Syntax und Semantik von Programmen 4

Modul 8 (v1.1)

Kanonikvorlesung: Foundations of Computing

Heiko Mantel

MAIS, TU Darmstadt, WS11/12

Motivation

Wie spezifiziert man eine operationelle Semantik?

- Welche Freiheitsgrade gibt es?
- Wie kann man die Freiheitsgrade ausgestalten?
- Wie vergleicht man Alternativen in der Ausgestaltung?

Was spezifiziert der Kalkül einer operationellen Semantik?

- unsere Intention: Formalisierung der Bedeutung von Programmen
- Aber, welche mathematischen Strukturen werden spezifiziert?

Was bedeutet ein Programm?

- In wie weit haben wir die Frage zufriedenstellend beantwortet?

Übersicht: Modul 8

Alternativen zur Definition der operationellen Semantik

- eine alternative Semantik für Aexp
- Äquivalenz der Semantik
- Entwurfsentscheidungen

Kalküle als Spezifikationsformalismus

- induktiv definierte Mengen
  - Regelinduktion
- Abschlusseigenschaften
- Hüllenoperatoren

Was bedeutet ein Programm?

Formalisierung einer Semantik

Freiheitsgrade bei der Definition einer operationellen Semantik

- Welche Urteile werden mit welcher intuitiven Bedeutung eingeführt?
- Wie wird die intuitive Bedeutung der Urteile durch Kalkülregeln modelliiert?

Im folgenden werden diese Freiheitsgrade illustriert.

- am Beispiel einer alternativen operationellen Semantik für Aexp
- am Beispiel einer alternativen operationellen Semantik für Com

Das Ziel ist,

- die Definition einer operationellen Semantik zu erlernen.

Alternative Semantik für Aexp (1)

Urteil

Wir führen das Urteil $\langle a,\sigma\rangle \rightarrow_1 a'$ ein, um auszudrücken, dass

- ein arithmetischer Ausdruck $a \in Aexp$
- in einem Zustand σ
- in einem primitiven Berechnungsschritt
- zu einem Ausdruck $a' \in Aexp$ reduziert wird.

Der Kalkül enthält die Regeln arN, arLoc, ar+1, ar+2, ar+3, ar-1, ar-2, ar-3, ar*1, ar*2 und ar*3, die auf den folgenden Folien definiert werden.

Kalkülregeln

arN

$$\frac{}{\langle n,\sigma\rangle \rightarrow_1 n}$$

rLoc

$$\frac{}{\langle X,\sigma\rangle \rightarrow_1 n} \quad n = \sigma(X)$$

Alternative Semantik für Aexp (2)

Kalkülregeln (Fortsetzung)

Name	Regel	Bedingung
ar+1	$\dfrac{\langle a1,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'}{\langle a1+a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'+a2}$	$a1 \notin N$
ar+2	$\dfrac{\langle a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a2'}{\langle n1+a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 n1+a2'}$	$n1 \in N$, $a2 \notin N$
ar+3	$\dfrac{}{\langle n1+n2,\sigma\rangle \rightarrow_1 n}$	$n1,n2 \in N, n=n1+n2$
ar-1	$\dfrac{\langle a1,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'}{\langle a1-a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'-a2}$	$a1 \notin N$
ar-2	$\dfrac{\langle a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a2'}{\langle n1-a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 n1-a2'}$	$n1 \in N$, $a2 \notin N$
ar-3	$\dfrac{}{\langle n1-n2,\sigma\rangle \rightarrow_1 n}$	$n1,n2 \in N$, $n=n1-n2$

Alternative Semantik für Aexp (3)

Kalkülregeln (Fortsetzung)

ar*1	$$\frac{\langle a1,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'}{\langle a1*a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'*a2}$$	$a1 \notin N$
ar*2	$$\frac{\langle a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a2'}{\langle n1*a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 n1*a2'}$$	$n1 \in N$, $a2 \notin N$
ar*3	$$\frac{}{\langle n1*n2,\sigma\rangle \rightarrow_1 n}$$	$n1,n2 \in N$, $n=n1*n2$

Basierend auf dem gerade eingeführten Kalkül wird ein Urteil eingeführt, dass Berechnungen modelliert (nächste Folie).

