

# Einführung in Computational Engineering (für Inf.) / Grundlagen der Modellierung und Simulation (für CE)

Prof. Dr. Oskar von Stryk

Fachgebiet Simulation, Systemoptimierung und Robotik

Fachbereich Informatik

Sekretariat: Raum D213, Hochschulstr. 10

E-Post: [stryk@sim.tu-darmstadt.de](mailto:stryk@sim.tu-darmstadt.de)

Sprechstunde: siehe Webseite und nach Vereinbarung

<http://www.sim.tu-darmstadt.de/edu/gms/> → FB-Moodle

# Organisatorisches (1)

## Grundlagenvorlesung:

- BSc Informatik: „Kanonik“ für Bereich „Computational Engineering“
- BSc Computational Engineering: 3. Fachsemester

## Voraussetzungen:

- Mathematik für Ingenieure I-II
  - ◆ Lineare Algebra, mehrdimensionale Analysis, gewöhnliche Differentialgleichungen

## mögliche Vertiefungen, zum Beispiel:

- „Robotik 1 (Grundlagen)“ (Kinematik und Dynamik von Robotern) (WiSe 11/12, 12/13)
- „Optimierung statischer und dynamischer Systeme“ (evtl. SoSe 13)
- physikalisch-basierte Animation & Simulation
- siehe auch Modulhandbuch Informatik, Bereich CE
- Kapitel 3 der Vorlesung hat auch enge Bezüge zu den Grundlagen der Regelungs- und Automatisierungstechnik

## Literaturhinweise:

- kein allumfassendes, begleitendes Lehrbuch verfügbar
- kapitelweise Begleitliteratur

# Organisatorisches (2)

- **Termine:**
  - Montags, 13:30 – 14:15 Uhr: Übung
  - Montags, 14:25 – 16:05 Uhr: Vorlesung
- **Vorlesungsstil:**
  - Kombination von Folien mit gelegentlichem Tafel-/Overhead-Anschrieb
  - Ziel: Folien künftig möglichst mehrere Tage vor Vorlesung auf Webseite
- **Materialien:**
  - Online auf FB-Moodle: [moodle.informatik.tu-darmstadt.de](http://moodle.informatik.tu-darmstadt.de)
- **Schriftliche Klausur:**
  - 4. März 2011, 9-11 Uhr (effektive Prüfungsdauer: 90 Minuten)
- **Hausaufgaben, Programmieraufgaben:**
  - werden korrigiert werden und für das Gesamtergebnis mit berücksichtigt.
  - Näheres spätestens mit Ausgabe des ersten relevanten Übungsblattes

# Hinweise zur Klausur

- **Schriftliche Klausur:**  
voraussichtlich (ohne Gewähr! Bitte selbst überprüfen!)  
Freitag, 24. Februar 2012, 9-11 (Dauer: 90 Min.)
- **Hilfsmittel:**
  - ein Blatt DIN A4 mit eigenen Notizen (von eigener Hand beschrieben, Vorder- u. Rückseite)
  - mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein)
  - bei begründetem Bedarf: Wörterbuch Deutsch als Fremdsprache (alternativ: Aufgaben in deutscher und englischer Sprache)
  - Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner oder das Skript) sind nicht zugelassen.
  - Bitte verwenden Sie zum Schreiben blau oder schwarz schreibende Kugelschreiber. Bleistifte sowie rotes oder grünes Schreibwerkzeug sind nicht zugelassen.

## 1. Einführung

# Begriffsbildung „Simulation“

---

Lat. „simulare“: nachahmen

**Simulation:**

**Nachahmung** von relevanten Eigenschaften eines (ingenieur- oder naturwissenschaftlichen, betriebs- oder volkswirtschaftlichen) Systems auf einem Computer

**Ziel:**

Verständnis von Zusammenhängen,  
Übertragung auf das reale System

# Begriffsbildung „Simulation“

## Simulation:

virtuelles (i.Allg. rechnergestütztes) Experiment am **Modell**, eigentliches Ziel der **Modellierung**

R. Shannon (1975):

„Simulation is the process of

- **designing a model** of a real system and
- **conduction experiments** with this model

for the purpose either of

- **understanding** the behavior of the system and its underlying causes or of
- **evaluating** various designs of an artificial system or strategies for operation of the system.“

# Begriffsbildung „Modell“

*Was ist ein „Modell“ ?*

**Modell:** (vereinfachendes) Abbild einer (partiellen) Realität

Original



„klassisches“, analoges Modell



- Verkleinerung des Originals
- möglichst „naturgetreues“ Aussehen
- Funktionalität des Originals ?

# Begriffsbildung „Modell“

- **Abstraktes Modell**: **formale** Beschreibung, typischerweise (aber nicht nur) mit dem Methodenapparat der Mathematik
- **Mathematische Modellierung**: Prozess der formalen **Herleitung** und **Analyse** eines mathematischen Modells
  - ↳ zunächst: **informelle Beschreibung** des Problems (Prosa)
  - ↳ daraus: **semi-formale Beschreibung** mit dem Instrumentarium der Anwendungswissenschaft
  - ↳ daraus schließlich: **streng formale Beschreibung** (Konsistenz!)  
d.h. **Formalisierung** bzw. **Mathematisierung** eines Problems zur besseren Lösbarkeit

# Begriffsbildung „Modell“

- **Modellbildung** unterschiedlich nahe liegend und etabliert, z.B.:
  - **Ingenieurwissenschaften**: lange Tradition, unverzichtbar in der Forschung wie der Produktentwicklung
  - **exakte Naturwissenschaften**: lange Tradition, Formulierungen der Physik etwa per se mathematisch, heute i.Wstl. anerkannt
  - **Klimamodellierung**: stark abweichende Theorien z.B. zur globalen Erwärmung, alle modellgestützt
  - **Volkswirtschaftslehre, staatliche Wirtschaftspolitik**: stark umstritten, mindestens zwei Lager (Monetaristen und Keynesianer), beide fahren auf Modelle ab
  - und viele mehr

# Grundlagen der Modellierung und Simulation

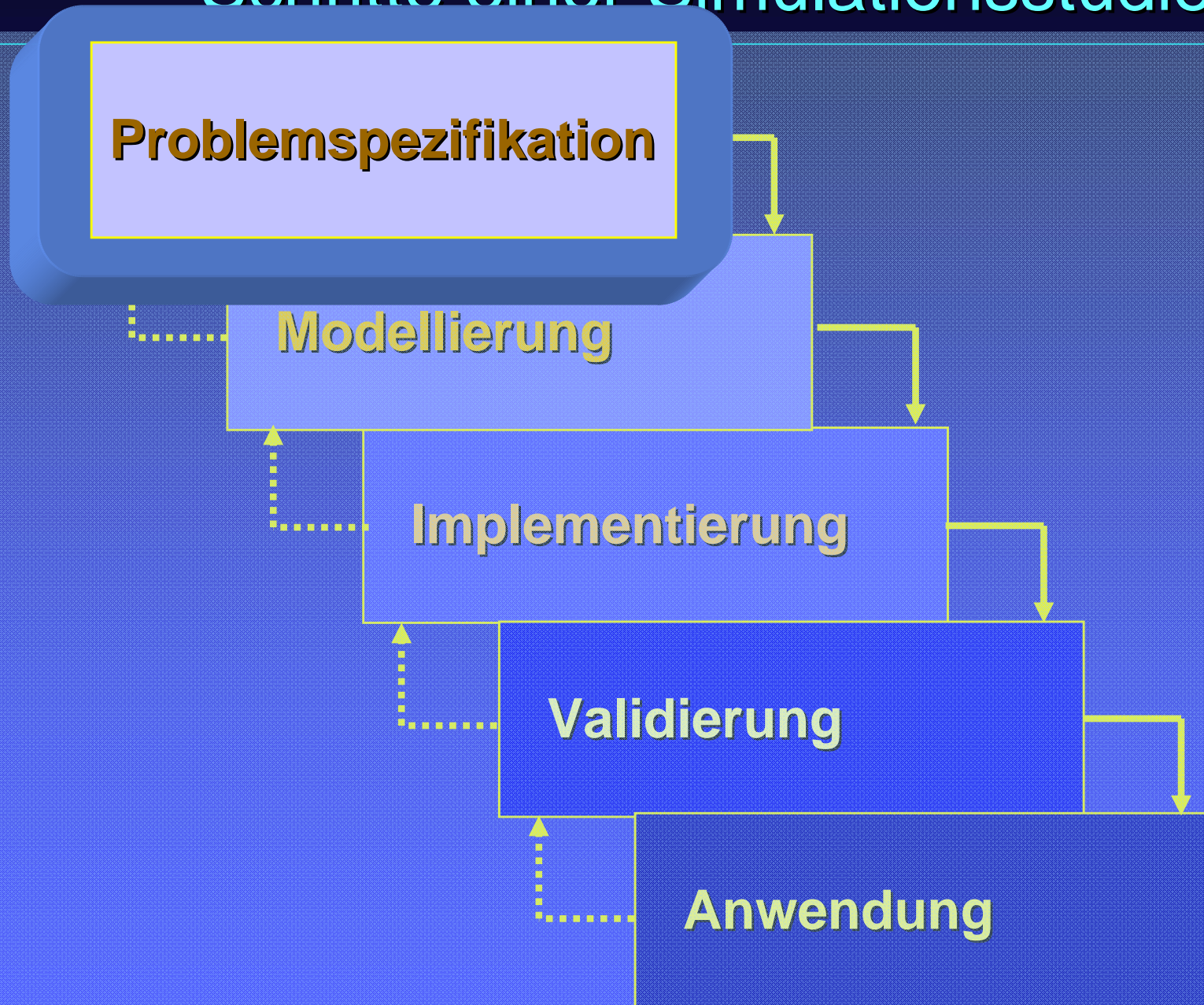
---

## 1. Einführung

### 1.1 Begriffsbildung

### 1.2 Schritte einer Simulationsstudie

# Schritte einer Simulationsstudie



# Simulationsziele

## *Was ist der mögliche Zweck einer Simulation ?*

- Ein bekanntes Szenario verstehen bzw. nachvollziehen:
  - Naturkatastrophen (Erdbeben etc.): warum überhaupt, warum an diesem Ort und zu dieser Zeit, warum so heftig?
  - Einsturz des World Trade Centers
- Ein bekanntes Szenario optimieren:
  - Arm-/Beinbewegungen von Robotern
  - Flugeinsatzplan der Lufthansa
  - Wärmeabtransport eines Kühlsystems
  - Durchsatz zur ein Rechensystem oder das Internet
- Ein unbekanntes Szenario vorhersagen:
  - Dynamische Bewegungseigenschaften neu konzipierter Fahrzeuge/Roboter
  - Klimaveränderungen, Wettervorhersage
  - Entwicklung des Bevölkerungswachstums
  - Eigenschaften neu konzipierter Materialien (Verbundwerkstoffe, ...)

