Reihe gegen ∞. Für $q \neq 1$ zeigt man durch Induktion über n, daß*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Die Behauptung ist klar für $n = 0$ und der Induktionschritt ergibt sich aus

$$s_{n+1} = s_n + q^{n+1} \overset{(IH)}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

Wegen Satz II.1.14 gilt nun, daß

a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, *falls* $|q| < 1$, *weil dann* q^{n+1} *gegen* 0 *geht*

b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$, *falls* $q > 1$, *weil dann* q^{n+1} *gegen* ∞ *geht*

c) für $q \leq -1$ *konvergiert die Reihe nicht, weil die Abstände aufeinanderfolgender Partialsummen immer größer werden und somit* (s_n) *keine Cauchyfolge ist; da die* s_n *(betragsmäßig) beliebig große positive und negative Werte annehmen, divergiert die Reihe weder geegn* ∞ *noch gegen* $-\infty$.

Die Aussage a) ist von zentraler Bedeutung und wird im weiteren immer wieder implizit verwendet.

V.2 Konvergenzkriterein für Reihen

Satz V.2.1 (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *kovergiert genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq m \geq N \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für die Folge der Partialsummen. □

Korollar V.2.2 *Wenn die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann ist* (a_n) *eine Nullfolge.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz V.2.1, wenn man $n = m + 1$ betrachtet. □

Diese Implikation läßt sich nicht umkehren, wie man z.B. anhand der harmonischen Reihe sieht. Die Divergenz der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $|q| \geq 1$ folgt unmittelbar aus Kor. V.2.2, da in diesem Fall (q^n) keine Nullfolge ist.

Definition V.2.3 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt* absolut konvergent, *wenn die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Satz V.2.4

(1) *Wenn* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(2) *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge* $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)$ *beschränkt ist.*

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus Satz V.2.1, da

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right|$$

für $n \geq m$.
Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß monoton wachsende Beschränkte Folgen konvergieren. □

In Satz V.2.4(1) läßt sich die Implikation i.a. nicht umkehren, wie man anhand der alternierenden harmonischen Reihe sieht.

Satz V.2.5 (Majorantenkriterium)
Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert und* $\exists n \forall k \geq n\ |b_k| \leq |a_k|$, *dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *auch absolut.*

Beweis: Übung! □

Durch Kontraposition erhält man das

Korollar V.2.6 *Wenn* $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ *divergiert und* $\exists n \forall k \geq n\ |b_k| \leq |a_k|$, *dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *nicht absolut.*

Beispiel V.2.7 *Wir betrachten die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Offenbar gilt für* $k \geq 2$, *daß* $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$. *Somit können wir aus dem Majorantenkriterium auf die absolute Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *schließen, wenn wir nachweisen können, daß die Reihe* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ *absolut konvergiert. Letzteres sieht man aber wie folgt. Es gilt*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

und somit ist $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.

Satz V.2.8 (Quotientenkriterium)
Sei (a_n) *eine Folge von* 0 *verschiedener Zahlen, sodaß der Grenzwert* $q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existiert. Dann gilt*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn* $q < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergiert, wenn* $q > 1$.

Beweis:
a) Angenommen $q < 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$. Also gibt es $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\widetilde{q} \in [0,1[$ mit $|a_{k+1}| \leq \widetilde{q}|a_k|$ für $k \geq k_0$. Mit Induktion sieht man leicht, daß $|a_k| \leq \widetilde{q}^{k-k_0}|a_{k_0}|$ für $k \geq k_0$. Somit folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ aus dem Majorantenkriterium, da die geometrische Reihe $\sum \widetilde{q}^n$ konvergiert, da ja $|\widetilde{q}| = \widetilde{q} < 1$.
b) Angenommen $q > 1$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$. Also gibt es $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\widetilde{q} > 1$ mit $|a_{k+1}| \geq \widetilde{q}|a_k|$ für $k \geq k_0$. Mit Induktion sieht man leicht, daß $|a_k| \geq \widetilde{q}^{k-k_0}|a_{k_0}|$ für $k \geq k_0$. Da $\widetilde{q} > 1$ und $|a_{k_0}| > 0$, ist (a_k) keine Nullfolge, woraus folgt, daß die Reihe $\sum a_n$ nicht konvergiert. □

Warnung Im Falle $q = 1$ läßt sich keine eindeutige Aussage treffen, da sowohl für die divergente harmonische und als auch die konvergierende alternierende harmonische Reihe gilt, daß $|q| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.
Ein weiteres Beispiel, wo aus diesem Grund das Quotientenkriterium versagt, ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, da

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k+1)^\alpha}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

