

Blatt 13 - Probeklausur

Prüfungsfach: Einführung in Computational Engineering

Grundlagen der Modellierung und Simulation

Nachname: .....

Vorname: .....

Matrikel-Nr.: .....

Studiengang: .....

Beginn (Uhrzeit): .....

Dauer: 70 Minuten

Hörsaal: C205

Datum: 07.02.2011

Bemerkungen: .....

.....

Note:		
Aufgabe (Punkte)	Korrektur	Unterschrift
1 (15)		
2 (4)		
3 (3)		
4 (13)		
5 (8)		
6 (5,5)		
7 (11,5)		
8 (5)		
9 (14)		
Summe (79)		

\_\_\_\_\_  
Unterschrift

Die insgesamt zu vergebende Punktezahl beträgt **79** Punkte.  
Zum Bestehen (Note 4.0) reichen **32** Punkte aus.  
Zum Erreichen der Note 1.0 sind maximal **64** Punkte notwendig.

Bitte beachten Sie die folgenden Punkte:

- Die Bearbeitungszeit für diese Probeklausur beträgt 70 Minuten.
- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus. Tragen Sie auf allen Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Dieses Aufgabenheft umfaßt **12** nummerierte Seiten mit Aufgaben. Trennen Sie die Prüfungsbögen nicht auf.
- Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Papier.
- Lesen Sie die Fragen vor der Beantwortung sorgfältig und in Ruhe durch und beantworten Sie sie genau. Bearbeiten Sie die Aufgaben in für Sie günstiger Reihenfolge.
- Kommentieren Sie alle Ihre Ergebnisse bzw. Rechenschritte **kurz** und **stichwortartig**.
- Als Hilfsmittel zur Klausur sind ein beidseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4, eine mathematische Formelsammlung (z.B. Bronstein) und bei Bedarf ein Wörterbuch für Deutsch als Fremdsprache erlaubt.
- Schreiben Sie nur mit Kugelschreiber (blau oder schwarz) und nicht mit rotem oder grünem Stift oder Bleistift.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon, PDA, o.ä. aus!
- Geben Sie beim Verlassen des Hörsaals alle Prüfungsunterlagen bei der Aufsicht ab.

*Viel Erfolg!*

---

Der Fachbereich Informatik misst der Einhaltung der Grundregeln der wissenschaftlichen Ethik großen Wert bei. Mit der Abgabe einer Lösung (Hausaufgabe, Programmierprojekt, Diplomarbeit etc.) bestätigen Sie, dass Sie/Ihre Gruppe die alleinigen Autoren des gesamten Materials sind. Falls ihnen die Verwendung von Fremdmaterial gestattet war, so müssen Sie dessen Quellen deutlich zitiert haben. Weiterführende Informationen finden Sie unter: <http://www.informatik.tu-darmstadt.de/Plagiarismus>.

---

1. Allgemeine Fragen (15 Punkte)

---

**Hinweis:** Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, jede falsche Antwort führt zu einem Punkt Abzug. Nicht beantwortete Fragen geben weder Punkte noch führen sie zu Punktabzug. Falls Sie in dieser Aufgabe weniger positive Punkte als negative Punkte sammeln, so wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet, es werden also keine negativen Punkte als Gesamtbewertung dieser Aufgabe vergeben.