# Warum Simulation?

## Reales System

- zu groß, zu klein (Galaxien, Moleküle)
- zu schnell, zu langsam (Kernreaktion, Populationsdynamik, Klima)
- noch nicht gebaut (Flugzeug, integrierte Schaltung, Fertigungssteuerung)
- zu gefährlich (Kernreaktionen, Humanmedizin)
- nicht experimentierbar (Volkswirtschaft, Ökosystem)
- zu teuer (Prototypen, Crash-Test)
- zu stark gestört (Börsenkurse, Wirtschaft)

**Fazit: Simulation, wenn reales System nicht oder nur unter hohem Aufwand verfügbar ist**

# Beispiel für Simulationsstudie: Schiffschaukel

## Schiffschaukel



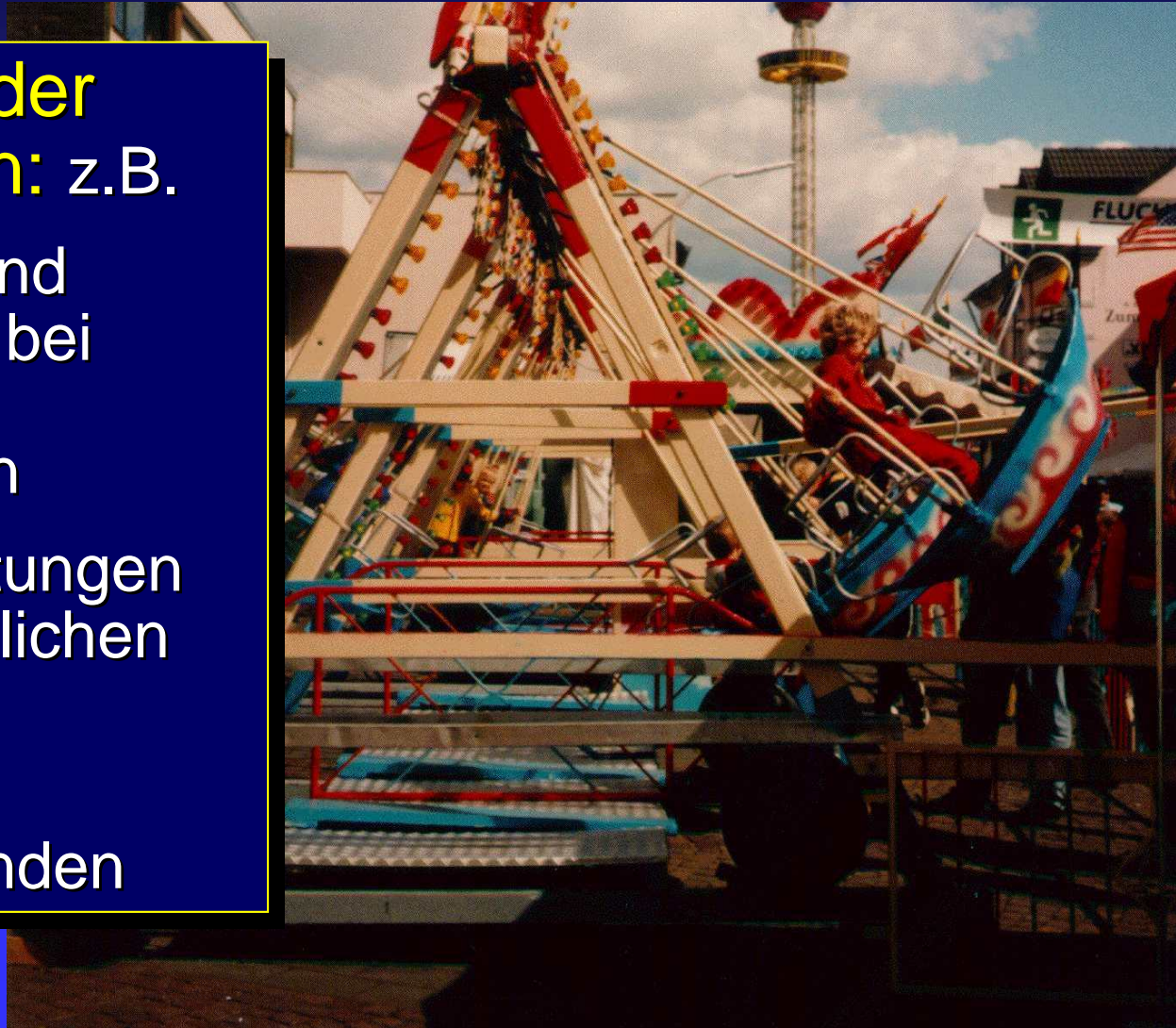
(Einige Folien zur Schiffschaukel  
beruhen auf W. Wiechert, Uni Siegen)

# Problemspezifikation: Beispiel

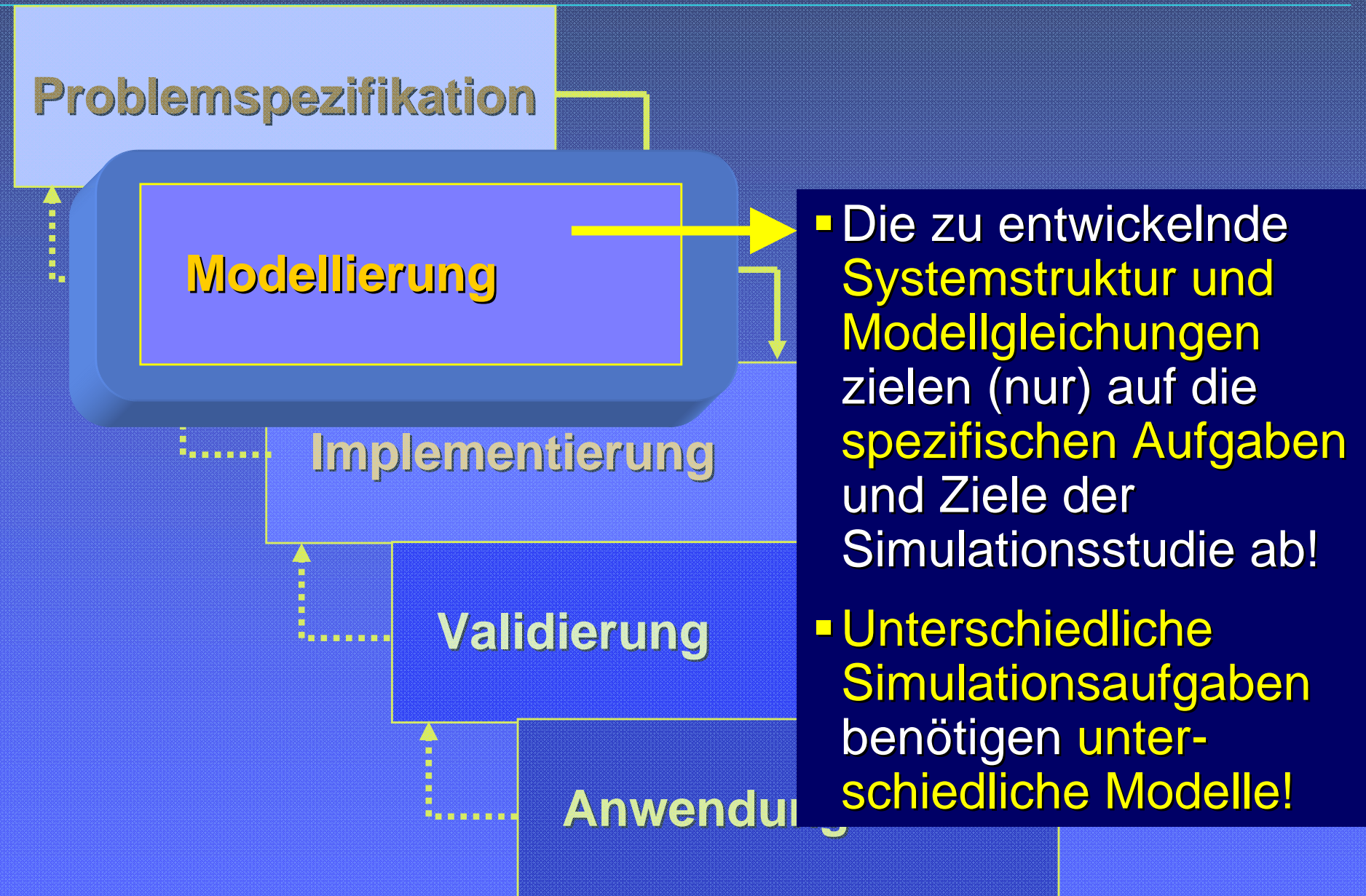
## Schiffschaukel

### Möglicher Zweck der Untersuchungen: z.B.

1. Benötigte Zeiten und auftretende Kräfte bei unterschiedlichen Schaukelstrategien
2. Auftretende Belastungen in den unterschiedlichen Tragestrukturen
3. Wartezeiten und Durchsatz von Kunden



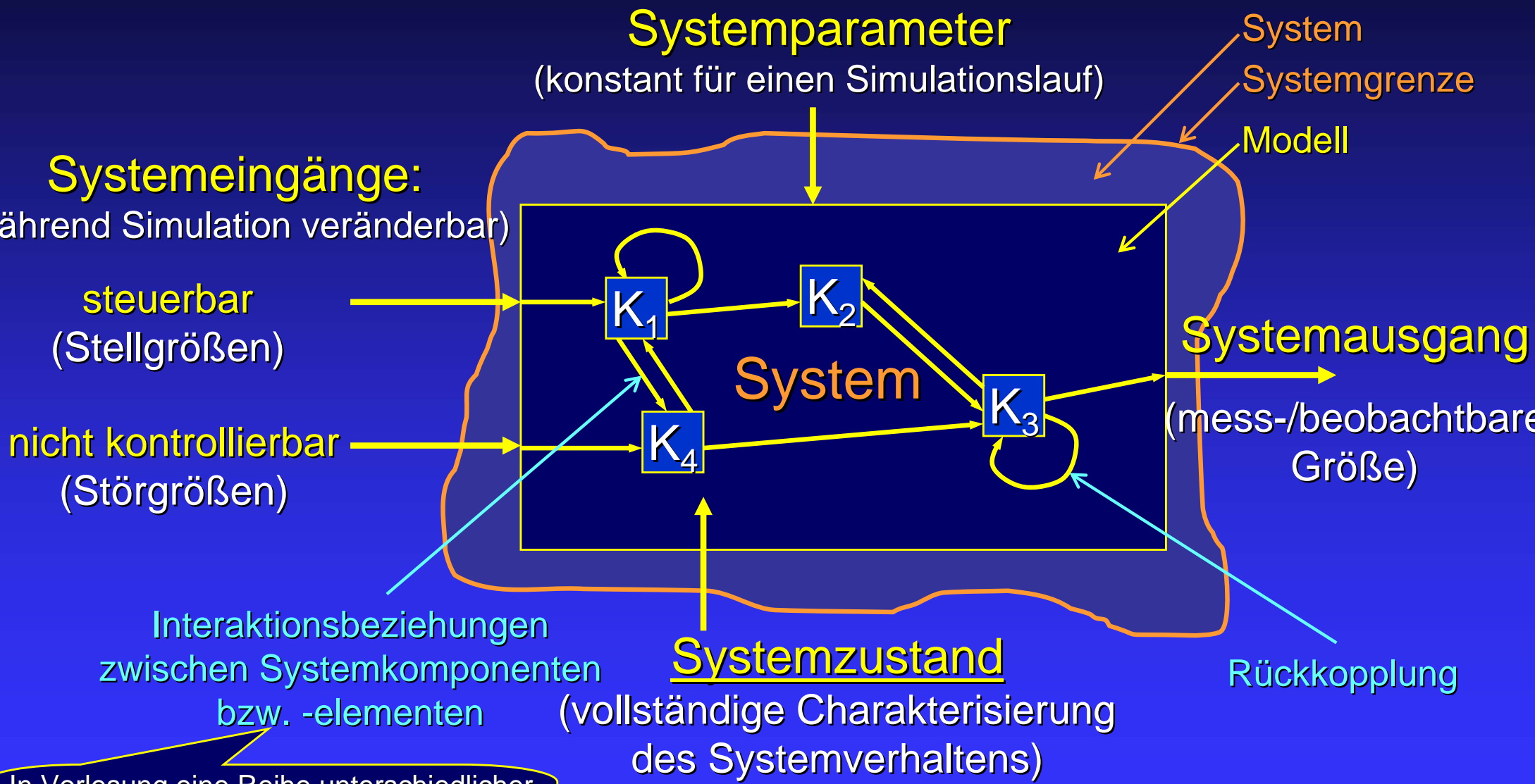
# Schritte einer Simulationsstudie



# Simulation und (reales) System

- **Ziel der Simulation:**
  - (quantitative / qualitative) Aussagen
  - über das Verhalten eines Ausschnitts der realen Welt
- **(reales) System** = Ausschnitt der realen Welt
  - existiert und funktioniert in Raum und Zeit
  - als Ganzes definiert durch Zweck, Funktion etc.
  - in sich strukturiert als unabhängige, interagierende Komponenten (Subsysteme)
- **Reale Welt aufgeteilt** in zu untersuchendes **System** und seine **Umwelt**, mit der es über **Ein-/Ausgaben** in Wechselwirkung steht
- **(System-)Modell** = **Ersatzsystem**, gebildet unter Annahmen und Idealisierung
- **Modellierung** = Abstraktion durch Berücksichtigung wesentlicher / Weglassen unwesentlicher Bestandteile und Eigenschaften des Systems

# System und Modell



In Vorlesung eine Reihe unterschiedlicher Beispiele für Systemelemente und ihre Interaktionsbeziehungen

# Herleitung von Modellen (1)

Modell



Original



## Anforderungen an Modelle:

1. Um Ergebnisse vom Modell auf das Originalsystem übertragen zu können, ist eine „ausreichend genaue“ Abbildung bzgl. der für die Simulationszwecke **relevanten Merkmale** notwendig.
2. Um Modell handhabbar zu halten, müssen Details **weggelassen** werden (**Abstraktion** bzw. Idealisierung).