Alternative Semantik für Aexp (4)

Urteil

Wir führen das Urteil **$\langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n$** ein, um auszudrücken, dass

- ein arithmetischer Ausdruck $a \in Aexp$
- in einem Zustand σ
- zu einem Wert $n \in N$ auswertet.

Der Kalkül enthält die Regeln ar⇒1 und ar⇒2, die auf dieser Folien definiert werden.

Kalkülregeln

ar⇒1 $$\frac{\langle a,\sigma\rangle \rightarrow_1 n}{\langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n} \quad n \in N$$

ar⇒2 $$\frac{\langle a,\sigma\rangle \rightarrow_1 a' \qquad \langle a',\sigma\rangle \Rightarrow n}{\langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n} \quad a' \notin N$$

Alternative Semantik für Aexp (5)

Beispiel

Herleitung von $\langle(2*3)+1,\sigma\rangle \Rightarrow 7$ im alternativen Kalkül:

$$
\text{ar}{\Rightarrow}2\ \dfrac{
\text{ar+1}\ \dfrac{\text{ar*3}\ \dfrac{}{\langle 2*3,\sigma\rangle \rightarrow_{1} 6}\ 2,3\in N,\ 2*3=6}{\langle(2*3)+1,\sigma\rangle \rightarrow_{1} 6+1}\ 2*3\notin N
\qquad
\text{ar}{\Rightarrow}1\ \dfrac{\text{ar+3}\ \dfrac{}{\langle 6+1,\sigma\rangle \rightarrow_{1} 7}\ 6,1\in N,\ 6+1=7}{\langle 6+1,\sigma\rangle \Rightarrow 7}\ 7\in N
}{\langle(2*3)+1,\sigma\rangle \Rightarrow 7}\ 6+1\notin N
$$

Äquivalenz der Semantiken

Beachte

Die Urteile $\langle a,\sigma\rangle \Downarrow n$ und $\langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n$ haben die gleiche Intuition. Deshalb wäre es unangemessen, wenn eine der beiden folgenden Situationen möglich wäre:

- $\Vdash \langle a,\sigma\rangle \Downarrow n$ aber $\langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n$ ist nicht herleitbar oder
- $\Vdash \langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n$ aber $\langle a,\sigma\rangle \Downarrow n$ ist nicht herleitbar.

Folgendes Theorem zeigt, dass diese Situationen nie eintreten.

Theorem

Für alle $a \in \mathrm{Aexp}$, $\sigma \in \Sigma$ und $n \in \mathrm{N}$ gilt:

- $\Vdash \langle a,\sigma\rangle \Downarrow n$ genau dann wenn $\Vdash \langle a,\sigma\rangle \Rightarrow n$.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Welches Induktionsprinzip sollte man einsetzen, um das obige Theorem zu beweisen?

Entwurf: Operationelle Semantik (1)

Freiheitsgrade

- Welche Freiheitsgrade gibt es bei der Definition des Kalküls?
- Wie wurden diese Freiheitsgrade ausgestaltet?
- Welche Alternativen gibt es zu dieser Ausgestaltung?

Ausgestaltung der Freiheitsgrade

- In der Definition der Kalkülregeln für $\langle a,\sigma\rangle \rightarrow_1 a'$ haben wir eine **Links-vor-Rechts Auswertestrategie** angenommen.
- Das ist eine **Entwurfsentscheidung**, da die intuitive Bedeutung des Urteils keine Auswertestrategie vorgibt.
- Man könnte also auch eine andere Auswertestrategie modellieren, ohne die Angemessenheit der Regeln zu verletzen (siehe nächste Folie).