Beispiel V.2.9 (Exponentialreihe)
Für eine beliebige relle Zahl x betrachten wir die sogenannte Exponentialreihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$. *Im Falle $x = 0$ ist diese Reihe trivialerweise absolut konvergent. Für $x \neq 0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

woraus mithilfe des Quotientenkriteriums folgt, daß die Reihe absolut konvergiert. Wir werden später zeigen, daß die durch diese Reihe definierte Funktion die in Satz III.4.4 gegebene Charakterisierung erfüllt und somit gilt, daß $\exp(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ *für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Satz V.2.10 (Wurzelkriterium)
Sei (a_n) eine Folge, für die der Grenzwert $w := \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ existiert. Dann gilt

a) $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *konvergiert absolut, wenn $w < 1$*

b) $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *divergiert, wenn $w > 1$.*

Beweis:
a) Angenommen $w < 1$. Dann existieren $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und $q < 1$ mit $|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq q$ für alle $k \geq k_0$. Also gilt für alle $k \geq k_0$, daß $|a_k| \leq q^k$. Da aber $\sum q^k$ konvergiert, weil $q < 1$, folgt mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum a_n$.

b) Angenommen $w > 1$. Dann existieren $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und $q > 1$ mit $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq q$ für alle $k \geq k_0$. Also gilt für alle $k \geq k_0$, daß $|a_k| \geq q^k \geq 1$. Deshalb ist (a_k) keine Nullfolge und somit konvergiert die Reihe $\sum a_n$ nicht. □

Ähnlich wie auch schon im Falle des Quotientenkriteriums erlaubt das Wurzelkriterium keine Aussage im Falle $w = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$. Die Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert, obwohl in beiden Fällen $w = 1$, da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.[15]

Beispiel V.2.11 *Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$. Es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

woraus die absolute Konvergenz der Reihe mit dem Wurzelkriterium folgt.

Satz V.2.12 (Rechenregeln für Reihen)
Wenn die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergieren, dann konvergieren auch die Reihen $\sum a_n + b_n$ und $\sum c\cdot a_n$ gegen $\sum a_n + \sum b_n$ bzw. $c \cdot \sum b_n$.

Beweis: Unmittelbare Konsequenz von Satz II.1.9. □

Schwieriger ist die Frage wie man das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen selbst kanonisch als Reihe dargestellt werden kann. Eine Antwort darauf gibt folgende

Definition V.2.13 (Cauchyprodukt)
Das Cauchyprodukt *der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz V.2.14 *Für absolut konvergente Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ist ihr Cauchyprodukt ebenfalls absolut konvergent, wobei*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum imits_{n=0}^{\infty} b_n$$

[15] Es gilt – wie man leicht sieht – für $x \geq 0$, daß $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2$. Für $g_n = \sqrt[n]{n} - 1$ gilt, dann $n = (1+g_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} g_n^2$ und somit $g_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$. Also konvergiert g_n^2 und somit auch g_n gegen 0, wouraus folgt, daß $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Behauptung für den Fall, daß $a_k, b_k \geq 0$. Es gilt dann für alle n gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k \leq \sum_{k=0}^{2n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{2n} b_k$$

woraus wegen des Einschließungskriteriums die Behauptung unmittelbar folgt. Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, wo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ beliebige absolut konvergente Reihen sind. Dann sind natürlich auch die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ absolut konvergent. Deshalb folgt aus der Überlegung des vorigen Absatzes, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n$ mit $\tilde{c}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}|$ absolut konvergiert. Seien $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ und $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Es gilt

$$\left| s_n \cdot t_n - \sum_{k=0}^{n} c_n \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{c}_k$$

Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n$ absolut konvergiert, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \tilde{c}_k = 0$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \left| s_n \cdot t_n - \sum\limits_{k=0}^{n} c_n \right| = 0$ woraus folgt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n$$

wie behauptet. $\square$

Mithilfe dieses Satzes kann man beweisen, daß

$$\sum_{k=0} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

d.h., daß die durch die Exponentialreihe definierte Funktion tatsächlich auch das Exponentialgesetz erfüllt. Es gilt nämlich aufgrund des binomischen Lehrsatzes, daß

$$\frac{(x+y)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!}$$

da ja $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$.

Folgendes Kriterium erlaubt einem Konvergenz von Reihen auf die Existenz uneigentlicher Integral zurückzuführen.

