Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sven Herrmann
Dipl.-Math. Susanne Pape

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010
17./18. November 2009

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik I für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wiederholung: Folgen und die Eulersche Zahl)
Sie haben in der Vorlesung die Eulersche Zahl

$$e := \exp(1) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

kennengelernt. Berechnen Sie nun mit Hilfe der Konvergenzsätze (Satz II.1.9) die Grenzwerte der nachstehenden Folgen.

$$\text{(i)}\quad a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{(ii)}\quad b_n = \left(1 + \tfrac{1}{n+1}\right)^n \qquad \text{(iii)}\quad c_n = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n$$

Aufgabe G2 (Horner-Schema)

(a) Bestimmen Sie mittels Koeffizientenvergleichs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist:

$$\alpha_1 x^3 + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = (\alpha_4 + \alpha_2)x^3 - (\alpha_3 + 6)x^2 - x - \alpha_2 + 2.$$

(b) Gegeben sei das Polynom

$$P(x) = \alpha_1 x^3 + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4$$

mit den für $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ bestimmten Werten aus Teil (a).

(i) Weisen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas nach, dass $x = -1$ eine Nullstelle des Polynoms ist.

(ii) Lesen Sie aus dem Horner-Schema in Aufgabenteil (a) das Polynom Q mit $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$ ab.

(iii) Berechnen Sie die Nullstellen des quadratischen Polynoms Q mit Hilfe der p-q-Formel.

(iv) Überprüfen Sie ihre Rechnung, indem Sie nachweisen, dass für die Nullstellen x_0, x_1 und x_2 des Polynoms P gilt $P(x) = 2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Aufgabe G3 (Interpolationspolynom)

(a) Es seien folgende Daten gegeben:

(i) Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ das Interpolationspolynom höchstens 3. Grades, das durch diese Punkte geht.

k	0	1	2	3
x_k	-4	-2	0	2
y_k	-1	1	3	a

(ii) Geben Sie das Interpolationspolynom höchstens 2. Grades an, das durch die ersten drei Stützstellen geht.
Geben Sie nun ein Polynom genau 20. Grades an, das durch die ersten drei Stützstellen geht.

Bemerkung: Das soll Ihnen klar machen, dass man sehr viele Polynome bestimmen kann, die durch ein gewisse Anzahl von Punkten geht. Das richtige Polynom kann es ohne weitere Voraussetzungen in dem Sinne nicht geben.

(b) Sei $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ mit $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie nun, dass für zwei Polynome $g(x)$ und $f(x)$ vom Grad n mit $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall i : f(x_i) = g(x_i) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x)\,.$$

Hausübung

(In der nächsten Übung abzugeben.)

Aufgabe H1 (Funktionen) ($1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Punkte)

(a) Seien $f(x) := ax^2 + bx + c$ sowie $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie mittels Koeffizientenvergleich die reelen Zahlen $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ in Abhängigkeit von a, b, c, x_0, so dass

$$f(x) = \hat{a}(x - x_0)^2 + \hat{b}(x - x_0) + \hat{c}$$

(b) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion.
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $f \circ g$, $g \circ h$ und $f \circ g \circ h$.

Aufgabe H2 (Rationale Funktion) (2+2 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{(x+3)^2(5x^2 - 4x - 1)}{(x^2 - 9)(x - 1)}\,.$$

Bestimmen Sie die maximale Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, sodass f mit dieser Formel definiert werden kann, und bestimmen Sie die Null- und Polstellen von f und ihre Vielfachheit.

(b) Kürzen Sie eventuell gemeinsame Faktoren und bestimmen Sie schließlich mit Hilfe des Horner-Schemas die Darstellung von f als

$$f(x) = f_1(x) + \frac{r_1}{(x - x_0)}\,.$$

Tipp: Wenden Sie das Hornerschema für eine Polstelle von $f(x)$ in geeigneter Weise an.

Aufgabe H3 (Gerade und ungerade Funktionen) (3 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $f(x) = f(-x)$ ist, und ungerade, falls $f(x) = -f(-x)$ ist. Wir betrachten ein Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann gerade ist, wenn $a_k = 0$ für jedes ungerade k, sowie, dass f genau dann ungerade ist, wenn $a_k = 0$ für jedes gerade k.