## Schwierigkeiten:

- Zielkonflikt zwischen 1. und 2.
- Alle relevanten Merkmale oft a priori nicht bekannt
- Auswirkungen von Idealisierungen i.Allg. nicht von vorneherein absehbar

# Herleitung von Modellen (2)

## 1) Was genau soll modelliert werden?

- die Bewegungsmöglichkeit eines Roboterarms (Geometrie, Kinematik) oder die dabei wirkenden/notwendigen Kräfte (Kinetik)?
- der Wirkungsgrad eines Katalysators oder die detaillierten Reaktionsvorgänge in ihm?
- das Bevölkerungswachstum in Afrika oder nur in Kairo?
- der Durchsatz durch ein Rechnernetz oder die mittlere Durchlaufzeit eines Pakets?

## 2) Welche Größen spielen eine Rolle (qualitativ) und wie groß ist ihr Einfluss (quantitativ)?

- Gelenkwinkel eines Roboterarms, an den Gelenkmotoren angelegte Spannungen
- optimale Flugbahn des Space Shuttle: Gravitation des Mondes / des Pluto / dieses Hörsaals?

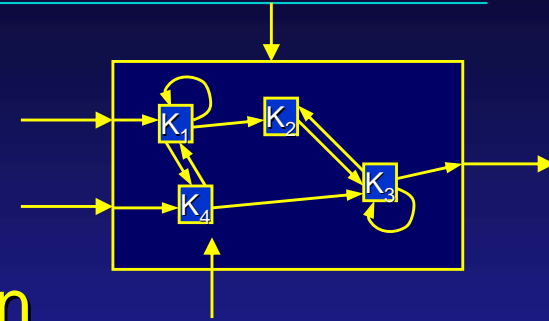
I. Allg. alles andere als offensichtlich (Expertise, Studien, Hypothesen);  
frühe Festlegungen bestimmen spätere Simulationsergebnisse (vgl. Klima!)



# Instrumentarien zur Beschreibung von Beziehungen

- algebraische Gleichungen und Ungleichungen:

$$E = mc^2, \quad w^T x \leq 10$$



- (Systeme) gewöhnliche(r) Differentialgleichungen (eine unabhängige Variable, meist Zeit  $t$ ) (→ Kapitel 3!):

$$y''(t) + y(t) = 0 \quad \text{Oszillation eines linearen Pendels}$$

$$y'(t) = y(t) \quad \text{exponentielles Wachstum}$$

$$x'(t) = -m x(t) + a y(t) + c \quad \text{Wettrüsten zweier Großmächte}$$

$$y'(t) = b x(t) - n y(t) + d \quad a, b, c, d, m, n \geq 0$$

- (Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen (mehr als eine unabhängige Variable, also Ort oder Ort und Zeit):

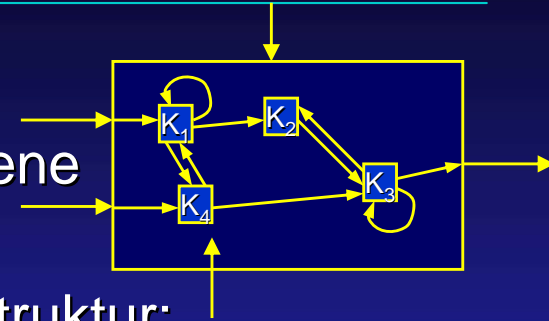
$$u_{xx} + u_{yy} = f \quad \text{für } (x,y) \in \Omega \quad \text{Verformung einer eingespannten}$$

$$u = 0 \quad \text{für } (x,y) \in \delta\Omega \quad \text{Membran unter Last } f$$

# Instrumentarien zur Beschreibung von Beziehungen

## ● Automaten, Zustandsübergangsdiagramme:

- Modellierung von Warteschlangen (Zustände: verschiedene Füllgrade; Übergänge: Ankunft bzw. Bearbeitungsende)
- Modellierung von Texterkennung (Zustände: bisherige Struktur; Übergänge: neues Zeichen)
- Modellierung von Wachstumsprozessen mit zellulären Automaten (Zustände: Gesamtbelegungssituation (Zellen voll, gefüllt, leer); Übergänge durch Regeln)



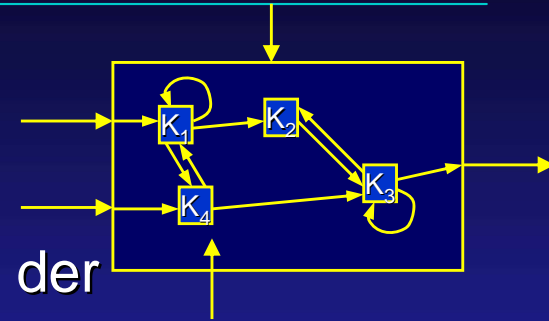
## ● Graphen:

- Modellierung von Rundreisen (Problem des Handlungsreisenden; Knoten: Orte; Kanten: Wege)
- Modellierung von Reihenfolgeproblemen (Knoten: Teilaufträge auf einer Maschine; Kanten: zeitliche Reihenfolge)
- Modellierung von Rechensystemen (Komponenten und Kanäle)
- Modellierung von Abläufen (Datenflüsse, work flows)

# Instrumentarien zur Beschreibung von Beziehungen

- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen:**

- Ankunftsprozess in einer Warteschlange
- Zustimmung zur Regierungspolitik in Abhängigkeit von der Arbeitslosenquote
- Regelungstheorie: Störterme, Rauschen
- randomisierte Heuristiken: Greedy, simulated annealing, ...



- **Fuzzy Logic:**

- Regelung von Geräten der Consumer Electronics (Wasch-, Spülmaschinen, Fotoapparate)

- **künstliche, neuronale Netze**

- **algebraische Strukturen:**

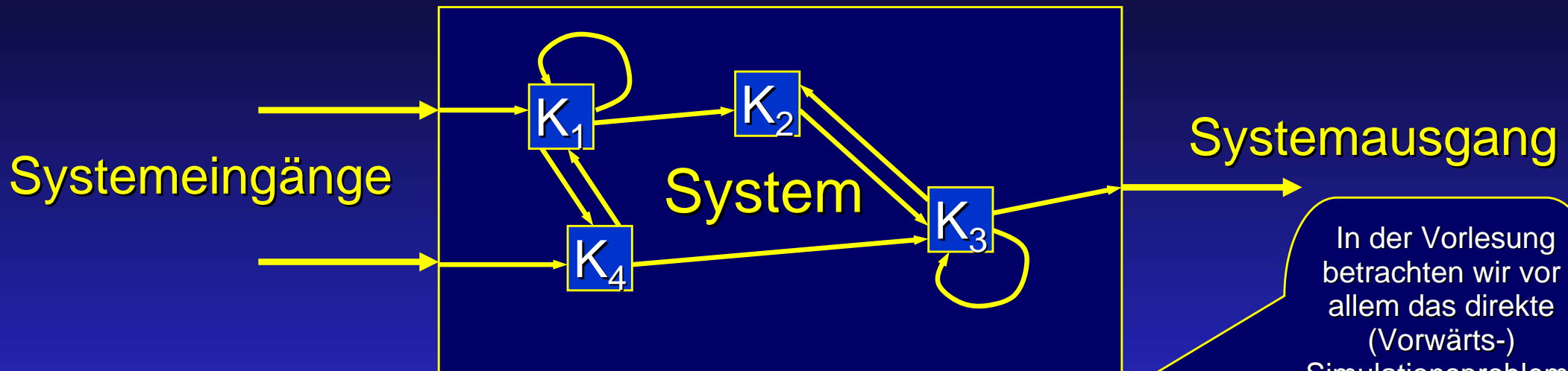
- Gruppen in der Quantenmechanik
- endliche Körper in der Kryptographie

# Simulationsaufgabe

## *Welche Gestalt hat die resultierende Berechnungsaufgabe zur Lösung der Modellbeziehungen?*

- Finde eine Lösung zu einem gegebenen Gleichungssystem
  - z.B. Bestimmung einer gültigen Startlösung in der Linearen Optimierung
- Finde die Lösung zu gegebenem Gleichungssystem
  - z.B. eindeutig lösbare gewöhnliche Differentialgleichung
- Löse Existenzaufgabe
  - z.B. gibt es überhaupt Lösung (Hamiltonscher Weg im Graphen)
- Löse beschränkte Optimierungsaufgabe
  - z.B. Rucksackproblem
  - z.B. lineare Optimierung
- Ermittle Störenfried bzw. Flaschenhals
  - z.B. kritischer Pfad
  - z.B. Komponente maximaler Auslastung

# Aufgabenstellungen



- Direktes Problem: →

- Eingänge und Systemmodell bekannt; Ausgang unbekannt

- Inverse Probleme: ←

- Eingänge und Ausgang bekannt; Systemmodell unbekannt: **Strukturidentifikation, Zustandsschätzung**
- Ausgang und Systemmodell bekannt; Eingänge unbekannt: **Steuerungsproblem**
- Ausgang, Eingang und Systemmodell bekannt; Systemparameter unbekannt: **Parameterschätzproblem, Modellkalibrierungsproblem**

In der Vorlesung betrachten wir vor allem das direkte (Vorwärts-) Simulationsproblem. In den Anwendungen treten jedoch meist beide Problemstellungen auf. Zur Behandlung inverser Probleme benötigt man weitere, über die Inhalte dieser Vorlesung hinausgehende Kenntnisse.