Entwurf: Operationelle Semantik (2)

Modellierung einer anderen Auswertestrategie

- Eine Rechts-vor-Links Auswertestrategie könnte man z.B. modellieren, indem man die Regeln ar+1 und ar+2 durch folgende Kalkülregeln ersetzt:

ar+1´
$$\frac{\langle a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a2'}{\langle a1+a2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1+a2'} \quad a2 \notin N$$

ar+2´
$$\frac{\langle a1,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'}{\langle a1+n2,\sigma\rangle \rightarrow_1 a1'+n2} \quad n2 \in N,\ a1 \notin N$$

Beachte

- Weitere Auswertestrategien sind möglich, da die intuitive Bedeutung des Urteils keine Auswertestrategie vorgibt.

Alternative Semantik für Com (1)

Kann man eine entsprechende Semantik für Com definieren?

Urteil

Wir führen das Urteil $\langle \mathbf{c},\boldsymbol{\sigma}\rangle \rightarrow_1 \langle \mathbf{c}',\boldsymbol{\sigma}'\rangle$ ein, um auszudrücken, dass

- ein Kommando $c \in \mathrm{Com}$
- in einem Zustand σ
- in einem primitiven Berechnungsschritt
- zu einem Paar $\langle c',\sigma'\rangle$ reduziert wird, wobei
    - $\sigma' \in \Sigma$
    - $c' \in \mathrm{Com} \cup \{\varepsilon\}$,
        - wobei die Terminierung eines Programms durch ε modelliert wird.

Kalkülregeln

… wird in Übung ergänzt …

Siehe Übungsblatt und Musterlösung

Alternative Semantik für Com (2)

Urteil

Wir führen das Urteil $\langle c,\sigma\rangle \Rightarrow \sigma'$ ein, um auszudrücken, dass

- ein Kommando $c \in \mathrm{Com}$
- in einem Zustand σ
- zu einem Zustand σ' auswertet.

Kalkülregeln

cr⇒1
$$\frac{\langle c,\sigma\rangle \rightarrow_1 \langle \varepsilon,\sigma'\rangle}{\langle c,\sigma\rangle \Rightarrow \sigma'}$$

cr⇒2
$$\frac{\langle c,\sigma\rangle \rightarrow_1 \langle c',\sigma''\rangle \qquad \langle c',\sigma''\rangle \Rightarrow \sigma'}{\langle c,\sigma\rangle \Rightarrow \sigma'}$$

Übersicht: Modul 8

Alternativen zur Definition der operationellen Semantik

- eine alternative Semantik für Aexp
- Äquivalenz der Semantik
- Entwurfsentscheidungen

Kalküle als Spezifikationsformalismus

- induktiv definierte Mengen
  - Regelinduktion
- Abschlusseigenschaften
- Hüllenoperatoren

Was bedeutet ein Programm?

Kalküle als Spezifikationssprache (1)

Was wird durch einen Kalkül spezifiziert?