- |                                  |                                 |  |
|----------------------------------|---------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Sowohl die Systemparameter als auch der Systemzustand eines Systemmodells ändern sich während eines Simulationslaufs.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Die Genauigkeit einer Simulation ist unabhängig von den Eingabedaten.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Zu jedem Petrinetz gibt es genau eine Inzidenzmatrix.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Zu jeder Inzidenzmatrix $W = W^+ - W^-$ lässt sich genau ein dazugehöriges Petrinetz angeben.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Beim rechnergestützten symbolischen Differenzieren treten keine Approximationsfehler auf.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Sowohl $x = 0.5 \cdot \tan x$ als auch $x = \arctan(2x)$ sind mögliche Fixpunktgleichungen zur Lösung von $2x - \tan x = 0$ .  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens kann man daran erkennen, dass sich die Anzahl der korrekten Ziffern in der berechneten Näherung pro Iterationsschritt ungefähr verdoppelt.   |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Jedes nicht autonome Differentialgleichungssystem kann auf ein autonomes Differentialgleichungssystem ohne Änderung der Problemdimension transformiert werden.   |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Die Lipschitz-Konstante einer eindeutig lösbaren Differentialgleichung kann vom Anfangswert abhängig sein.   |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Es ist immer möglich, um die Ruhelage einer Differentialgleichung zu linearisieren und so die Stabilität der Ruhelage zu untersuchen.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Das Integrationsverfahren nach Heun löst Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten auch ohne explizite Schaltfunktion.  |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Steife Komponenten von Differentialgleichungen sorgen in Bereichen, in denen sie kaum zur Lösung beitragen, für kleine Schritte.   |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Bei einer Linearisierung $\dot{x} = A \cdot x$ um eine Gleichgewichtslage lässt sich stets alleine anhand des Realteils $\operatorname{Re}(\lambda_i)$ der Eigenwerte $\lambda_i$ von $A$ entscheiden, ob die Gleichgewichtslage stabil ist. |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Jede reelle Zahl zwischen 1 und 10 kann im IEEE 754-Zahlformat dargestellt werden.   |
| <input type="checkbox"/> richtig | <input type="checkbox"/> falsch | Konditionszahlen numerischer Probleme hängen immer auch vom jeweiligen Lösungsalgorithmus ab.  |

**2. Grundbegriffe zur Modellierung und Simulation (4 Punkte)**

---

- (a) Was ist ein Modell? Geben Sie eine allgemein gültige Definition an.

**Antwort:** (1 Punkt)

- (b) Nennen Sie zwei wesentlichen Fehlerquellen, die im Rahmen der Validierung einer Simulationsstudie untersucht werden müssen.

**Antwort:** (1 Punkt)

- (c) Welche Möglichkeiten zur Klassifikation von Modellen anhand der Beschreibung i.) des Zustandsverlaufs und ii.) des zeitlichen Verlaufs kennen Sie?

**Antwort:** (1 Punkt)

- (d) Nennen Sie mindestens 2 Ursachen in dynamischen Systemen, die zu Unstetigkeiten im Verlauf der Zustände führen können.

**Antwort:** (1 Punkt)

---

**3. Räuber–Beute–Modell: Modellierung (3 Punkte)**

---

Es werde eine Räuberpopulation  $R(t)$  und eine Beutepopulation  $B(t)$  betrachtet. Die Populationen entwickeln sich entsprechend folgender Vorgaben

- Die Anzahl der Geburten der Räuber je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Räuber. Im zu betrachtenden Zeitrahmen kann das Absterben von Räubern vernachlässigt werden.
- Die Anzahl der Geburten und der Todesfälle der Beute je Zeiteinheit ist proportional zur Anzahl der Beutetiere.
- Der Zuwachs der Räuberpopulation je Zeiteinheit durch die Jagd von Beute ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.
- Die Abnahme der Beutepopulation je Zeiteinheit durch die Jagd der Räuber ist proportional zur Anzahl von Beute und von Räubern.

Stellen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen (Bilanzgleichungen) für die zeitliche Entwicklung der Räuber- und Beutepopulation auf. Wählen Sie geeignete Bezeichnungen für Geburts-, Sterbe- und Wachstumsraten.

**Antwort:** (3 Punkte)

---

**4. Räuber–Beute–Modell: Analyse und Numerik (13 Punkte)**

---

Seien  $0 < d < 1$  und  $a > 0$  zwei reelle Parameter. Ein modifiziertes Räuber–Beute–Modell (nicht das in der vorherigen Aufgabe gesuchte!) sei gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{R}(t) &= R(t)(-d + B(t)), \\ \dot{B}(t) &= B(t)(a - R(t) - aB(t)).\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie den positiven Gleichgewichtspunkt  $(R^*, B^*)$  des Differentialgleichungssystems. (Hinweis: Dieser hängt noch von den Parametern  $a$  und  $d$  ab.)

**Antwort:** (2 Punkte)

- (b) Wenn  $a = 1$  gilt, dann ergibt sich als positiver Gleichgewichtspunkt  $(R^*, B^*) = (1 - d, d)$ .  
Geben Sie die Jacobimatrix  $J(R^*, B^*)$  des Differentialgleichungssystems, ausgewertet in diesem Gleichgewichtspunkt, an.

**Antwort:** (2 Punkte)

- (c) Sei weiterhin  $a = 1$ . Ist die zugehörige positive Gleichgewichtslage stabil für alle  $d \in (0, 1)$ ?

