



## 4. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Wiederholung: injektiv und surjektiv)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : A \rightarrow B : x \mapsto \sin(x),$$

mit  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

Wählen Sie die Mengen  $A$  und  $B$  so, dass

- (a)  $f$  injektiv aber nicht surjektiv,
- (b)  $f$  surjektiv aber nicht injektiv,
- (c)  $f$  bijektiv ist.

#### Aufgabe G2 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = -2 + i, \quad z_3 = 7 - i.$$

- (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von  $z_1, z_2, z_3$ .
- (b) Berechnen Sie  $z_1 + z_3, z_1 - z_2, \overline{z_2}, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$  und  $|z_1|$ .

#### Aufgabe G3 (Assoziativ- und Distributivgesetz für komplexe Zahlen)

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation sowie das Distributivgesetz für komplexe Zahlen, das heißt zeigen Sie, dass

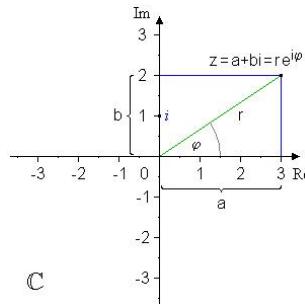
- (a)  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ ,
- (b)  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ .

#### Aufgabe G4 (Polardarstellung)

Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  mit  $a = r \cos \varphi$  und  $b = r \sin \varphi$ . Mithilfe Eulers Formel bekommen wir die Polardarstellung von  $z$  als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

$$\text{mit } r = |z| \text{ und } \varphi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{falls } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{falls } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & \text{falls } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } a = 0, b \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}.$$



- (a) Machen Sie sich die verschiedenen Fälle für  $\varphi$  zeichnerisch klar.
- (b) Seien nun  $z_1 = 2i$  und  $z_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}} + i\frac{4}{\sqrt{2}}$ .  
Bestimmen Sie die Polardarstellungen von  $z_1$  und  $z_2$ .
- (c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus a) die Polardarstellungen von  $z_3 = z_1 z_2$  und  $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$ .  
Hinweis: Benutzen Sie die Schreibweise mit der Exponentialfunktion.
- (d) Geben Sie  $z_3$  und  $z_4$  in der Form  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  an.
- (e) Zeichnen Sie  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_4$  in eine komplexe Ebene ein und interpretieren Sie die Multiplikation mit  $z_2$  und die Division mit  $z_2$  geometrisch.

### Aufgabe G5 (Folgen)

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- (a) Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n^3+n+2}{6n^7+5n^4+n^2+1}$ .
- (b) Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = \frac{n^3+n+2}{n^2+1}$ .

## Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

### Aufgabe H1 (Komposition von Funktionen)

(1+2 Punkte)

- (a) Finden Sie zwei Abbildungen  $f_1 \neq f_2$ , sodass  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$  gilt. Gilt diese Aussage für alle Abbildungen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Betrachten Sie die Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : C \rightarrow D$  mit  $D \subseteq A$ .
- Angenommen  $f$  und  $g$  seien injektiv.  
Ist dann die Komposition  $f \circ g : C \rightarrow B$  auch injektiv?
  - Angenommen  $f$  und  $g$  seien surjektiv.  
Ist dann die Komposition  $f \circ g : C \rightarrow B$  auch surjektiv?
- Begründen Sie Ihre Antworten.

### Aufgabe H2 (Eulersche Formel)

(1+3 Punkte)

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Sie haben in der Vorlesung die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

kennengelernt. Es ist also  $\cos(x) = \Re(e^{ix})$  und  $\sin(x) = \Im(e^{ix})$ .

- (a) Zeigen Sie mithilfe der Formel, dass  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Benutzen Sie, dass  $\cos(-x) = \cos(x)$  und  $\sin(-x) = \sin(x)$ .

- (b) Benutzen Sie Eulers Formel, um folgende (teilweise schon bekannte) Gleichungen herzuleiten:
- (i)  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ,  $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ,
  - (ii)  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ ,
  - (iii)  $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ ,  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ .

**Aufgabe H3** (Folgen)

(1+1+1 Punkte)

- (a) Finden Sie eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die beschränkt ist, aber nicht konvergiert.
- (b) Finden Sie zwei Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die beide divergieren, aber deren Summe  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- (c) Finden Sie eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die beschränkt ist, weder monoton fallend noch monoton steigend ist, aber konvergiert.