Fachbereich Informatik
Modellierung und Analyse
von Informationssystemen
Prof. Dr. Heiko Mantel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2010/11

Einführung in Foundations of Computing
Beispielhafte Aufgaben für die Klausur

Im folgenden finden Sie Aufgaben, die so gestellt sind, wie sie in einer Klausur gestellt sein könnten. Diese Aufgaben sollen einen Eindruck über mögliche Klausuraufgaben vermitteln, sind aber nicht identisch mit den Aufgaben zukünftiger Klausuren.

Achtung: Diese Probeklausur enthält nur drei Aufgaben. Der Umfang der Probeklausur ist ca. **50%** der Umfang bewerteter Klausuren.

Achtung: Diese Probeklausur behandelt nur drei Themenblöcke. In einer Klausur kann jedes Thema der Vorlesung vorkommen.

Achtung: Diese Probeklausur enthält relativ einfache Aufgaben. In Klausuraufgaben können auch schwierigere Aufgaben vorkommen.

Aufgabe 1 (Formale Modellierung mit Funktionen)

Im Wahlpflichtbereich des Bachelor-Studiengangs Informatik ist jede Lehrveranstaltung einem Teilgebiet der Informatik zugeordnet. Außerdem können durch den erfolgreichen Besuch von Lehrveranstaltungen Credit Points erworben werden. Zur Modellierung verwenden wir folgende Wertebereiche und Funktionen:

LV	modelliert die Menge der Lehrveranstaltungen.
GEB	modelliert die Menge der Teilgebiete der Informatik.
$\mathsf{gebiet} : \mathsf{LV} \to \mathsf{GEB}$	modelliert die Zuordnung von Lehrveranstaltungen zu Teilgebieten.
$\mathsf{points} : \mathsf{LV}^* \to \mathbb{N}$	modelliert die Zuordnung von Folgen von Lehrveranstaltungen zur Anzahl der damit erwerbbaren Credit Points. Dabei bedeutet $\mathsf{points}(x) = n$, dass mit den Lehrveranstaltungen in x insgesamt n Credit Points erworben werden können.

Diese Mengen bzw. Funktionen bleiben unterspezifiziert.

1. Definieren Sie eine Funktion $\mathsf{filter} : (\mathsf{LV}^* \times \mathsf{GEB}) \to \mathsf{LV}^*$ formal, die aus einer Folge von Lehrveranstaltungen alle Lehrveranstaltungen entfernt, die *nicht* zu dem spezifizierten Teilgebiet gehören.

2. Modellieren Sie eine Funktion $\mathsf{gebpoints}$, die jeder Folge $x \in \mathsf{LV}^*$ und jedem Teilgebiet $g \in \mathsf{GEB}$ die Anzahl der Credit Points zuordnet, die durch die zum Teilgebiet g gehörenden Lehrveranstaltungen aus der Folge x erworben werden können. (Falls Lehrveranstaltungen mehrfach in der Folge vorkommen, sollen diese auch mehrfach gezählt werden, d. h. Sie brauchen die Folge nicht auf Mehrfachvorkommen zu untersuchen.)

   Definieren Sie als erstes den Definitions- und den Bildbereich der Funktion. Definieren Sie danach, welches Element des Bildbereichs einem gegebenen Element des Definitionsbereichs zugeordnet wird. Sie dürfen hierfür alle in der Vorlesung eingeführten mathematischen Konzepte sowie alle in dieser Aufgabe eingeführten Definitionen verwenden, inkl. der Funktion $\mathsf{filter} : (\mathsf{LV}^* \times \mathsf{GEB}) \to \mathsf{LV}^*$ aus dem vorigen Aufgabenteil. (Sie müssen den vorigen Aufgabenteil nicht gelöst haben, um den aktuellen Aufgabenteil bearbeiten zu können.)