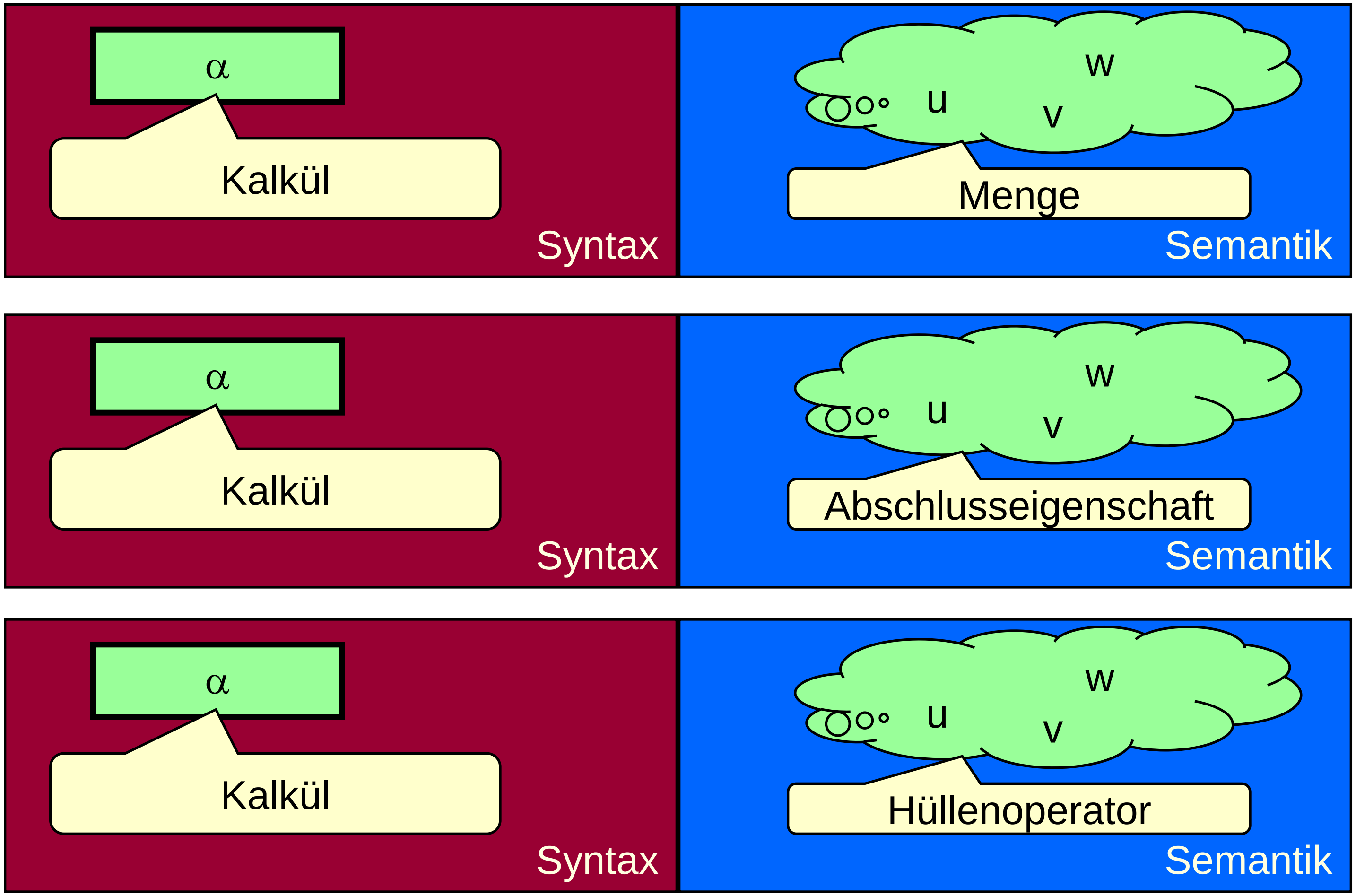
- Was ist die mathematische Struktur?

Verschiedene Sichtweisen:

- eine **Menge**
  - genauer: eine induktiv definierte Menge
- eine **Eigenschaft**
  - genauer: eine Abschlusseigenschaft
- ein **Operator**
  - genauer: ein Hüllenoperator

Kalküle als Spezifikationssprache (2)

Drei Möglichkeiten zur indirekten Beschreibung



Induktiv definierte Mengen (1)

Mögliche Sichtweise auf Kalkülregeln:

- Eine Menge von Kalkülregeln spezifiziert eine Menge.
- Welche Menge wird durch einen gegeben Kalkül spezifiziert?

Definition

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils. Die **durch $\mathcal{K}$ induktiv definierte Menge** ist $I_{\mathcal{K}} = \{ \xi \mid \Vdash_{\mathcal{K}} \xi \}$.

