Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Dipl.-Math. Pavol Safarik

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

03-07.06.2010

Mathematik II für Inf und WInf

8. Übung

Gruppenübung

G 28 (Partiell aber nicht total differenzierbar)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$.

Zeige: f ist stetig und partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

G 29 (Partielle Differenzierbarkeit)
Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeige, dass F im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.
b) Zeige, dass F überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber gilt $(D_2D_1F)(0, 0) \neq (D_1D_2F)(0, 0)$.

G 30 (Kettenregel)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \cos(xy) \quad \text{und} \quad g(x, y) = e^{x-y}$$

und die Koordinatentransformation

$$\tilde{x}(u, v) = 2u - v \quad \text{und} \quad \tilde{y}(u, v) = 2u + v.$$

Bestimmen Sie für

$$\tilde{f}(u, v) = f(\tilde{x}(u, v), \tilde{y}(u, v)) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(u, v) = g(\tilde{x}(u, v), \tilde{y}(u, v))$$

mit $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel.

Hausübung

H 28 (Differenzierbarkeit)

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = xy^2 + x^3e^{x-2y}.$$

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 2. Ordnung.
Ist f total differenzierbar?
Warum gilt $f_{xy}(x, y) - f_{yx}(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

2. Betrachten Sie die Funktion $g(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y}$.
   Geben Sie zunächst den Definitionsbereich von g an. Bestimmen Sie anschließend alle partiellen Ableitungen von g bis einschließlich 2. Ordnung.

H 29 (Differenzierbarkeit)

Vorbemerkung: Wenn nur $||\cdot||$ da steht, ist im Allgemeinen die euklidische Norm $||\cdot||_2$ gemeint!

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := g(||x||)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeige: f ist genau dann im Nullpunkt differenzierbar, wenn $g'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist f stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

H 30 (Kettenregel)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - y^3.$$

Die Darstellung dieser Funktion in Polarkoordinaten

$$\tilde{x}(r,\varphi) = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{y}(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$$

lautet

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(\tilde{x}(r,\varphi), \tilde{y}(r,\varphi))$$

mit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$ mittels der Kettenregel.