# Problemspezifikation: Beispiel

## Schiffschaukel

### Möglicher Zweck der Untersuchungen: z.B.

1. Benötigte Zeiten und auftretende Kräfte bei unterschiedlichen Schaukelstrategien
2. Auftretende Belastungen in den unterschiedlichen Tragestrukturen
3. Wartezeiten und Durchsatz von Kunden



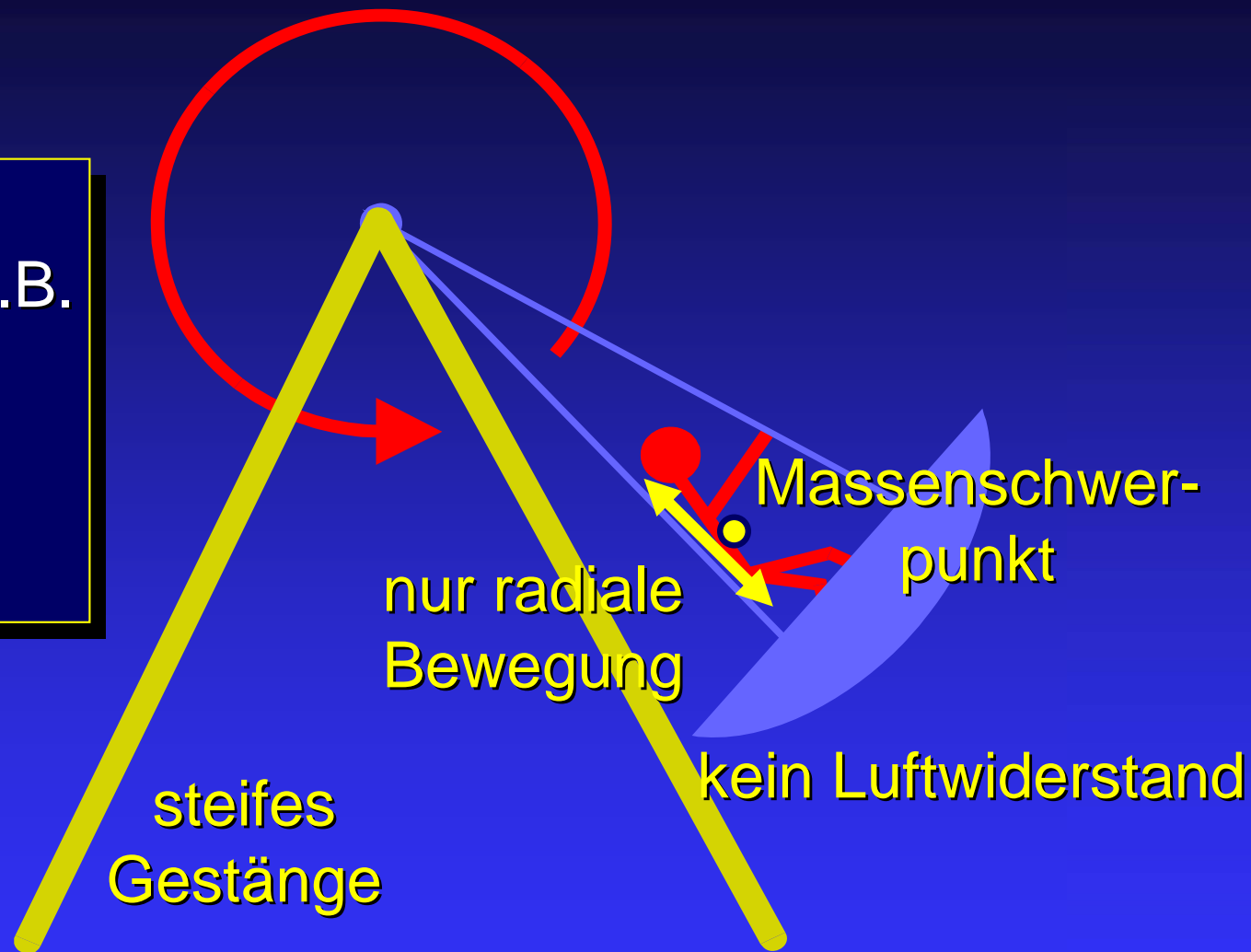
# Mathematische Modellierung: Annahmen

## Schiffschaukel

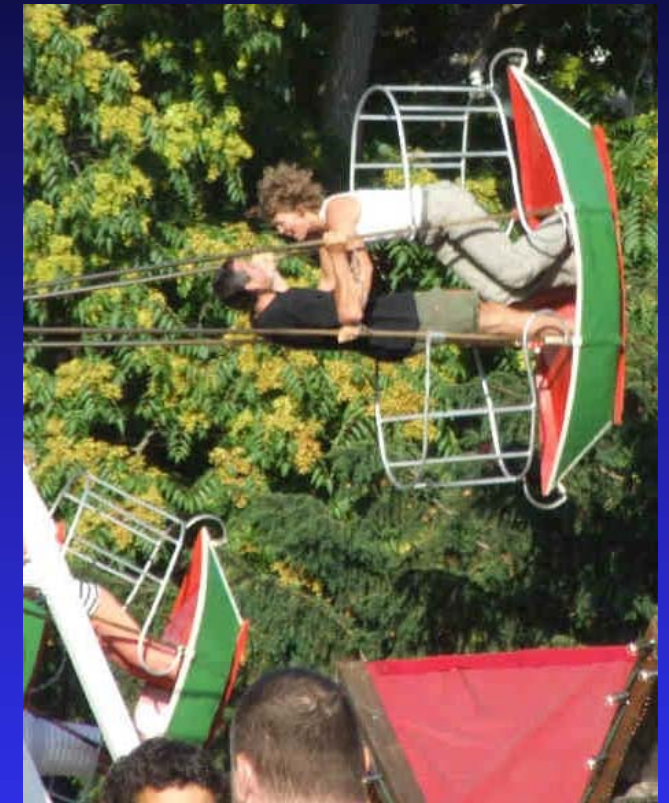
Zweck der Untersuchungen: z.B.

1. Benötigte Zeiten und auftretende Kräfte bei unterschiedlichen Schaukelstrategien

→ Die resultierenden Modelle sind Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die in Kapitel 3 der Vorlesung behandelt werden.



# Modellierung: Veranschaulichung von Annahmen



Das Modell kann reale Bewegungen nur mit gewissen Einschränkungen wiedergeben.

# Zustandsvariablen eines Modells

## Zustandsvariablen

- sind **zeitabhängige** Größen,
- legen die **aktuelle Konfiguration** eines Systems exakt fest,
- legen den **zukünftigen Verlauf** genau fest,
- sind **nicht redundant**.

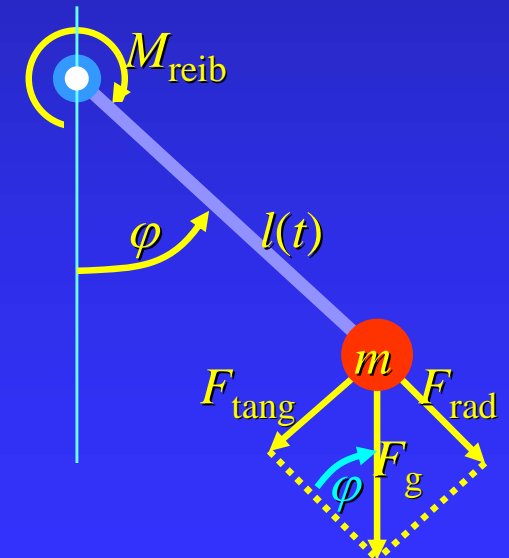
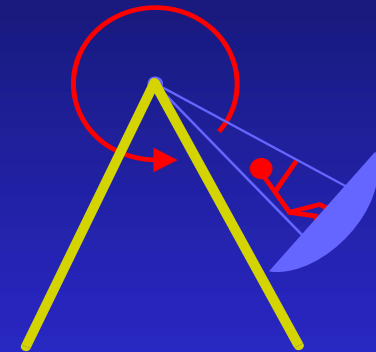
**Beispiel Schiffschaukel** (→ Näheres in Kap. 3 der VL)

- $\varphi$  und  $\omega$  sind Zustandsvariablen.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\left(2\frac{\dot{l}}{l} + \frac{d}{ml^2}\right)\omega - \frac{g}{l}\sin\varphi\end{aligned}$$

## Grundprinzip

Die Festlegung der **Zustandsvariablen** ist der Ausgangspunkt jeder Modellbildung.

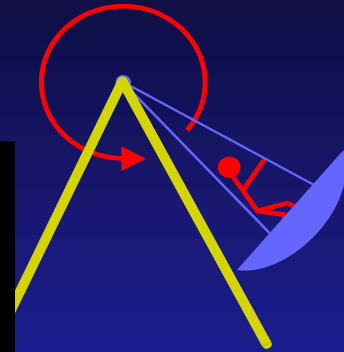


# Zustandsvariablen eines Modells

Beispiel Schiffschaukel (→ Näheres in Kap. 3 der VL)

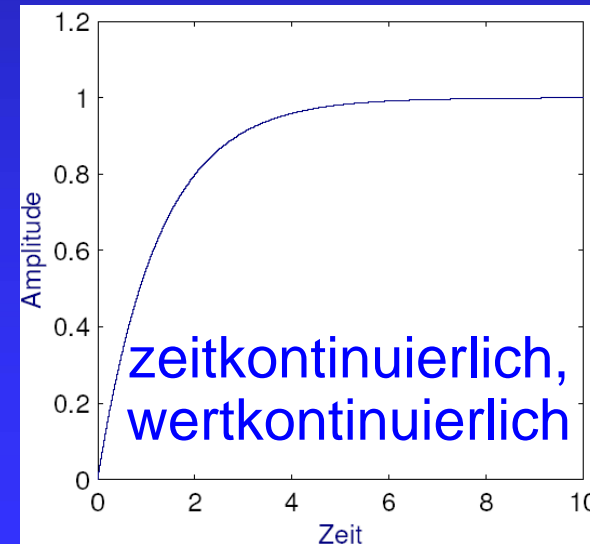
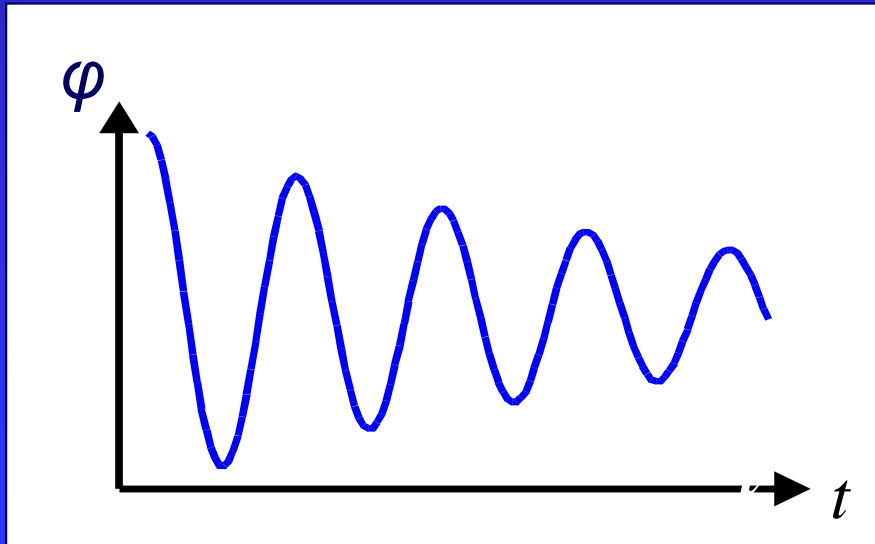
- $\varphi$  und  $\omega$  sind Zustandsvariablen.

$$\dot{\varphi} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -\left(2 \frac{l}{l} + \frac{d}{ml^2}\right)\omega - \frac{g}{l} \sin \varphi$$



Zustandsvariablen,

- deren Verhalten durch **gewöhnliche Differentialgleichungen** beschrieben wird, ändern sich **zeitkontinuierlich und wertkontinuierlich**:



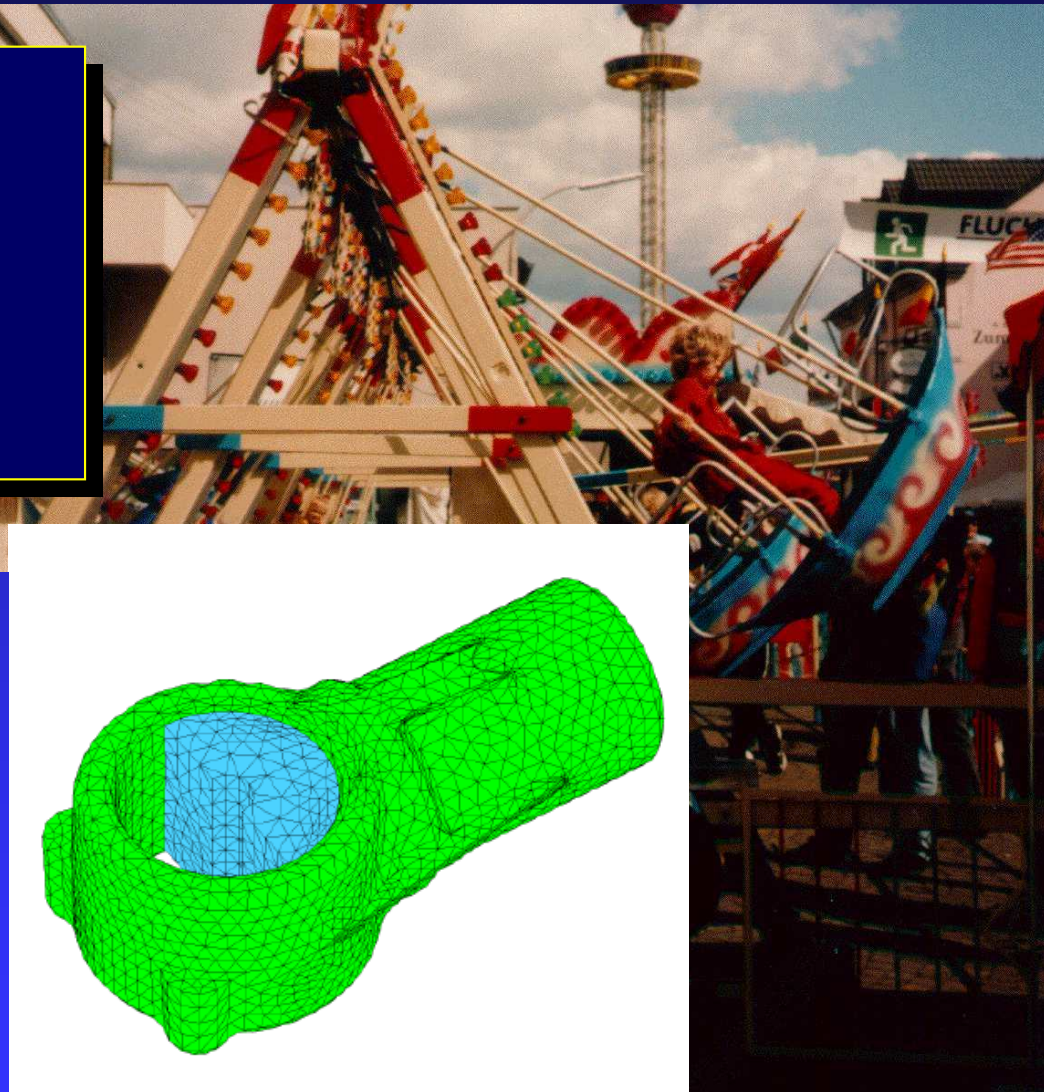
# Problemspezifikation: Beispiel

## Schiffschaukel

Zweck der Untersuchungen: z.B.

2. Auftretende Belastungen in den unterschiedlichen Tragestrukturen

→ Die resultierenden Modelle sind **partielle Differentialgleichungen**, die in der Vorlesung nicht behandelt werden können.

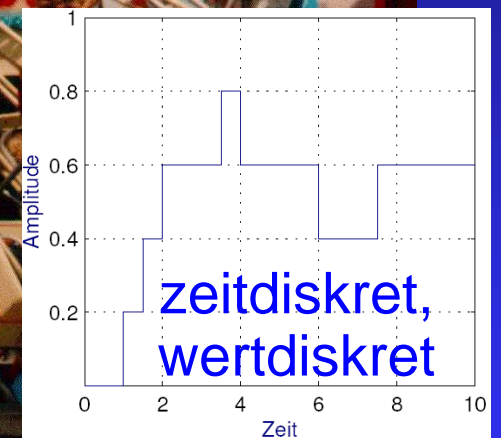
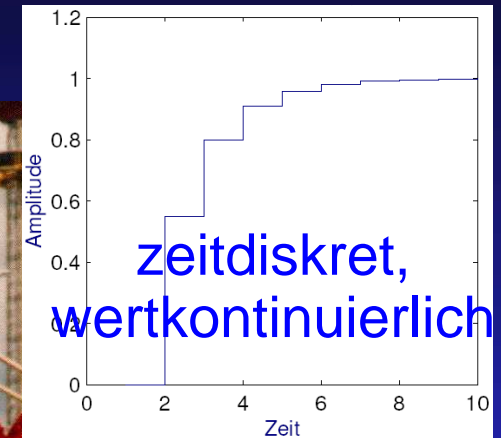
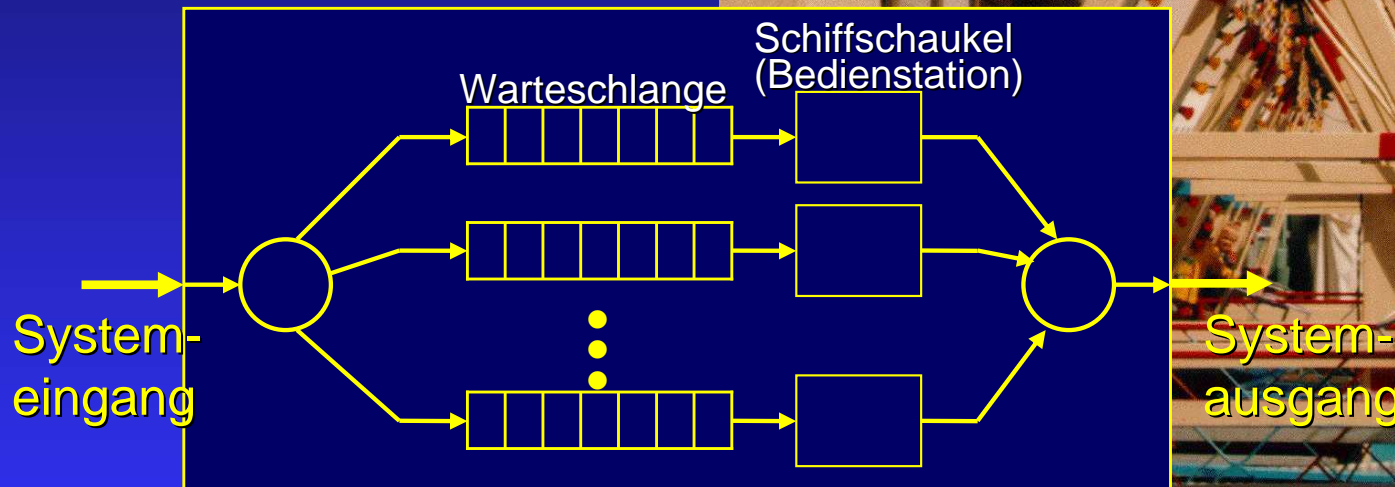


# Problemspezifikation: Beispiel

## Schiffschaukel

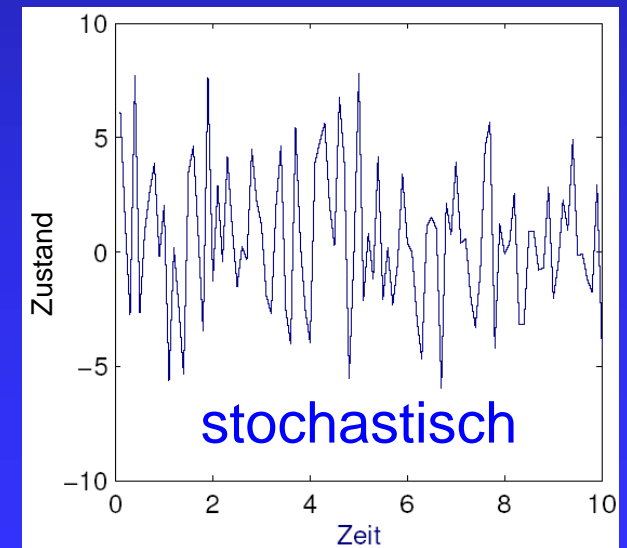
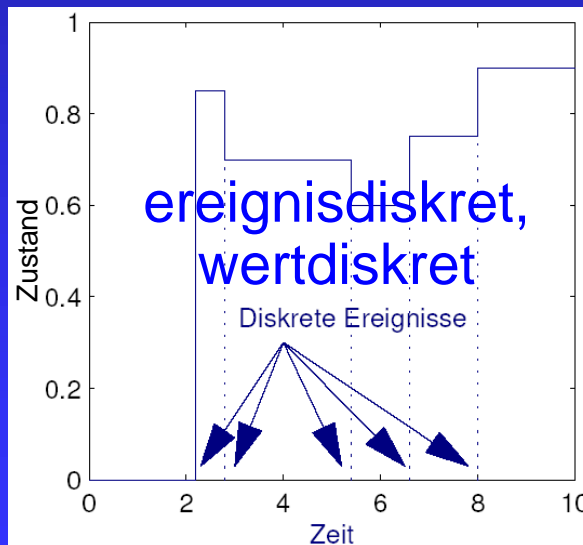
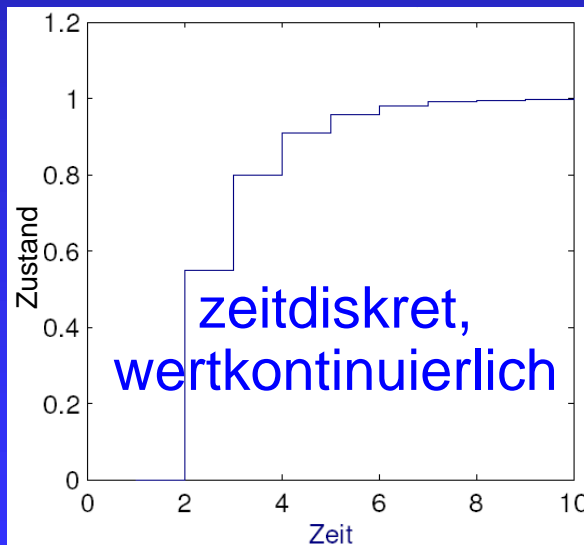
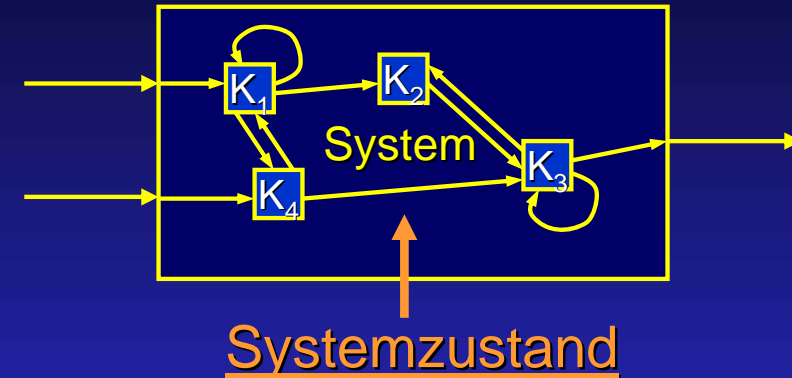
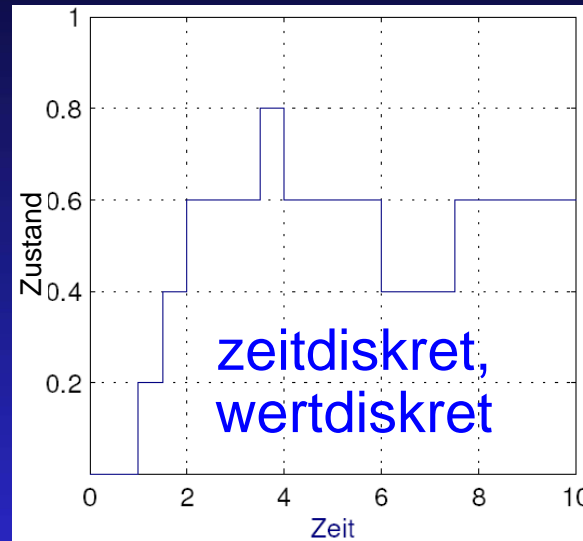
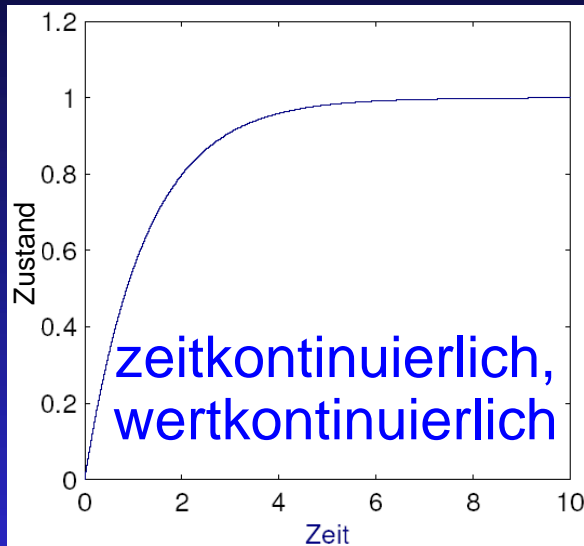
Zweck der Untersuchungen: z.B.