Beispiel

Die Menge Aexp wurde in Modul 6 wie folgt definiert:

- a ::= n | X | a+a | a-a | a*a

Die Menge kann durch einen Kalkül $\mathcal{A}exp$ wie folgt spezifiziert werden:

$$\frac{}{n}\ n \in N \qquad \frac{}{X}\ X \in Loc$$

$$\frac{a1 \quad a2}{a1+a2} \qquad \frac{a1 \quad a2}{a1-a2} \qquad \frac{a1 \quad a2}{a1*a2}$$

Induktiv definierte Mengen (2)

Beweisprinzip der Regelinduktion

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils und P eine einstellige Relation auf der Menge aller Instanzen dieses Urteils. Wenn für jede Kalkülregel

$$\text{r-name}\quad \frac{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n}{\zeta}\quad \phi_1, \ldots, \phi_m$$

in $\mathcal{K}$ und jede Substitution η, so dass $\phi_1\eta$, … und $\phi_m\eta$ erfüllt sind,

- $(P(\zeta_1\eta) \wedge \ldots \wedge P(\zeta_n\eta)) \Rightarrow P(\zeta\eta)$

gilt, dann gilt auch

- $\forall \xi \in I_{\mathcal{K}}: P(\xi)$.

Induktiv definierte Mengen (3)

Beispiel

Instantiiert man das Beweisprinzip der Regelinduktion mit dem Kalkül $\mathcal{A}exp$, so erhält man folgendes Induktionsprinzip:

Wenn

- $\forall n \in N: P(n)$
  $\wedge\ \forall x \in Loc: P(x)$
  $\wedge\ \forall a1,a2 \in Aexp: (P(a1) \wedge P(a2)) \Rightarrow P(a1+a2)$
  $\wedge\ \forall a1,a2 \in Aexp: (P(a1) \wedge P(a2)) \Rightarrow P(a1-a2)$
  $\wedge\ \forall a1,a2 \in Aexp: (P(a1) \wedge P(a2)) \Rightarrow P(a1*a2)$

dann gilt auch

- $\forall a \in Aexp: P(a)$.

Obiges Induktionsprinzip entspricht der strukturellen Induktion auf Aexp (vergleiche Modul 6)

Abschlusseigenschaften (1)

Mögliche Sichtweise auf Kalkülregeln:

- Eine Kalkülregel spezifiziert eine Abschlusseigenschaft.
- Welche Eigenschaft wird durch einen gegeben Kalkül spezifiziert?

Definition

Eine Kalkülregel

$$\text{r-name} \quad \frac{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n}{\zeta} \quad \phi_1, \ldots, \phi_m$$

definiert für eine Menge Q die Eigenschaft:

$$\forall \eta : (\phi_1\eta \wedge \ldots \wedge \phi_m\eta \wedge \{\zeta_1\eta, \ldots, \zeta_n\eta\} \subseteq Q) \Rightarrow \zeta\eta \in Q \,.$$

Eine Menge Q heißt **abgeschlossen unter r-name** gdw. obige Formel für Q erfüllt ist.

Definition

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils. Eine Menge **Q ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}$** („**Q ist $\mathcal{K}$–abgeschlossen**“) gdw. Q unter jeder Kalkülregel in $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist.

Abschlusseigenschaften (2)

Definition

Sei M eine Menge. Eine einstellige Relation P auf $\mathcal{P}(M)$ heißt **Abschlusseigenschaft** gdw. $\forall Q \subseteq M: \exists Q' \subseteq M: (Q \subseteq Q' \wedge P(Q'))$ gilt.

Theorem

Die durch einen Kalkül $\mathcal{K}$ für eine Menge Q spezifizierte Eigenschaft „Q ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}$“ ist eine Abschlusseigenschaft.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Abschlusseigenschaften (3)

Theorem

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils.

a) Die Menge $I_{\mathcal{K}}$ ist $\mathcal{K}$-abgeschlossen.

b) Wenn Q eine $\mathcal{K}$-abgeschlossene Menge ist, dann gilt $I_{\mathcal{K}} \subseteq Q$.

Beweis

a) Sei

$$\text{r-name}\ \frac{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n}{\zeta}\ \phi_1, \ldots, \phi_m$$

eine Regel aus $\mathcal{K}$ und η eine Substitution, so dass $\phi_1\eta$, … und $\phi_m\eta$ erfüllt sind und $\{\zeta_1\eta, \ldots, \zeta_n\eta\} \subseteq I_{\mathcal{K}}$ gilt.