**Antwort:** (3 Punkte)

- (d) Geben Sie die Verfahrensvorschrift für ein Verfahren zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingung an. Führen Sie mit diesem Verfahren einen Schritt mit Schrittweite  $\Delta t = 1$  für das Differentialgleichungssystem mit den Anfangswerten  $R(0) = 1$ ,  $B(0) = \frac{1}{4}$  und Parametern  $a = 1$ ,  $d = \frac{1}{2}$  aus.

**Antwort:** (3 Punkte)

- (e) Sie wollen mit einem Programmsystem (z.B. Matlab) ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung numerisch lösen. Welche Daten/Informationen müssen Sie der Zeitintegrationsroutine zur Verfügung stellen, damit diese Ihnen eine numerische Lösung berechnen kann.

**Antwort:** (3 Punkte)

### 5. Modellierung mit Petrinetzen (8 Punkte)

(a) Ein System mit den Zuständen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  gehorche folgenden Regeln:

- Der Zustand  $B$  kann eintreten, genau dann wenn vorher der Zustand  $A$  aktiv war.
- Der Zustand  $D$  kann eintreten, genau dann wenn vorher die Zustände  $B$  und  $C$  aktiv waren.
- Die Zustände  $A$  und  $C$  können eintreten, genau dann wenn vorher der Zustand  $D$  aktiv war.

Zeichnen Sie ein Petrinetz, welches genau diese Regeln widerspiegelt.

**Antwort:** (3 Punkte)

(b) Geben Sie zwei mögliche Anfangsmakierungsvektoren an, so dass dieses Petrinetz lebendig ist.

**Antwort:** (1 Punkt)

(c) Zeichnen sie das zu folgender Inzidenzmatrix gehörige Petrinetz, wobei die Kapazität der jeweiligen Plätze gleich 1 sein soll. Beschriften Sie dabei in Ihrer Skizze alle Plätze und Transitionen.

$$\begin{array}{c}
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3 \\
 P_4 \\
 P_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\
 1 & 0 & 1 & -1 \\
 -1 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & -1 & 1
 \end{pmatrix}$$

**Antwort:** (3 Punkte)



- (d) Welche Transitionen können im Petrinetz aus Teilaufgabe (c) geschaltet werden, wenn der aktuelle Systemzustand durch den Markierungsvektor  $m = (1, 1, 0, 1, 0)^T$  beschrieben ist?

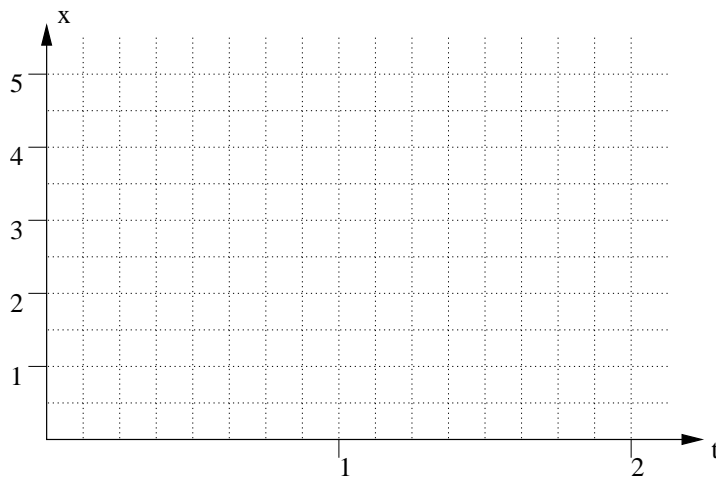
**Antwort:** (1 Punkt)

## 6. Differentialgleichungen: Richtungsfelder und Autonomisierung (5,5 Punkte)

Skizzieren Sie zu den Differentialgleichungen in (a) und (b) die Richtungsfelder und beschriften Sie Ihre Zeichnung. Zeichnen Sie sodann die Lösung für den angegebenen Startwert ein. Eine Rechnung ist dabei nicht erforderlich.