Satz V.2.15 *Sei $L \in \mathbb{N}_0$ und $f : [L, \infty[\, \to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f(x) > 0$ für $x \geq L$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=L}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_L^\infty f(x)\, dx$ existiert.*

Beweis: Da f monoton und beschränkt ist, existiert das Integral $\int_L^x f(t)\, dt$ für alle $x \geq L$ und es gilt für natürliche Zahlen $n \geq L$, daß

$$0 \leq \sum_{k=L+1}^{n} f(k) \leq \int_L^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=L}^{n-1} f(k)$$

Wenn nun $\int_L^\infty f(x)\, dx < \infty$, dann ist die Folge $\left(\sum_{k=L+1}^{n} f(k)\right)_{n \geq L}$ monoton wachsend und beschränkt und konvergiert somit. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=L}^{\infty} f(n)$.
Wenn $\sum_{k=L}^{\infty} f(k)$ existiert, so ist es eine obere Schranke für die monoton wachsende Folge $\left(\int_L^n f(x)\, dx\right)_{n \geq L}$, welche somit konvergiert. Also existiert auch das uneigentliche Integral $\int_L^\infty f(x)\, dx$. □

Wir untersuchen nun, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ konvergiert. Wenn $\alpha \leq 1$, dann gilt $n^\alpha \leq n^1 = n$ und somit $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, weshalb die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ aufgrund des Minorantenkriteriums divergiert. Wir betrachten nun den Fall $\alpha > 1$. Sei $f_\alpha : [1, \infty[\, : x \mapsto x^{-\alpha}$. Offenbar ist $f_\alpha \geq 0$. Es gilt $f'_\alpha(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} < 0$, woraus folgt, daß f_α monoton fallend ist. Es gilt

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\, dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{x=\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Also konvergiert die Reihe aufgrund des Integralkriteriums im Falle $\alpha > 1$.

VI Funktionenfolgen und -reihen

Bislang haben wir bloß Folgen und Reihen von reellen Zahlen betrachtet. Verallgemeinernd betrachten wir nun *Folgen und Reihen von reellen Funktionen*. Eine besonders wichtige Klasse von Funktionreihen sind die sogenannten *Potenzreihen*, d.h. "unendliche Polynome". Diese sind unter anderem deshalb wichtig, weil nach dem Satz von Taylor sich reelle Funktionen oft zumindest lokal als Potenzreihen darstellen lassen. Dies gilt insbesondere für die elementaren Funktionen wie Exponentialfunktion, Winkelfunktionen und den Logarithmus.

VI.1 Folgen und Reihen von Funktionen

Definition VI.1.1 (punktweise Konvergenz)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen von D nach $\mathbb{R}$.
Die Folge (f_n) konvergiert punktweise *gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für*

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, wofür wir abkürzend $(f_n) \underset{\text{ptw.}}{\longrightarrow} f$ schreiben.
Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$ punktweise konvergiert.

Da die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen eindeutig sind, sind auch die Grenzwerte von Funktionenfolgen bzgl. punktweiser Konvergenz eindeutig.

Beispiel VI.1.2 *Sei $D = [0, 1]$ und $f_n : D \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$. Dann konvergiert die Folge (f_n) gegen die Grenzfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

die offenbar nicht stetig ist.

Um diesen Defekt zu vermeiden führen wir folgenden stärkeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ein.

Definition VI.1.3 (gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionsfolge $(f_n : D \to \mathbb{R})$ konvergiert gleichmäßig *gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N \; \forall x \in D \; |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

wofür wir abkürzend $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f$ schreiben.

Die Funktionsreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig *genau dann, wenn die Folge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert.*

Offenbar folgt aus $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f$, daß $(f_n) \underset{\text{ptw.}}{\longrightarrow} f$. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht, wie man anhand von Bsp. VI.1.2 sieht. Angenommen $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f$. Dann gibt es eine natürliche Zahl N, sodaß für alle $n \geq N$ gilt, daß

$$\forall x \in [0,1[\quad |x^n - 0| < \frac{1}{2}$$

was aber nicht der Fall ist, da die Aussage für $x = \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$ falsch ist.

Für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ kann man ihre "Norm" definieren als $||f||_\infty = \sup_{x \in D} f(x)$. Offenbar ist dann für $f, g : D \to \mathbb{R}$ die Aussage $\forall x \in D \; |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ äquivalent zu $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$, woraus folgt, daß $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\to} f$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n, m \geq N \, ||f_n - f||_\infty < \varepsilon$, d.h. (f_n) konvergiert im Sinnne der $|| \cdot ||_\infty$ Norm gegen f.
Unter Verwendung dieser Norm kann man dann folgendes Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen beweisen.