- Dann gibt es Herleitungen , so dass $\forall i \in \{1,..,n\}$: $\mathcal{H}_i \Vdash_{\mathcal{K}} \zeta_i\eta$.
- Für $\mathcal{H}' = \text{r-name}(\zeta\eta, (\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n))$ gilt $\mathcal{H}' \Vdash_{\mathcal{K}} \zeta\eta$.
- Also gilt $\zeta\eta \in I_{\mathcal{K}}$ und somit ist $I_{\mathcal{K}}$ abgeschlossen unter $\mathcal{K}$.

b) … wird hier ausgelassen …

Abschlusseigenschaften (4)

Theorem

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils.
Dann gilt $\bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\} = I_{\mathcal{K}}$.

Beweis

Wir zeigen $\bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\} \subseteq I_{\mathcal{K}}$

- $I_{\mathcal{K}}$ ist unter $\mathcal{K}$ abgeschlossen.
- Daher gilt $I_{\mathcal{K}} \in \{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\}$.
- Also gilt
  - $\bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\}$
    $= \bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\} \cap I_{\mathcal{K}}$
    $\subseteq I_{\mathcal{K}}$

Wir zeigen $\bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\} \supseteq I_{\mathcal{K}}$

- $\bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\}$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}$.
- Aus dem Theorem auf der vorigen Folie (Teil b) folgt daher
- $I_{\mathcal{K}} \subseteq \bigcap\{ Q \mid Q$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{K}\}$.

Hüllenoperatoren (1)

Definition

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils.
Die Operatoren R-DACH$_{\mathcal{K}}$ und R-BAR$_{\mathcal{K}}$ auf Mengen von Instanzen dieses Urteils werden wie folgt durch $\mathcal{K}$ spezifiziert:

- R-DACH$_{\mathcal{K}}$(Q)
  $= \{ \xi \mid \exists \xi_1,\ldots,\xi_n : \exists \text{r-name}: \text{r-name}(\xi,(\xi_1,\ldots,\xi_n)) \in \text{RTerme(r-name)} \wedge \{\xi_1,\ldots,\xi_n\} \subseteq Q\}$
- R-BAR$_{\mathcal{K}}$(Q)
  $= Q \cup \{ \xi \mid \exists \xi_1,\ldots,\xi_n : \exists \text{r-name}: \text{r-name}(\xi,(\xi_1,\ldots,\xi_n)) \in \text{RTerme(r-name)} \wedge \{\xi_1,\ldots,\xi_n\} \subseteq Q\}$

Anmerkung

Nach obiger Definition gilt also: R-BAR$_{\mathcal{K}}$(Q) = Q $\cup$ R-DACH$_{\mathcal{K}}$(Q) .

Notation

Ergibt sich $\mathcal{K}$ aus dem Kontext, so lassen wir den Kalkülnamen weg und schreiben auch **R-DACH(Q)** und **R-BAR(Q)**.

Hüllenoperatoren (2)

Theorem

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils. Eine Menge Q von Instanzen dieses Urteils ist unter $\mathcal{K}$ abgeschlossen gdw. $\text{R-DACH}_{\mathcal{K}}(Q) \subseteq Q$ gilt.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Hüllenoperatoren (3)

Definition

Sei M eine Menge. Eine Funktion $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ heißt **monoton** gdw. $\forall Q,Q' \subseteq M: (Q \subseteq Q' \Rightarrow f(Q) \subseteq f(Q'))$ gilt.

Theorem

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils.

- R-DACH$_{\mathcal{K}}$ ist monoton.
- R-BAR$_{\mathcal{K}}$ ist monoton.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Hüllenoperatoren (4)

Definition

Sei M eine Menge. Eine Funktion $f: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ heißt **extensiv** gdw. $\forall Q \subseteq M: (Q \subseteq f(Q))$ gilt.

Theorem

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils.