Aufgabe 2 (Formale Modellierung von Anforderungen)

Im Bachelor-Studiengang Informatik gelten für den Wahlpflichtbereich verschiedene Anforderungen. In dieser Aufgabe sollen einige dieser Anforderungen formal modelliert werden. Folgende Wertebereiche, Funktionen und Prädikate sind hierfür definiert (Konzepte, die bereits in Aufgabe 1 vorkommen, wurden ohne Änderung für diese Aufgabe übernommen):

STD	modelliert die Menge der Studierenden.
LV	modelliert die Menge der Lehrveranstaltungen.
FRM	modelliert die Menge der Lehrformen (z. B. Vorlesung, Seminar, Praktikum).
$\mathsf{form} : \mathsf{LV} \to \mathsf{FRM}$	modelliert die Zuordnung von Lehrveranstaltungen zu Lehrformen.
$\mathsf{points} : \mathsf{LV}^* \to \mathbb{N}$	modelliert die Zuordnung von Folgen von Lehrveranstaltungen zur Anzahl der damit erwerbbaren Credit Points. Dabei bedeutet $\mathsf{points}(x) = n$, dass mit den Lehrveranstaltungen in x insgesamt n Credit Points erworben werden können.
$\mathsf{prüfungen} : \mathsf{STD} \to \mathsf{LV}^*$	modelliert die Zuordnung von Studierenden zu Folgen von Lehrveranstaltungen, die der jeweilige Studierende als Prüfungsleistung einbringen möchte.

Diese Mengen, Funktionen bzw. Prädikate bleiben unterspezifiziert.

1. Die Anforderung “Jeder Studierende muss durch Prüfungsleistungen 19 bis 22 Credit Points erwerben” sei durch folgende Relation modelliert:

   $\mathtt{ANFORDERUNG1} \subseteq \mathsf{STD} \to \mathsf{LV}^*$,

   $\mathsf{prüfungen} \in \mathtt{ANFORDERUNG1}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel ϕ_1 gilt.

   Definieren Sie die Formel ϕ_1 durch mathematische Konzepte, die in der Vorlesung behandelt wurden.

2. Die Studienordnung sieht Obergrenzen für die Anzahl der Credit Points vor, die auf einem Teilgebiet der Informatik erworben werden dürfen. Wie in Aufgabe 1 sei die Menge der Teilgebiete der Informatik durch die Menge GEB modelliert, die unterspezifiziert bleibt.

   Die Anforderung “Bei den Prüfungsleistungen jedes Studierenden dürfen nicht mehr als 9 Credit Points auf ein Teilgebiet entfallen” sei durch folgende Relation modelliert:

   $\mathtt{ANFORDERUNG2} \subseteq \mathsf{STD} \to \mathsf{LV}^*$,

   $\mathsf{prüfungen} \in \mathtt{ANFORDERUNG2}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel ϕ_2 gilt.

   Definieren Sie die Formel ϕ_2 durch mathematische Konzepte, die in der Vorlesung behandelt wurden. Sie können darüber hinaus die Funktion $\mathsf{gebpoints}$ aus Aufgabe 1 verwenden, auch wenn Sie Aufgabe 1 noch nicht gelöst haben.

   Zur Erinnerung: Für eine Folge $x \in \mathsf{LV}^*$ und ein Teilgebiet $g \in \mathsf{GEB}$ liefert $\mathsf{gebpoints}(x, g)$ die Anzahl der Credit Points, die durch die zum Teilgebiet g gehörenden Lehrveranstaltungen aus der Folge x erworben werden können.

3. Ein unterspezifiziertes Prädikat $\mathsf{studleist} : (\mathsf{STD} \times \mathsf{LV}) \to \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$ modelliere, ob ein Studierender in einer Lehrveranstaltung eine Studienleistung ablegen möchte.

   Die Anforderung “Jeder Studierende muss Studienleistungen in mindestens zwei verschiedenen Lehrformen ablegen” sei durch folgende Relation modelliert:

   $\mathtt{ANFORDERUNG3} \subseteq (\mathsf{STD} \times \mathsf{LV}) \to \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$,

   $\mathsf{studleist} \in \mathtt{ANFORDERUNG3}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel ϕ_3 gilt.