Satz VI.1.4 *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen von $D \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und (c_n) eine Folge in $\mathbb{R}_0^+$, sodaß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ konvergiert. Wenn $||f_n||_\infty \leq c_n$ für alle n, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ gleichmäßig.*

Beweis: Sei $x \in D$. Dann gilt $|f_n(x)| \leq c_n$ und somit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut aufgrund des Majorantenkriteriums.
Sei $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$. Wir bezeichnen den punktweisen Grenzwert der Folge (s_n) mit g. Wir zeigen nun, daß (s_n) auch gleichmäßig gegen g konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Sei d der Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodaß $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} c_n = d - \sum\limits_{n=0}^{N} c_n < \varepsilon$. Es gilt dann für alle $n \geq N$, daß

$$|g(x) - s_n(x)| = \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon$$

für alle $x \in D$. □

Beispiel VI.1.5
(1) *Sei $D = \mathbb{R}$ und $f_n(x) : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Es gilt $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.*

(2) *Sei* $D = [-a, a]$ *mit* $0 \leq a < 1$ *und* $f_n : D \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$. *Es gilt* $|f_n(x)| \leq a^n$ *für* $x \in D$. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ *konvergiert, da* $|a| < 1$, *und somit konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig gegen die Funktion* $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

Als nächstes zeigen wir, daß stetige Funktionen unter gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen sind.

Satz VI.1.6 *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* (f_n) *eine Folge stetiger Funktionen von* D *nach* $\mathbb{R}$. *Wenn* $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\to} g$, *dann ist* g *auch stetig.*
Die analoge Aussage gilt auch für Funktionenreihen.

Beweis: Wir weisen die Stetigkeit der Grenzfunktion g unter Verwendung von Satz II.3.24 nach. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen g konvergiert, gibt es ein n mit $||f_n - g||_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_n stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodaß $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Sei nun $y \in D$ mit $|y - x| < \delta$. Dann gilt

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Also ist g im Sinne der ε-δ-Charakterisierung stetig. $\square$

Beispiel VI.1.7 *Wir betrachten die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. *Sei* $a > 0$. *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ *konvergiert absolut. Für alle* $x \in [-a, a]$ *gilt* $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right|$. *Somit konvergiert aufgrund von Satz VI.1.4 die Exponentialreihe* $\left|\frac{a^n}{n!}\right|$ *auf* $[-a, a]$ *gleichmäßig gegen* f. *Da die Partialsummen der Exponentialreihe stetig sind und diese Folge gleichmäßig gegen* f *konvergiert, folgt mit Satz VI.1.6, daß* f *auf dem Intervall* $[-a, a,]$ *stetig ist. Da dies für alle* $a > 0$ *gilt, ist also* f *auf ganz* $\mathbb{R}$ *stetig.*

Eine wichtige Konsequenz von Satz VI.1.6 ist, daß Integration in folgendem Sinne stetig ist.

Satz VI.1.8
Sei $a < b$ *und* $D = [a, b]$ *und* (f_n) *eine Folge stetiger Funktion von* D *nach* $\mathbb{R}$. *Wenn* $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\to} g$, *dann konvergiert* $\int_a^b f_n(x)\, dx$ *gegen* $\int_a^b g(x)\, dx$.
Die analoge Aussage gilt auch für Funktionenreihen.

Beweis: Angenommen $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\to} g$. Wegen Satz VI.1.6 ist g auch stetig und somit integrierbar.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es in $N \in \mathbb{N}_0$, sodaß für alle $n \geq N$ gilt, daß $||f_n - g||_\infty < \varepsilon$ und somit auch

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - g(x)|\, dx \leq ||f_n - g||_\infty (b-a) = \varepsilon(b-a)$$

Also konvergiert $\int_a^b f_n(x)\, dx$ gegen $\int_a^b g(x)\, dx$. □

Beispiel VI.1.9 *Wie wir in Beispiel VI.1.7(2) gesehen haben, konvergiert auf dem Intervall* $[-a, a]$ *mit* $0 \leq a < 1$ *die Funktionenreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *gleichmäßig gegen die Funktion* $\frac{1}{1-x}$. *Umsomehr gilt dies für das Intervall* $[0, a]$. *Wegen Satz VI.1.8 gilt nun*

$$-\ln(1-a) = \int_0^a \frac{1}{1-x}\, dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Also ist

$$\ln(1-a) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

für $0 \leq a < 1$.

Man möchte glauben, daß in Analogie zu Satz VI.1.8 auch die Differentiation stetig ist, d.h., daß aus $(f_n) \underset{\text{glm.}}{\rightarrow} f$ folgt, daß $(f_n') \underset{\text{glm.}}{\rightarrow} f'$. Diese Hoffnung wird jedoch durch folgendes Gegenbeispiel zunichte gemacht. Sei $D = [0, 2\pi]$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $|f_n| \leq \frac{1}{n}$, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen $f(x) = 0$. Es gilt $f_n'(x) = \cos(nx)$. Für $x = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(n0) = 1 \neq 0 = f'(0)$. Außerdem konvergiert $\lim_{n\to\infty} f_n'(\pi)$ nicht, d.h. die Folge (f_n') konvergiert nicht einmal punktweise.