3. Wartezeiten und Durchsatz von Kunden

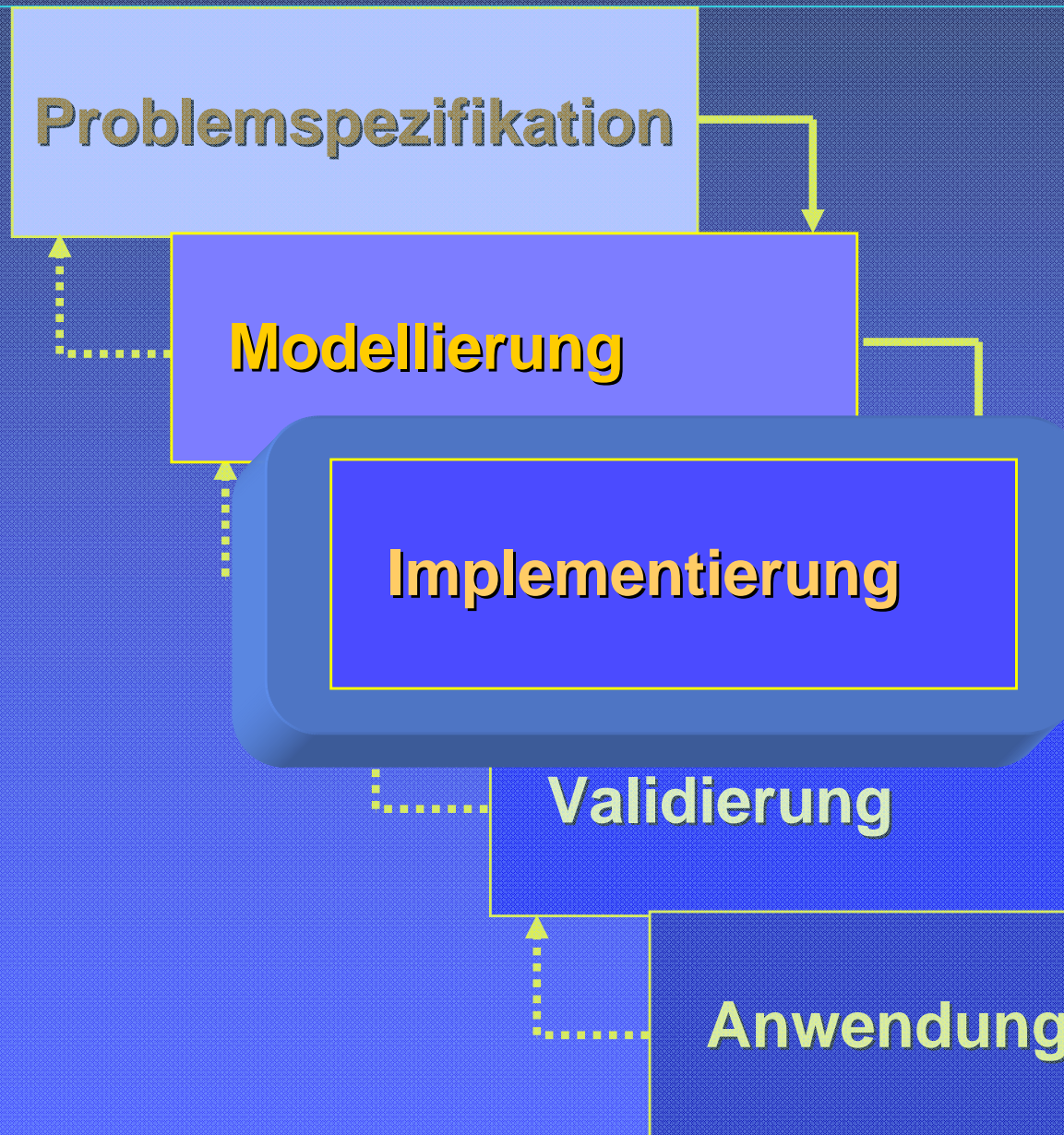


→ Die Zustandsvariablen der resultierenden Modelle ändern sich **zeitdiskret** und sind **wertkontinuierlich** oder **wertdiskret**.

# Modellklassifikation: Art der Zustandsübergänge



# Schritte einer Simulationsstudie



- Auswahl oder Entwicklung eines **Berechnungsverfahrens** (für das jeweilige Modell)
- **Programmierung** von Modell und Berechnungsverfahren
- **Visualisierung** von Berechnungsergebnissen

# Lösungsansätze für mathematische Modelle (1)

- Analytisch: Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis plus Konstruktion erfolgen formal/analytisch/direkt
  - dies ist das Optimum: keine Vereinfachungen / Näherungen
  - nur in einfachsten Spezialfällen möglich
- heuristisch: „trial & error“ gemäß bestimmter Strategie
  - nützlich vor allem bei Problemen der diskreten Optimierung
    - ◆ Bsp. Rucksack-Problem: Greedy-Heuristik wählt immer lokal beste Alternative aus (funktioniert das immer?)
    - ◆ Schwierigkeit: Konvergenz und, wenn ja, Konvergenzgeschwindigkeit?

# Lösungsansätze für mathematische Modelle (2)

- **direkt-numerisch**: numerischer Algorithmus liefert exakte Lösung (modulo Rundungsfehler)

- klarer Algorithmus, keine Heuristik mehr; Erreichen des Ziels stets sichergestellt
- Bsp.: Simplex-Algorithmus bei der linearen Optimierung

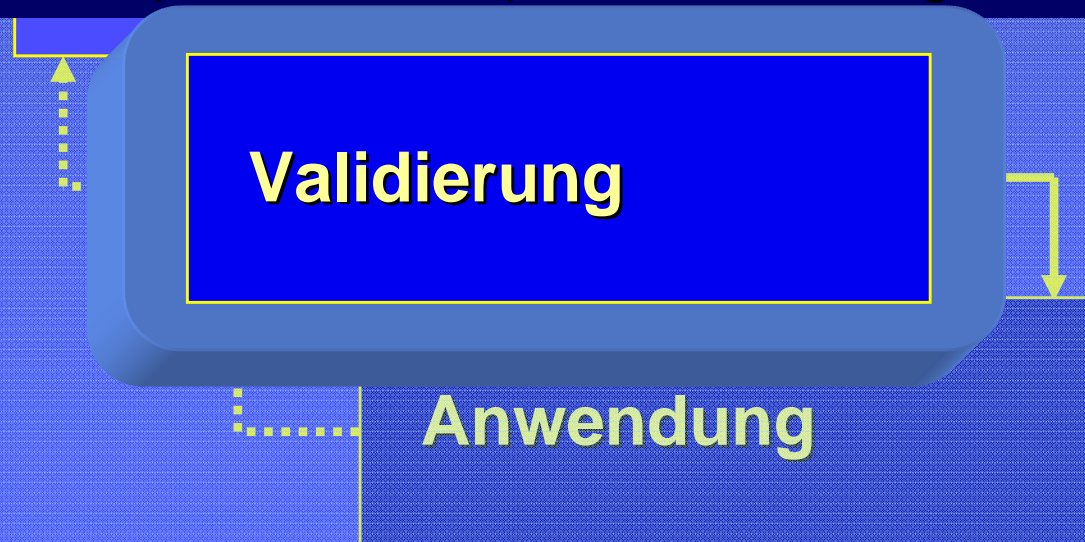
$$\max_x c^T x \quad \text{unter } Ax \leq b$$

- **approximativ-numerisch**: Iteratives Näherungsverfahren für angenäherte (diskretisierte) Beziehungen (Gleichungen)

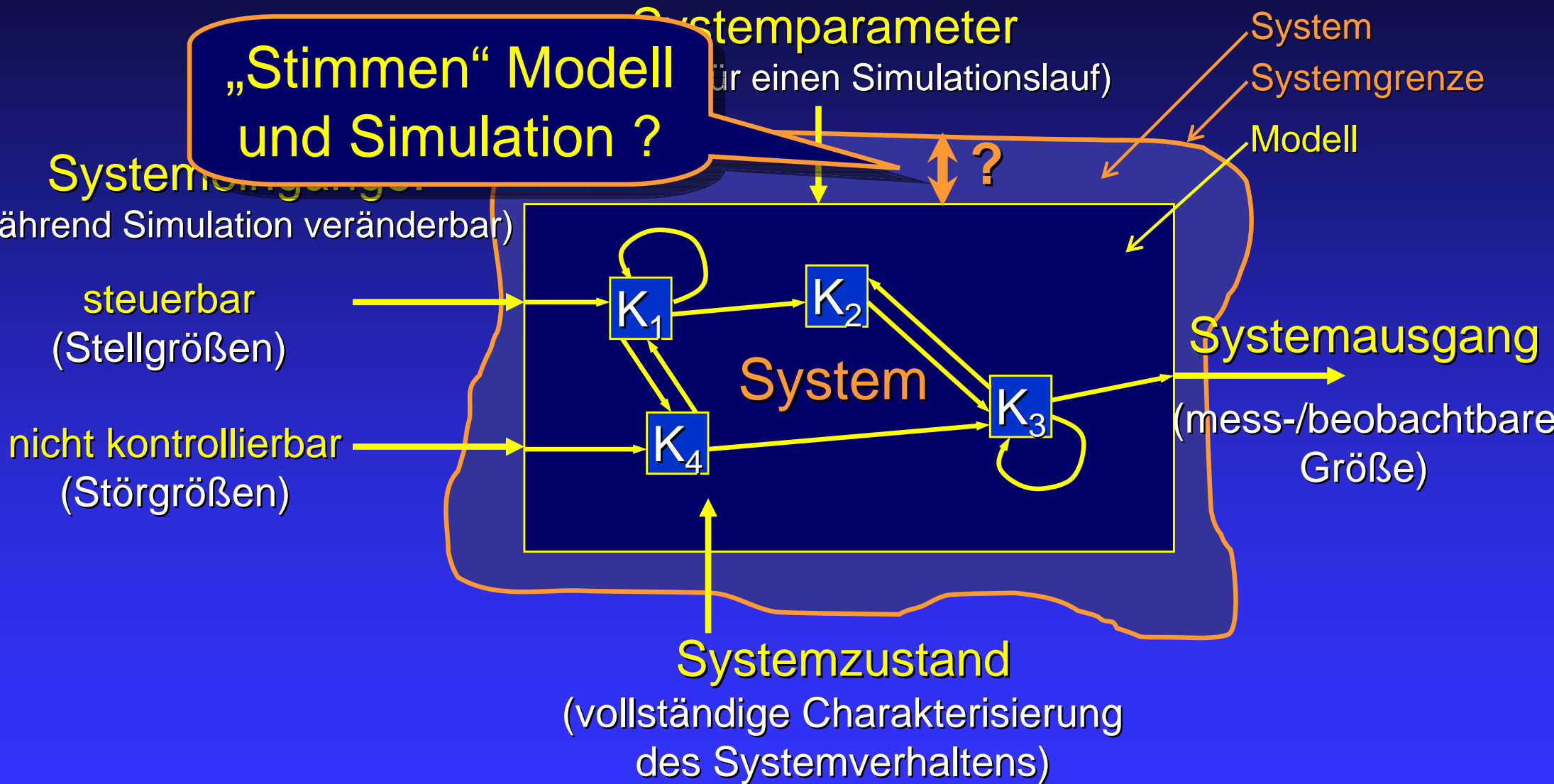
- ist **häufigster Fall!**
- Erreichen einer (beliebig genauen) Approximation sichergestellt?
- spannend: wie genau und wie schnell kommt man dort hin?
- Hauptklasse bei der **numerischen Simulation**
- Beispiele: Newton-Iterationsverfahren zur nichtlinearen Nullstellensuche, Integrationsverfahren für Differentialgleichungen (siehe Kap. 3.5,3.6 der VL)