   Definieren Sie die Formel ϕ_3 durch mathematische Konzepte, die in der Vorlesung behandelt wurden.

4. Die Funktion $\mathsf{elem} : \mathsf{LV}^* \times \mathbb{N} \to \mathsf{LV} \cup \mathbb{N}$ modelliert den index-basierten Zugriff auf ein einzelnes Element: $\mathsf{elem}(x, i)$ liefert das i-te Element der Folge x, falls x ein Element an Position i enthält; andernfalls liefert $\mathsf{elem}(x, i)$ den Index i zurück. (Wir nehmen hierbei $\mathsf{LV} \cap \mathbb{N} = \emptyset$ an.)

   Die Eigenschaft "Jeder Studierende darf eine Lehrveranstaltung höchstens einmal als Prüfungsleistung einbringen" sei durch folgende Relation modelliert:

   $\texttt{ANFORDERUNG4} \subseteq \mathsf{STD} \to \mathsf{LV}^*$,

   $\mathsf{prüfungen} \in \texttt{ANFORDERUNG4}$ genau dann, wenn die prädikatenlogische Formel ϕ_4 gilt.

   Kreuzen Sie für jeden der folgenden Vorschläge an, ob die jeweilige Formel ϕ_4 eine angemessene oder eine nicht angemessene Modellierung der Anforderung ist:

angemessen	nicht angemessen	
☐	☐	$\phi_4 := \forall s \in \mathsf{STD}.\ \forall i \in \mathbb{N}.\ \exists j \in \mathbb{N}.\ \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), i) \neq \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), j)$
☐	☐	$\phi_4 := \forall s \in \mathsf{STD}.\ \forall i, j \in \mathbb{N}.\ \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), i) \neq \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), j)$
☐	☐	$\phi_4 := \forall s \in \mathsf{STD}.\ \forall i, j \in \mathbb{N}.\ \big(\mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), i) = \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), j) \Rightarrow i = j\big)$
☐	☐	$\phi_4 := \forall s \in \mathsf{STD}.\ \forall \ell \in \mathsf{LV}.\ \lvert\{i \in \mathbb{N} \mid \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), i) = \ell\}\rvert \in \{0, 1\}$
☐	☐	$\phi_4 := \forall s \in \mathsf{STD}.\ \forall \ell \in \mathsf{LV}.\ \{i \in \mathbb{N} \mid \mathsf{elem}(\mathsf{prüfungen}(s), i) = \ell\} \subseteq \{0, 1\}$

Aufgabe 3 (Programmäquivalenz)

> *Alle Regeln der operationellen Semantik von IMP finden Sie zusammengefasst auf dem Beiblatt „Beiblatt zur Klausur Einführung in Foundations of Computing".*

In dieser Aufgabe soll folgende Äquivalenz gezeigt werden:

$$\texttt{if } x = x \texttt{ then } x := 7; y := 5 \texttt{ else skip fi} \quad \sim \quad \texttt{if } \neg(x = x) \texttt{ then skip else } y := 5; x := 7 \texttt{ fi}$$

Der Beweis kann geführt werden, indem die folgenden Teilaussagen bewiesen werden:

(a) Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, für die das Urteil

$$\langle \texttt{if } x = x \texttt{ then } x := 7; y := 5 \texttt{ else skip fi}, \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle \texttt{if } \neg(x = x) \texttt{ then skip else } y := 5; x := 7 \texttt{ fi}, \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar.

(b) Für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, für die das Urteil

$$\langle \texttt{if } \neg(x = x) \texttt{ then skip else } y := 5; x := 7 \texttt{ fi}, \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar ist, ist auch das Urteil

$$\langle \texttt{if } x = x \texttt{ then } x := 7; y := 5 \texttt{ else skip fi}, \sigma\rangle \to \sigma'$$

herleitbar.

Beweisen Sie die Teilaussage (a). Sie dürfen verwenden, dass die Auswertung von Ausdrücken in Aexp deterministisch ist. Bitte *geben Sie explizit an*, an welchen Stellen Sie diese Aussage verwenden.