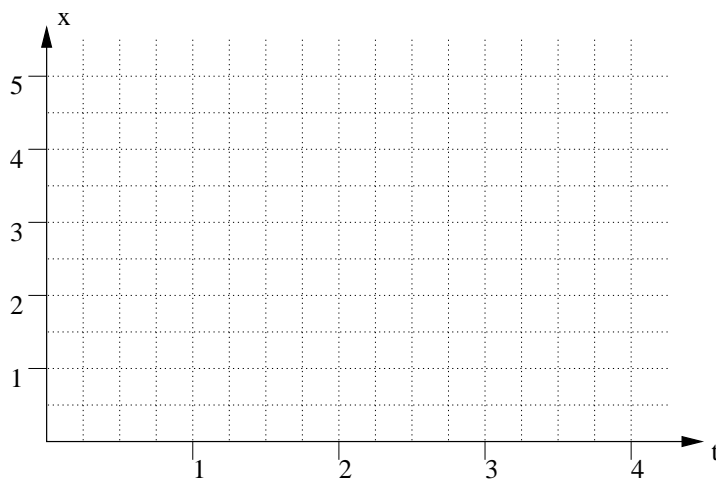
- (a)  $\dot{x}(t) = x(t) \sin(t), x(0) = 1$

**Antwort:** (2 Punkte)



- (b)  $\dot{x}(t) = t \cdot x(t), x(0) = 1$

**Antwort:** (2 Punkte)



- (c) Transformieren Sie die Differentialgleichung aus Aufgabe (b) in ein autonomes Differentialgleichungssystem.

**Antwort:** (1.5 Punkte)

---

### 7. Lösen von Gleichungssystemen (11.5 Punkte)

---

Für die Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 \\ \sin(x_1) + 0.5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

soll der Vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  so bestimmt werden, dass  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0, 0)^T$  gilt.

- (a) Das gestellte Problem lässt sich mit dem Fixpunkt-Verfahren lösen. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des Fixpunkt-Verfahrens.

**Antwort:** (3 Punkte)

- (b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das gestellte Problem mit dem Fixpunkt-Verfahren auf.

**Antwort:** (2 Punkte)

- (c) Die Konvergenz-Eigenschaft des Fixpunkt-Verfahrens kann mit Hilfe eines zusätzlichen Faktors verbessert werden. Benennen Sie diesen und begründen Sie die Verbesserungseigenschaft.

**Antwort:** (2 Punkte)

- (d) Beschreiben Sie in wenigen Stichpunkten ein in der Vorlesung beschriebenes spezielles Fixpunkt-Verfahren zur Lösung sowie je zwei Vor- oder Nachteile gegenüber dem allgemeinen Fixpunkt-Verfahren.

**Antwort:** (3 Punkte)

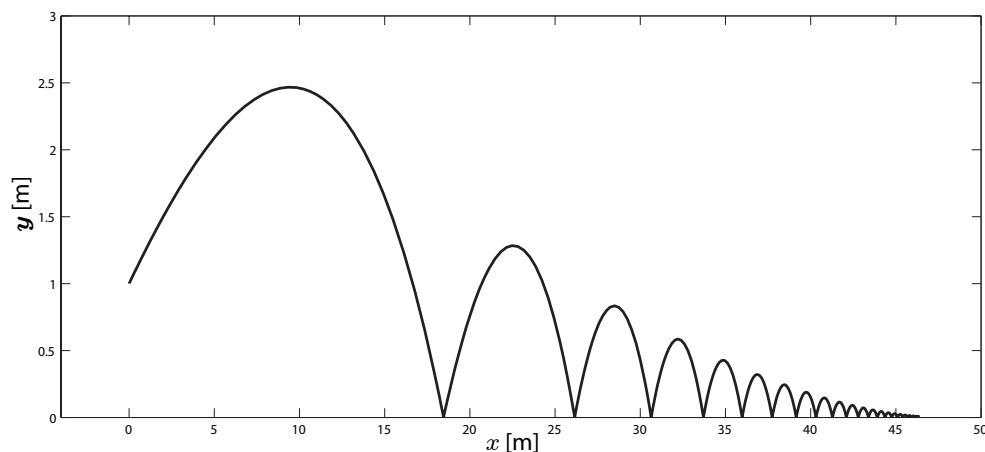
- (e) In die Berechnung des bekannten Verfahrens aus (7d) geht die Jacobi-Matrix ein. Nennen Sie 3 Möglichkeiten, die den Aufwand zur Berechnung der Jacobi-Matrix reduzieren können.