# Schritte einer Simulationsstudie

- **Validierung** ist eine **systematische Plausibilitätsüberprüfung**, ob das Simulationsmodell die Anforderungen erfüllt. Ziel ist der **Nachweis ausreichender Glaubwürdigkeit** des Simulationsmodells im Hinblick auf die Problemspezifikation.
- Validierung reduziert die **Wahrscheinlichkeit falscher Schlussfolgerungen** aus der Simulation.
- Validierung beruht auf sorgfältig ausgewählten **Tests**. Eine exakter Korrektheitsnachweis (Verifikation) ist in der Regel **unmöglich**.



# Bewertung von Simulationen und Modellen (1)



# Bewertung von Simulationen und Modellen (2)

## Validierung: „*Stimmen Modell und Simulation?*“

Hinweis: „Validierung“  
ist nicht „Verifikation“!

- **Vergleich mit Experimenten**, z.B.
  - „1:1 Experimente“ (Windkanal, Crashtest), ...)
  - Laborexperimente an (verkleinerten) Prototypen; Problem: Skalierung sichergestellt?
- **A-posteriori Beobachtungen**:
  - Realitäts-Test (Wetter, Börse, militärische Szenarien)
  - Zufriedenheits-Test (Verkehrssteuerung, Beleuchtungsmodelle in der Computergraphik)
- **Plausibilitäts-Test**:
  - Test der Simulationsergebnisse auf Konsistenz mit bestehenden Theorien (z.B. in Physik, Mechanik)
- **Modellvergleich**:
  - Vergleich der Ergebnisse zu auf unterschiedlichen Modellen basierenden Simulationen

# Bewertung von Simulationen und Modellen (3)

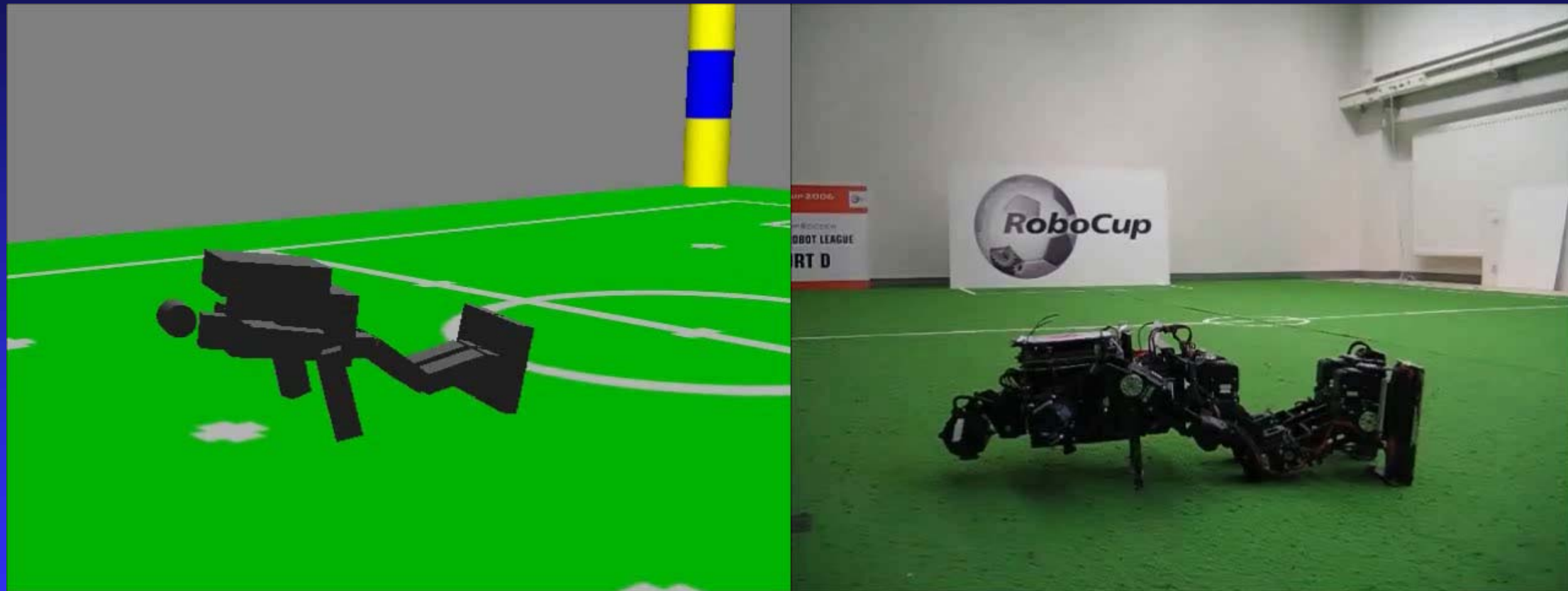
## Genauigkeit: „Wie präzise ist das Modell?“

- **Genauigkeit** im Hinblick auf die Qualität der Eingabedaten
  - z.B. bei Messdaten auf 3 Stellen genau als Eingabe kann kein Resultat auf 8 Stellen genau erwartet werden!
- **Genauigkeit** im Hinblick auf die Fragestellung:

### Beispiel: Wahl

- ◆ Frage: welche Regierung?
  - ◆ Modell erlaubt Wahlprognose mit +/- 2% Genauigkeit
  - ◆ Koalitionsaussagen: Rot-Grün und Schwarz-Gelb
  - ◆ Simulation liefert: FDP 4%, Grüne 6%, Union 45%, SPD 45%
  - ◆ keine Aussage möglich!
  - ◆ Somit taugt das verwendete Modell im Grunde genommen nicht für unsere Fragestellung!
- **Sicherheit**: worst case oder average case Aussagen?

# Vergleich: Simulation – Experiment



[www.dribblers.de](http://www.dribblers.de)

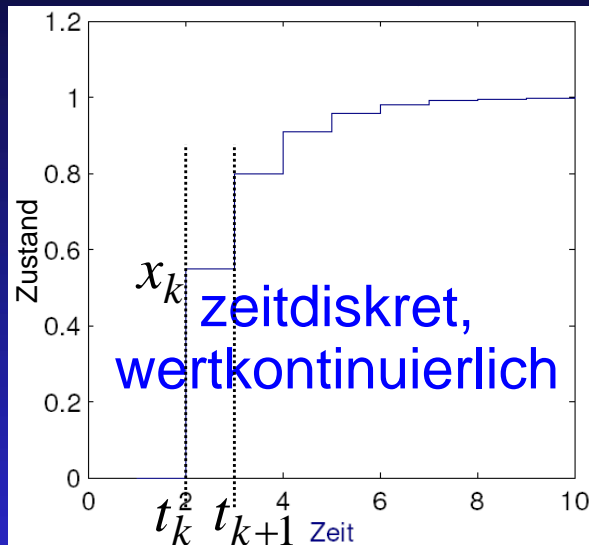
# (Voraussichtliche) Gliederung der Vorlesung

1. Einleitung
  - 1.1 Begriffsbildung
  - 1.2 Schritte einer Simulationsstudie
2. Diskrete Modellierung und Simulation
  - 2.1 Einleitung und Grundbegriffe
  - 2.2 Funktionsweise einer Discrete-Event-Simulation (DEVS)
  - 2.3 Petrinetze
  - 2.4 Endliche Zustandsautomaten
3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation
  - 3.1 Einleitung
  - 3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme
  - 3.3 Modellanalyse
    - 3.3.1 Lösbarkeit
    - 3.3.2 Gleichgewichtslösungen
    - 3.3.3 Jacobi-Matrix
    - 3.3.4 Linearisierung um die Ruhelage
    - 3.3.5 Lösung von  $\dot{x}=Ax$
    - 3.3.6 Stabilität
    - 3.3.7 Beispiel: Wettrüsten
    - 3.3.8 Zeitcharakteristik
    - 3.3.9 Steife Differentialgleichungen
    - 3.3.10 Unstetige rechte Seite
    - 3.3.11 Noch ein Beispiel: 3-Tank-System
    - 3.3.12 Linearisierung um eine Referenztrajektorie  
Beispiel: Tank mit steuerbarem Abfluss
    - 3.3.13 PD-Regelung linearer Systeme
  - 3.4 Grundlagen der numerischen Simulation
    - 3.4.1 Zahldarstellung
    - 3.4.2 Rundungsfehler
    - 3.4.3 Fortpflanzung von Rundungsfehlern
    - 3.4.4 Kondition
    - 3.4.5 Numerische Stabilität
  - 3.5 Berechnung nichtlinearer Gleichgewichtslösungen
  - 3.6 Numerische Lösung der nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichungen
    - 3.6.1 Einleitung
    - 3.6.2 Einschrittverfahren
      - 3.6.2.1 Explizites Euler-Verfahren
      - 3.6.2.2 Implizites Euler-Verfahren
      - 3.6.2.3 Heun-Verfahren
      - 3.6.2.4 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung
      - 3.6.2.5 Schrittweitensteuerung
  - 3.7 Integration von Zustands-DGLn mit Unstetigkeiten
  - 3.8 Integration steifer Zustands-DGLn
  - 3.9 Zeitkontinuierliche Simulationswerkzeuge
4. Teilschritte einer Simulationsstudie
5. Interpretation und Validierung
6. Modulare Modellbildung und Simulation komplexer Systeme]
  - 6.1 Modulare Modellbildung
  - 6.2 Numerische Integration von Zustands-DAEs
7. Physikalisch basierte Spiele

## 2. Diskrete Modellierung und Simulation

### 2.1 Einleitung und Grundbegriffe

# Modelle mit diskreter Zeit und/oder diskretem Zustand



## Zeitdiskrete Modelle:

- Zeit  $t$  diskretisiert, d.h. nur zu ausgewählten Zeiten ist die Beobachtung des Systemausgangs und/oder die Wahl des steuerbaren Systemeingangs möglich
- häufig zeitdiskretes Modell äquidistant diskretisierte Variante des zeitkontinuierlichen Modells (Kap. 3), z.B.