Satz VI.1.10 *Sei* $a < b$ *und* $D = [a, b]$ *und* (f_n) *eine Folge stetig differenzierbarer Funktion von* D *nach* $\mathbb{R}$, *die punktweise gegen eine Funktion* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *konvergiert. Wenn* (f_n') *gleichmäßig gegen* g *konvergiert, dann ist* f *differenzierbar mit* $f' = g$.
Die analoge Aussage gilt auch für Funktionenreihen.

Beweis: Wegen Satz IV.1.7 gilt für alle n und alle $x \in D$, daß

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt$$

Weil (f_n') gleichmäßig gegen g konvergiert, gilt wegen Satz VI.1.8

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\, dt = \int_a^x g(t)\, dt$$

Somit gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\, dt = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt$$

woraus mit Satz IV.1.7 folgt, daß $f'(x) = g(x)$. □

Beispiel VI.1.11 *Sei $a > 0$ und $D = [-a, a]$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $f_n : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (stetig) differenzierbar. Wie wir in Beispiel VI.1.7 gesehen haben, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Man sieht leicht, daß $f_{n+1}' = f_n$. Also folgt mit Satz VI.1.10, daß*

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}' = \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

wobei lim *für gleichmäßige Konvergenz steht. Da außerdem $f(0) = 1$, folgt mit Satz III.4.4, daß $\exp = f$.*
Da dies für alle $a > 0$ gilt, folgern wir, daß

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

In den meisten Analysislehrbüchern wie z.B. [For] wird $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ als Definition der Exponentialfunktion genommen und es werden daraus ihre Eigenschaften entwickelt. Unsere an [MV] orientierte Darstellung folgt hingegen mehr der historischen Entwicklung, wo die Exponentialfunktion über die Augenblicksverzinsung definiert wurde und erst später durch ihre Taylorreihe dargestellt wurde.

VI.2 Potenzreihen

Eine besonders wichtige Klasse von Funktionenreihen sind die sogenannten Potenzreihen, die man als eine Art "unendlicher" Polynome auffassen kann.

Definition VI.2.1 *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0.

Folgendes sind Beispiele von Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

Wir nehmen meist o.B.d.A. an, daß der Entwicklungspunkt 0 ist.

Satz VI.2.2
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *eine Potenzreihe, die für ein* $c \in \mathbb{R}$ *konvergiert, und* $r \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \le r < |c|$. *Dann konvergieren die Potenzreihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ *absolut und gleichmäßig auf der Menge* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le r\}$.

Beweis: Da nach Annahme die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ konvergiert, ist die Folge $(a_n c^n)$ eine Nullfolge und somit existiert ein $K > 0$ mit $|a_n c^n| \le K$ für alle n. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \le r < |c|$.
Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le |r|$ gilt dann

$$|a_n x^n| = \left| a_n c^n \left(\frac{x}{c}\right)^n \right| \le K \left|\frac{x}{c}\right|^n \le K \left|\frac{r}{c}\right|^n$$

Da $\left|\frac{r}{c}\right| < 1$ und somit die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} K \left|\frac{r}{c}\right|^n$ konvergiert, konvergiert aufgrund von Satz VI.1.4 die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig und absolut auf $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le r\}$.
Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le |r|$ gilt

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| = (n+1)\left| a_{n+1}c^n \left(\frac{x}{c}\right)^n \right| = (n+1)\frac{|a_{n+1}c^{n+1}|}{|c|}\left|\frac{x}{c}\right|^n \le \frac{K}{|c|}(n+1)\left|\frac{r}{c}\right|^n$$

Da $\left|\frac{r}{c}\right| < 1$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{|c|}(n+1)\left|\frac{r}{c}\right|^n$ aufgrund des Quotientenkriteriums. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ aufgrund von Satz VI.1.4 gleichmäßig und absolut auf $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le r\}$. □

Mit Kontraposition folgt aus diesem Satz ist, daß, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ divergiert, auch für alle d mit $|d| > |c|$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$ divergiert. Dies legt folgende Definition nahe.