❑ $\text{R-BAR}_{\mathcal{K}}$ ist extensiv.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Hüllenoperatoren (5)

Definition

Sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül zur Herleitung von Instanzen eines Urteils. Die Operatoren R-DACH$^i_{\mathcal{K}}$ und R-STAR$_{\mathcal{K}}$ auf Mengen von Instanzen dieses Urteils werden wie folgt durch $\mathcal{K}$ spezifiziert:

- R-DACH$^0_{\mathcal{K}}$(Q) = Q
- R-DACH$^{i+1}_{\mathcal{K}}$(Q) = R-DACH$_{\mathcal{K}}$(R-DACH$^i_{\mathcal{K}}$(Q))

und

- R-STAR$_{\mathcal{K}}$(Q) = $\cup_{i \in \mathbb{N}}$ R-DACH$^i_{\mathcal{K}}$(Q)

Definition

Sei M eine Menge. Eine Funktion $f: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ heißt **Hüllenoperator** gdw. folgende Bedingungen gelten:

- $\forall Q \subseteq M: (Q \subseteq f(Q))$ [Extensivität]
- $\forall Q,Q' \subseteq M: (Q \subseteq Q' \Rightarrow f(Q) \subseteq f(Q'))$ [Monotonie]
- $\forall Q \subseteq M: (f(f(Q)) = f(Q))$ [Idempotenz]

Hüllenoperatoren (6)

Theorem

R-STAR$_{\mathcal{K}}$ ist ein Hüllenoperator.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Theorem

Es gilt R-STAR$_{\mathcal{K}}(\emptyset)= I_{\mathcal{K}}$.

Beweis

… wird hier ausgelassen …

Beachte: Wir haben 3 Möglichkeiten kennengelernt, die Menge $I_{\mathcal{K}}$ zu charakterisieren:

- als Menge aller Instanzen eines Urteils, die in $\mathcal{K}$ herleitbar sind;
- als Schnittmenge aller unter $\mathcal{K}$ abgeschlossenen Mengen;
- als Ergebnis der Anwendung des Hüllenoperators R-STAR$_{\mathcal{K}}$ auf $\emptyset$.

Übersicht: Modul 8

Alternativen zur Definition der operationellen Semantik

- ❑ eine alternative Semantik für Aexp
- ❑ Äquivalenz der Semantik
- ❑ Entwurfsentscheidungen

Kalküle als Spezifikationsformalismus

- ❑ induktiv definierte Mengen
  - ❑ Regelinduktion
- ❑ Abschlusseigenschaften
- ❑ Hüllenoperatoren

Was bedeutet ein Programm?

Bedeutung von Programmen

Was war das ursprüngliche Ziel?

- eine Antwort auf die Frage: „Was bedeutet ein Programm?“

Wie sind wir vorgegangen?

- Wir haben das Urteil $\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'$ und den Kalkül $\mathcal{C}$ eingeführt.
  - Mit dem Kalkül können Instanzen des Urteils hergeleitet werden.
  - Die Kalküle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wurden als Hilfsmittel definiert.
- Intuitive Bedeutung:
  - Eine Instanz $\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'$ ist in $\mathcal{C}$ herleitbar genau dann wenn das Programm c im Zustand σ' terminiert, wenn es im Zustand σ ausgeführt wird.

Welche Frage haben wir wirklich beantwortet?

- „In welchen Zuständen kann ein Programm c terminieren, wenn es in einem gegebenen Zustand ausgeführt wird?“

Eine Antwort auf unsere ursprüngliche Frage sollte die Form haben

- „Ein Programm c bedeutet …“

Rückblick

Einige wesentliche Lernziele dieses Moduls

- Fähigkeit operationelle Semantiken zu definieren
  - Erkennen von Freiheitsgraden
  - Vergleich von Alternativen in der Definition
- Verwendung von Kalkülen als Spezifikationsformalismus
  - für induktiv definierte Mengen
  - für Abschlusseigenschaften
  - für Hüllenoperatoren
- Was bedeutet ein Programm?
  - Programme als partielle Funktionen auf Zuständen

Literatur

Glynn Winskel

The Formal Semantics of Programming Languages; Kapitel 4
The MIT Press, 1993.