$$\dot{x} = f(x, u) = -x + u$$

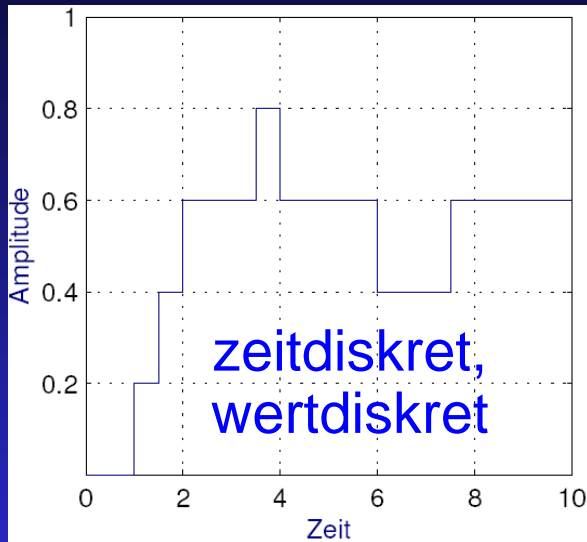
$$\text{mit } x_k = x(t_k), \quad u_k = u(t_k), \quad h_k = t_{k+1} - t_k$$

$$\text{und } \dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{h_k} = f(x_k, u_k) = -x_k + u_k$$

$$\text{folgt } x_{k+1} = F(x_k, u_k) = x_k + h_k f(x_k, u_k) = (1 - h_k)x_k + h_k u_k$$

- häufiges Vorkommen in technischen und computergesteuerten Systemen (z.B. bei Anwendungen der Regelungstechnik)
- falls Zeitachse nicht äquidistant: meist ereignis-diskrete Beschreibung bevorzugt

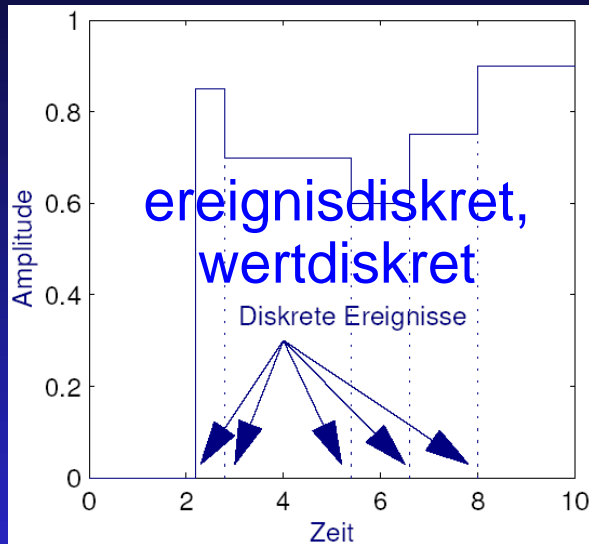
# Modelle mit diskreter Zeit und/oder diskretem Zustand



## Qualitative Modelle:

- Zeitachse „von Natur aus“ diskret
- Zeitachse nicht notwendigerweise äquidistant
- Abhängige Variable (Amplitude, Zustand) ebenfalls diskret(isiert) (wertdiskret)
- Beispiele:
  - Ampelsignale
  - Anzahl haltender Züge in einem Bahnhof
  - Stockwerke bei einer Aufzugfahrt

# Modelle mit diskreter Zeit und/oder diskretem Zustand

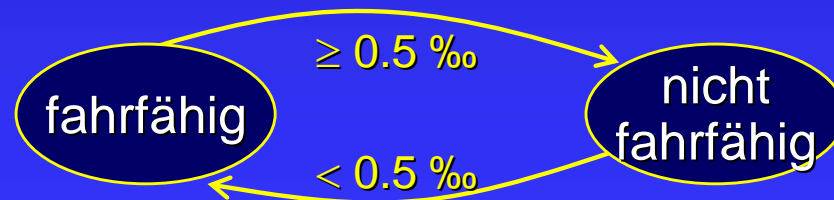


## Ereignis-diskrete Modelle:

- paradoxerweise: Zeit und Zustand im realen System häufig kontinuierlich; Modellierung des eigentlich kontinuierlichen **Übergangs eines Zustands** in einen Folgezustand als **diskretes Ereignis** (z.B. wenn nur qualitative Änderung von Interesse)
- Unterschied zu zeit- und wertkontinuierlichen Modellen: in endlicher Zeitdauer kann nur eine **endliche Anzahl von Zustandsveränderungen** auftreten

## ➤ **Beispiel:** Fahrfähigkeit im Straßenverkehr

- Fähigkeit nimmt kontinuierlich mit Blutalkoholgehalt ab
- Gesetz: Verlust der Fahrfähigkeit bei Blutalkoholgehalt  $\geq 0.5 \text{ ‰}$
- diskreter Zustandsgraph:



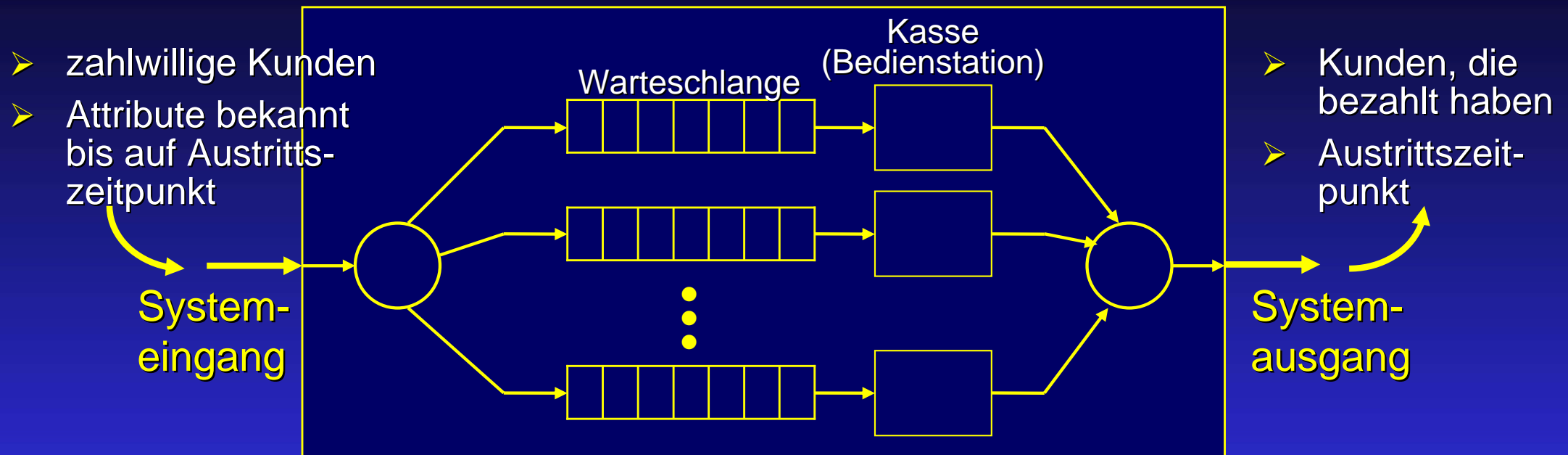
- auch gemischte ereignis-diskrete und zeit-kontinuierliche Modelle möglich

# Beispiel für ein Modell (1)

- **Aufgabe:** Berechnung der mittleren Wartezeit eines Kunden an einer Kasse im Supermarkt
- **Unwichtig:** Vorgang des Einkaufens
- **Relevante Objektklassen:**
  - Kunde
  - Kasse
  - Kassierer/in
- **Attribute der Objekte:**
  - für Kunden:
    - ◆ Wareneinkaufsliste (Anzahl der Artikel und deren Volumenklasse),
    - ◆ Eintrittszeitpunkt in das System,
    - ◆ Austrittszeitpunkt aus dem System
  - für Kassen: Zustand (geöffnet/geschlossen)
  - für Kassierer/innen: Bedienung (routiniert/langsam)



# Beispiel für ein Modell (2)



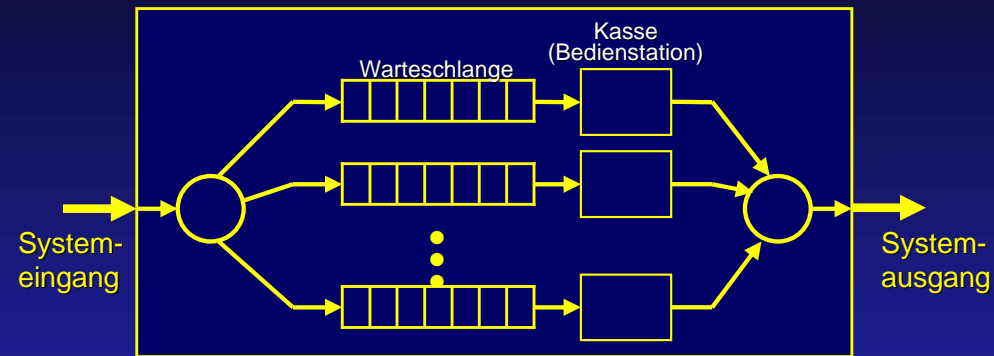
## Bestimmung der Attribute:

- Kundenattribute durch reale Messungen oder statistische Annahmen

## Systemmodell:

- Kassen und Kassierer/innen mit deren Attributen
- Zuordnung von Kassierer/in zu Kasse
- Zuordnung von Kunden zu Kasse: z.B. durch Strategien
  - Strategie 1: Kunde wählt Kasse mit aktuell kürzester Warteschlange
  - Strategie 2: Kunde wählt Kasse mit Warteschlange, bei der die Anzahl der Kunden mit mehr als 10 Artikeln minimal ist
  - 72% der Kunden wählen Strategie 1, Rest wählt Strategie 2

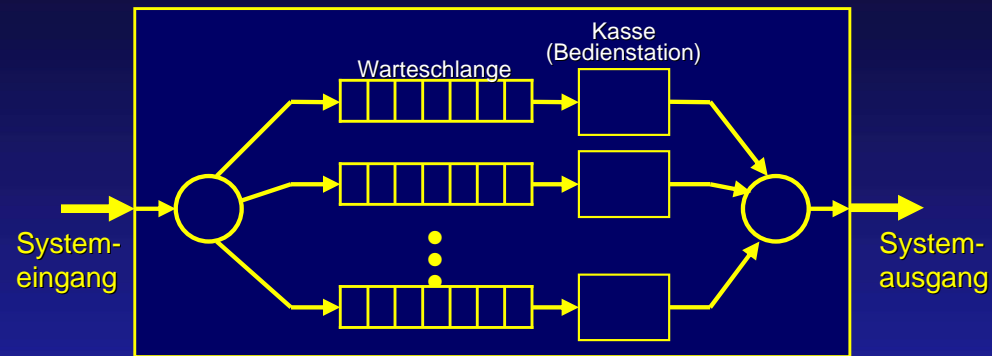
# Beispiel für ein Modell (3)



## Mögliche, relevante und noch unberücksichtigte Einflüsse:

- Wechseln Kunden häufig die Warteschlange, wenn es an anderer Stelle doch schneller geht? Strategie?
- Verlassen Kunden häufig die Warteschlange, da Waren vergessen wurden?
- Kommen häufig Umordnungen der Warteschlangen durch Öffnen und Schließen von Kassen vor? Strategie?
- Stehen Männer bevorzugt bei blonden Kassiererinnen an, auch wenn dort die Warteschlange etwas länger ist?
- Kennen manche Kund(inn)en die routinierten Kassierer(innen) und stellen sich dort an, auch wenn die Warteschlange „etwas länger“ ist?

# Beispiel für ein Modell (4)



## Modellparameter:

- Ankunftsverhalten von Kunden
- Abfertigungs/Bedienungsverhalten der Kassierer/innen
- Bedienstrategien (z.B. FIFO, LIFO, Prioritäten, unterschiedl. Kundenklassen)
- Anzahl der Bedienplätze (z.B. Anzahl besetzter Kassen)

## Mögliche Bewertungsgrößen:

- Verweilzeit der Kunden (z.B. als Mittelwert, Varianz, W-Verteilung)
- Wartezeit der Kunden an verschiedenen Bedienplätzen
- Durchsatz des Systems „Supermarkt“ (in Kunden pro Zeiteinheit)
- Auslastung einer Systemkomponente (z.B. Kassierer)
- Füllung des Systems (Anzahl von Kunden) oder von Systemkomponenten (Kassen oder – bei Erweiterung – Käseabteilung etc.)