**Antwort:** (1.5 Punkte)

### 8. Differentialgleichungen mit Unstetigkeiten (5 Punkte)

Wenn wir versuchen, einen abgeworfenen und danach wiederholt auf dem Boden auftreffenden Ball zu simulieren, stoßen wir schnell auf das Problem von Schaltpunkten, an denen sich das Systemverhalten unstetig ändert. An solchen Punkten würden numerische Standardverfahren alleine falsche Ergebnisse liefern.

Die Bahn eines Balles (mit leichter Dämpfung bei der Reflexion an der Ebene) ist in folgender Skizze veranschaulicht.



- (a) Wie können Unstetigkeitsstellen (Schaltpunkte) in einem Differentialgleichungsmodell mit Hilfe von Schaltfunktionen geeignet charakterisiert werden?

**Antwort:** (1 Punkt)

- (b) Wann (in welchem Zustand) treten Schaltpunkte im obigen Modell der Bewegung des Balls auf und welche Zustandsgrößen ändern sich an diesen sowie welche bleiben unverändert?

**Antwort:** (3 Punkte)

- (c) Geben Sie eine Schaltfunktion  $q(x, y)$  an, die die Unstetigkeitsstellen in der Bewegung des Balls bestimmt.

**Antwort:** (1 Punkt)

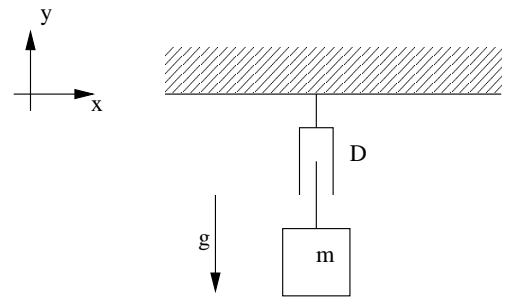
## 9. Modulare Modellbildung: Mechanik (14 Punkte)

- (a) Geben Sie die vier Regeln für die automatische Generierung von Modellgleichungen mittels modularer Modellbildung an.


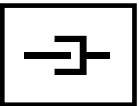
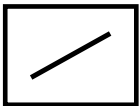
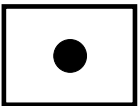

**Antwort:** (2 Punkte)

Wir betrachten nun folgendes System:

Eine Masse  $M$  ist der Erdanziehungskraft ausgesetzt und hängt an einem Ende eines Dämpfungselements  $S$ , dessen anderes Ende im Koordinatenursprung fixiert ist, siehe nebenstehende Skizze. Der freie Fall von  $M$  wird also gedämpft. Wir nehmen an, dass sich  $M$  nur in  $y$ -Richtung bewegen kann.



Die wichtigsten Module der Mechanik und deren Gesetze sind in untenstehender Übersicht enthalten:

Modul	Feder	Dämpfer	Stab	Punktmasse	Bezugssystem
					
Gesetze	$F_1 - F_2$ $= C(x_1 - x_2)$ $G_1 - G_2$ $= C(y_1 - y_2)$	$\dot{x}_1 = v_1, \dot{y}_1 = w_1$ $\dot{x}_2 = v_2, \dot{y}_2 = w_2$ $F_1 - F_2 = D(v_1 - v_2)$ $G_1 - G_2 = D(w_1 - w_2)$	$x_2 - x_1 = l \cos(\phi)$ $y_2 - y_1 = l \sin(\phi)$ $F_2 - F_1 = f \cos(\phi)$ $G_2 - G_1 = f \sin(\phi)$	$\dot{x} = v$ $\dot{y} = w$ $F = m\dot{v}$ $G - mg = m\dot{w}$	$x = 0$ $y = 0$ $F = 0$ $G = 0$

- (b) Skizzieren Sie für dieses System die Module und deren Verknüpfung.

**Antwort:** (3 Punkte)

- (c) Stellen Sie entsprechend der modularen Modellbildung die nicht vereinfachten Gleichungen auf, die das gegebene System beschreiben. Beachten Sie: Da eine Bewegung nur in  $y$ -Richtung stattfindet, brauchen die Gleichungen in  $x$ -Richtung nicht angegeben werden.

**Antwort:** (5 Punkte)

- (d) Vereinfachen Sie das System von Gleichungen aus Aufgabenteil (c), so dass nur eine Differentialgleichung für die Position  $y$  der Masse  $M$  übrigbleibt.

**Antwort:** (4 Punkte)