Definition VI.2.3 *Für eine Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *sei ihr* Konvergenzradius *definiert als das Supremum aller* $|x-x_0|$, *sodaß* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *konvergiert.*

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist diejenige Zahl $\rho \geq 0$, für die gilt, daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert, falls $|x-x_0| < \rho$, und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ divergiert, falls $|x-x_0| > \rho$. Im Falle $|x-x_0| = \rho$ läßt sich im allgemeinen keine Aussage treffen, wie man anhand der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ sieht. Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1} |x|^n$ umd somit umsomehr aufgrund des Majorantenkriteriums die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Im Falle $x = 1$ divergiert die Reihe, also ist der Konvergenzradius 1, aber für $x = -1$ konvergiert die Reihe.

Zur Bestimmung des Konvergenzradius erweist sich folgender Satz oft als nützlich.

Satz VI.2.4 *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die ab einem gewissen Index von 0 verschieden ist. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho \in [0,\infty]$, dann ist ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_n x^n$.*

Beweis: Für $x = 0$ konvergiert die Potenzreihe sowieso. Für $x \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$$

und deshalb

$$q_x := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{\rho}$$

Somit gilt aufgrund von Satz V.2.8, daß

- wenn $|x| < \rho$, dann $q_x = \frac{|x|}{\rho} < 1$ und somit $\sum a_n x^n$ konvergiert
- wenn $|x| > \rho$, dann $q_x = \frac{|x|}{\rho} > 1$ und somit $\sum a_n x^n$ divergiert

woraus folgt, daß ρ der Konvergenzradius der Reihe $\sum a_n x^n$ ist. □

Anwendungen von Satz VI.2.4 finden sich in folgendem

Beispiel VI.2.5

1) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *hat Konvergenzradius* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$.

2) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *hat Konvergenzradius* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

3) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ *hat Konvergenzradius* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

4) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ *hat Konvergenzradius* $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

Eine präzise, aber nicht immer leicht auszurechnende Formel für den Konvergenzradius stellt folgender Satz bereit.

Satz VI.2.6 *Sei* $c = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}$ *Dann ist der Konvergenzradius* ρ *von* $\sum a_n x^n$ *gegeben durch*

- $\rho = \infty$ *wenn* $c = 0$
- $\rho = \frac{1}{c}$ *wenn* $0 < c < \infty$
- $\rho = 0$ *wenn* $c = \infty$.

Beweis: Der Beweis verwendet klarerweise den Satz V.2.10. Da er jedoch etwas aufwendiger ist, sei er dem ambitionierten Leser als Übung überlassen. $\square$

Satz VI.2.7 (Rechenregel für Potenzreihen)
Seien $\sum a_n x^n$ *und* $\sum b_n x^n$ *Potenzreihen mit Konvergenzradien* ρ_a *und* ρ_b. *Dann gilt für* $|x| < \min(\rho_a, \rho_b)$, *daß*

1) $\sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n$

2) $\sum c a_n x^n = c \cdot \sum a_n x^n$

3) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \textit{wobei } c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen folgen unmittelbar aus Satz V.2.12 und die dritte Behauptung folgt aus Satz V.2.14. $\square$

Satz VI.2.8 *Sei* $\sum a_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$ *und* $f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1) *Dann ist* f *differenzierbar mit* $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ *für alle* $x \in]-\rho, \rho[$.

2) *Dann ist* f *auf jedem Intervall* $[a, b] \subseteq]-\rho, \rho[$ *integrierbar (da stetig) und es gilt für alle* x *mit* $|x| < \rho$, *daß* $\int_0^x f(t)\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Beweis:
ad 1) : Wegen Satz VI.2.2 konvergiert für alle $a \in [0, \rho[$ die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ auf $[-a, a]$ absolut und gleichmäßig. Mit Satz VI.1.10 folgt dann aber, daß $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, da $\frac{d\, a_{n+1} x^{n+1}}{dx} = (n+1) a_{n+1} x^n$.

ad 2) : Auf $[a,b] \subseteq]-\rho,\rho[$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig gegen f. Also ist f auf $[a,b]$ stetig und somit integrierbar. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$. Wegen Satz VI.1.8 gilt nun

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

wie behauptet. □

Beispiel VI.2.9

Für $|x| < 1$ *gilt* $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. *Wegen Satz VI.2.8 1) gilt*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

für $|x| < 1$. *Wegen Satz VI.2.7 1) gilt nun für* $|x| < 1$, *daß*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \tfrac{1}{(1-x)^2} - \tfrac{1}{1-x} = \tfrac{1-(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \tfrac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

VI.3 Taylorreihen

Unter allen Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind die Polynome besonders einfache, da sie mithilfe der “Grundrechnungsarten” Addition und Multiplikation definiert sind. Dies ist von großer Wichtigkeit, wenn man Funktionen am Taschenrechner oder Computer ausrechnen will. Beispielsweise kann man die Exponentialfunktion sehr effizient mithilfe der Reihendarstellung $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ berechnen. Für $|x| \leq 1$ konvergiert diese Reihe sehr schnell, da $n!$ sehr schnell wächst. Und dies reicht auch, da man jede reelle Zahl y darstellen kann als $y = n + x$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $|x| \leq 1$ und somit gilt $\exp(y) = e^y = e^{n+x} = e^n \exp(x)$.
Also ist es durchaus von praktischem Interesse, wenn sich Funktionen (zumindest lokal durch schnell konvergierende) Potenzreihen darstellen lassen. Durch iterierte Anwendung von Satz VI.2.8 1) gilt für $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, daß $n! a_n = f^{(n)}(0)$, d.h. $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Also ist insbesondere die Reihendarstellung von f eindeutig! Wenn sich also eine Funktion f durch eine Potenzreihe darstellen läßt, dann durch die sogenannte *Taylorreihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Entsprechend heißt $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ das n-te Taylorpolynom. Eine Abschätzung des dadurch auftretenden Fehlers gibt folgender

Satz VI.3.1 (Satz von Taylor)
Sei f auf einem Intervall I (n+1)-mal stetig differenzierbar.
Dann gilt für $a, x \in I$, daß

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + R_{n+1}(a,x)$$

wobei $R_{n+1}(a,x) = \frac{1}{n!} \int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n.
Für $n = 0$ gilt die Aussage, da $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\, dt$ aufgrund von Satz IV.1.7.
Wir nehmen als Induktionshypothese an, die Aussage gelte für n. Sei f eine $(n+2)$-mal differenzierbare Funktion auf I. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{n+1}(a,x) &= \tfrac{1}{n!} \int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \qquad \text{(part. Integr.)} \\ &= -\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=a}^{t=x} + \int\limits_a^x \tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \tfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+2}(a,x) \end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $n+1$ mithilfe der Induktionshypothese folgt. □

Wenn f unendlich oft differenzierbar ist und es eine Konstante $c \geq 0$ gibt mit $|f^{(n)}| \leq c$ für alle n, dann gilt

$$|R_{n+1}(a,x)| \leq \frac{1}{n!} \int\limits_a^x \left|(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\right|\, dt \leq \frac{c}{n!} \int\limits_a^x |x-t|^n\, dt \leq c \frac{|x-a|^{n+1}}{n!}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} c\frac{|x-a|^{n+1}}{n!} = 0$, gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

für alle $x \in I$.

Beispiel VI.3.2
(1) *Wir betrachten die Funktion* $f = \sin$ *und entwicklen sie im Punkt* $a = 0$. *Offenbar gilt*

$$f^{(0)} = \sin \quad f^{(1)} = \cos \quad f^{(2)} = -\sin \quad f^{(3)} = -\cos \quad f^{(4)} = \sin \quad \ldots$$

und somit $f^{(2n)}(0) = 0$ *und* $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. *Also gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(0,x)$$

wobei $|R_{2n+2}(0,x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!}$, *da* $|f^{(2n+2)}| \leq 1$. *Es genügt* x *mit* $|x| \leq \pi$ *zu betrachten, für welche gilt* $|R_{2n+2}(0,x)| \leq \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!}$. *Da* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+1)!} = 0$, *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ *gleichmäßig gegen* sin.
(2) *Wir betrachten die Funktion* ln *und entwickeln sie im Punkt* $a = 1$. *Da* $\ln(1) = 0$ *gilt aufgrund von Satz VI.3.1*

$$\ln(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + R_{n+1}(1,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + R_{n+1}(1,x)$$

Man zeigt leicht durch Induktion über k, *daß* $\ln^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^k}$ *und somit* $\ln^{(k+1)}(1) = (-1)^k k!$. *Somit gilt*

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k + R_{n+1}(1,x) = \sum_{k=1}^{n} -\tfrac{(1-x)^k}{k} + R_{n+1}(1,x)$$

Aus Beispiel VI.1.9 folgt, daß

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-x)^k}{k}$$

falls $0 < x < 1$. *Das Restglied berechnet sich wie folgt*

$$R_{n+1}(1,x) = \frac{1}{n!}\int_1^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = \int_1^x \left(\frac{t-x}{t}\right)^n dt$$

Also gilt für $x \geq 1$ *die Abschätzung*

$$|R_{n+1}(1,x)| \leq \left|\int_1^x \left(\frac{t-x}{t}\right)^n dt\right| \leq \int_1^x \left|\frac{t-x}{t}\right|^n dt \leq \int_1^x |t-x|^n\, dt \leq (x-1)^{n+1}$$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(1,x) = 0$, *falls* $1 \leq x < 2$.
Also gilt

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-x)^k}{k}$$

für $x \in]0,2[$. *Der Konvergenzradius der Reihe ist* 1, *da sie für* $x = 0$ *divergiert (da* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-0)^k}{k} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = -\infty$*). In [For] wird gezeigt, daß die Reihenentwicklung von* ln *auch für* $x = 2$ *gilt und somit* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

VI.4 Ein Ausblick auf Fourierreihen

Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, sind notwendigerweise glatt, d.h. unendlich oft differenzierbar. Außerdem gilt für nichtkonstante Polynome p, daß $\lim\limits_{x\to\infty} |p(x)| = \infty$, woraus folgt, daß sie nicht geeignet sind, um periodische Funktionen zu approximieren. Diese Nachteile treten nicht auf bei sogenannten "Fouriereihen", die von Ch. Fourier im 19ten Jahrhundert entwickelt wurden, als er die sogenannte "Wärmeleitungsgleichung" studierte.[16]
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch*, wenn eine konstante $L > 0$ existiert, sodaß $f(x) = f(x + L)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Durch geeignete Skalierung kann man immer erreichen, daß die Periodenlänge L gleich 2π ist. Typische Beispiele solcher Funktionen mit Periode 2π sind Funktionen der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

die als "trigonometrische Polynome" bezeichnet werden. Eine "trigonometrische Reihe" ist eine Reihe der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Es ist im allgemeinen sehr schwierig für eine vorgegebene trogonometrische Reihe zu entscheiden, für welche x sie konvergiert. Wenn aber für eine Funktion f gilt, daß

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

dann hat man f als eine Überlagerung von Schwingungen ganzzahliger Frequenz dargestellt, was in Physik und Elektrotechnik von großem Interesse ist, insbesondere weil man zeigen kann, daß die Koeffizienten eindeutig sind und sich folgendermaßen bestimmen lassen

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Die zugehörige trigonomterische Reihe heißt *Fourierreihe* der Funktion f und wird mit $\mathscr{F}(f)$ bezeichnet.

[16]Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die die Ausbreitung von Wärme in einem erhitzten Draht beschreibt, dessen Enden durch Kühlung auf konstante Temperatur gehalten werden.

Für stückweise stetig differenzierbare[17] Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ kann man zeigen, daß für alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt

$$\mathscr{F}(f)(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

wobei $f(x_+) = \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$ und $f(x_-) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t)$. Deshalb gilt für solche f, die überdies auf $[0, 2\pi]$ stetig sind, daß

$$\mathscr{F}(f)(x) = f(x)$$

für alle x.

Beispiel VI.4.1 *Betrachten wir die 2π-periodische Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} h & 0 < x \leq \pi \\ -h & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

wobei $h > 0$.
Die Fourierreihe von f ist

$$\mathscr{F}(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4h}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

da wegen $\frac{d \, \frac{1}{n} \sin(nt)}{d\,t} = \cos(nt)$ *und* $\sin(n\pi) = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos(nt) \, dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} h \cos(nt) \, dt \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) \, dt - \frac{h}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) \, dt \\ &= \frac{h}{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} \bigg|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{h}{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} \bigg|_{t=\pi}^{t=2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und wegen $\frac{d \, \frac{-1}{n} \cos(nt)}{d\,t} = \sin(nt)$

[17] d.h. es gibt eine Partition $a_0 < a_1 < \ldots a_{n-1} < a_n$ des Definitionsbereiches von f, sodaß die Einschränkungen von f auf die Intervalle $]a_{k-1}, a_k[$ alle stetig differenzierbar sind

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\;dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} h\sin(nt)\;dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} h\sin(nt)\;dt \\
&= \frac{h}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(nt)\;dt - \frac{h}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin(nt)\;dt \\
&= \frac{h}{n\pi}(-\cos(n\pi)+\cos(0)+\cos(2n\pi)-\cos(n\pi)) \\
&= \frac{2h}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) \\
&= \begin{cases} 0 & n \textit{ gerade} \\ \frac{4h}{n\pi} & n \textit{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Man beachte, daß $f(n\pi) = h$ *aber* $\mathscr{F}(f)(n\pi) = 0$.

Literatur

[FLSW] Karl Graf Finck von Finckenstein, Jürgen Lehn, Helmut Schellhaas, Helmut Wegmann *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure* 2 Bde Teubner 2000.

[For] O. Forster *Analysis* 3 Bde Vieweg Verlag.

[HMV] A. Hoffmann, B. Marx, W. Vogt *Mathematik für Ingenieure* 2 Bde Pearson Studium 2006.

[MV] K. Meyberg, P. Vachenauer *Höherer Mathematik* 2 Bde. Springer 1990.