Repetitorium EiCE / GMS

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Teil 1: Kapitel 1 – 3.3.7

1. Einführung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 1

1.1 Begriffsbildung: „Modell“, „Simulation“, ...

Simulationspipeline:

- Problemspezifikation: Festlegung was und warum simuliert wird
- Modellierung: Konzeption der Systemstruktur und Modellgleichungen
- Implementierung: Auswahl und Programmierung eines Berechnungsverfahrens
- Validierung: Bewertung von Simulation und Modellen
- Anwendung: Verwertung von Simulationsergebnissen

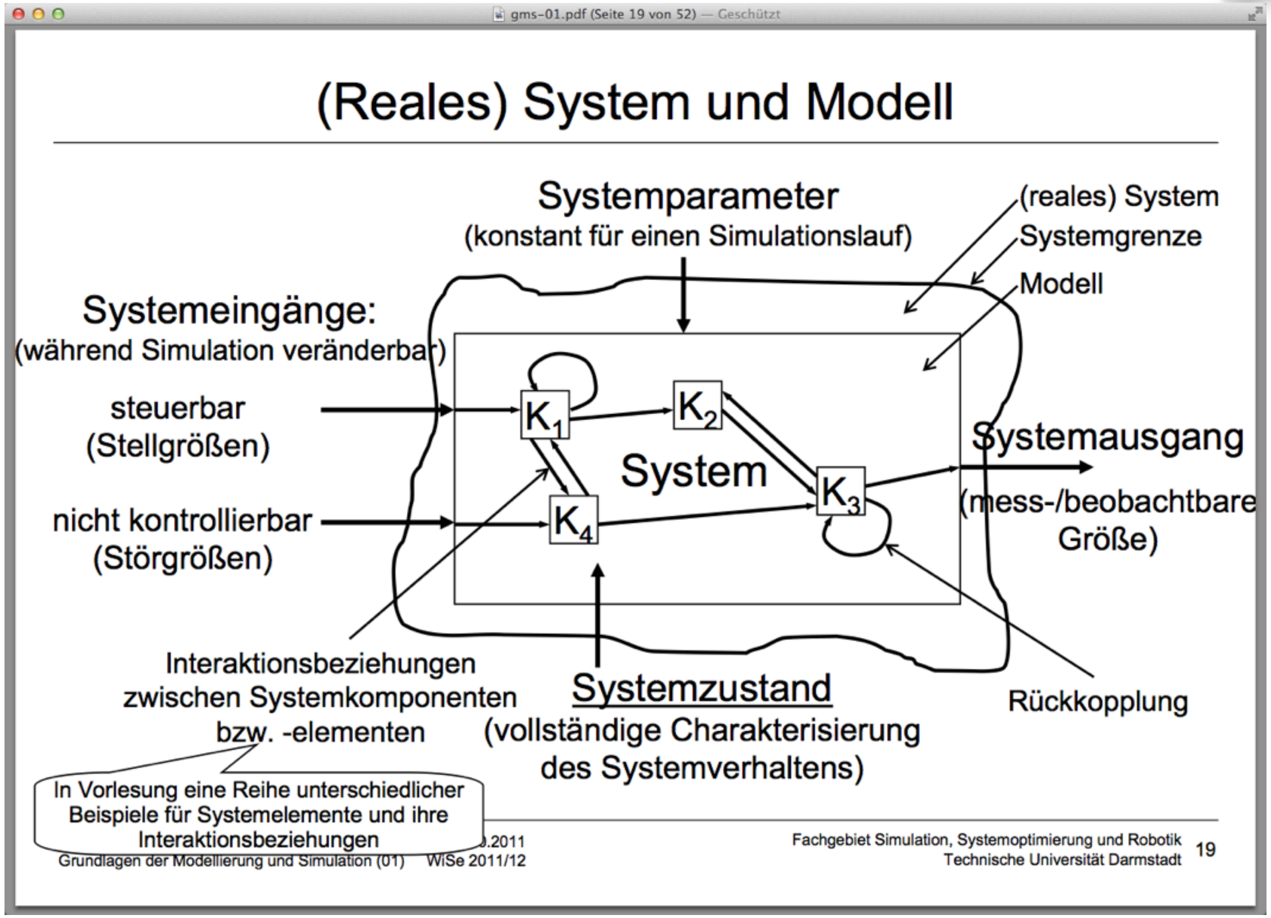
1.2 Anwendungsbeispiele

Beispiel: Schiffsschaukel

1. Einführung

Foliensatz 1

1.3 Herleitung von Modellen:



1. Einführung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 1

1.4 Analyse von Modellen:

Lösungsansätze für mathematische Modelle

- Analytisch: Optimale Lösung, keine Vereinfachungen oder Näherungen
- Heuristisch: Gezieltes Aufprobieren, nützlich bei diskreter Optimierung
- Direkt-numerisch: Numerischer Algorithmus liefert exakte Lösung
- Approximativ-numerisch: Iteratives Näherungsverfahren

1. Einführung

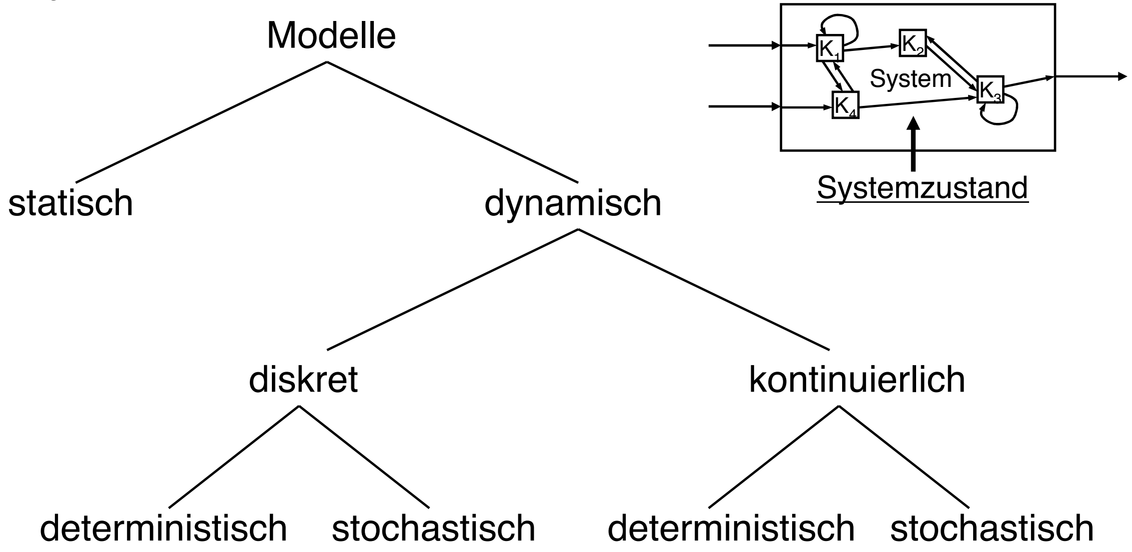
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 1+2

1.5 Klassifikation von Modellen:

Modellklassifikation: Art der Zustandsübergänge

(Page, 1991)

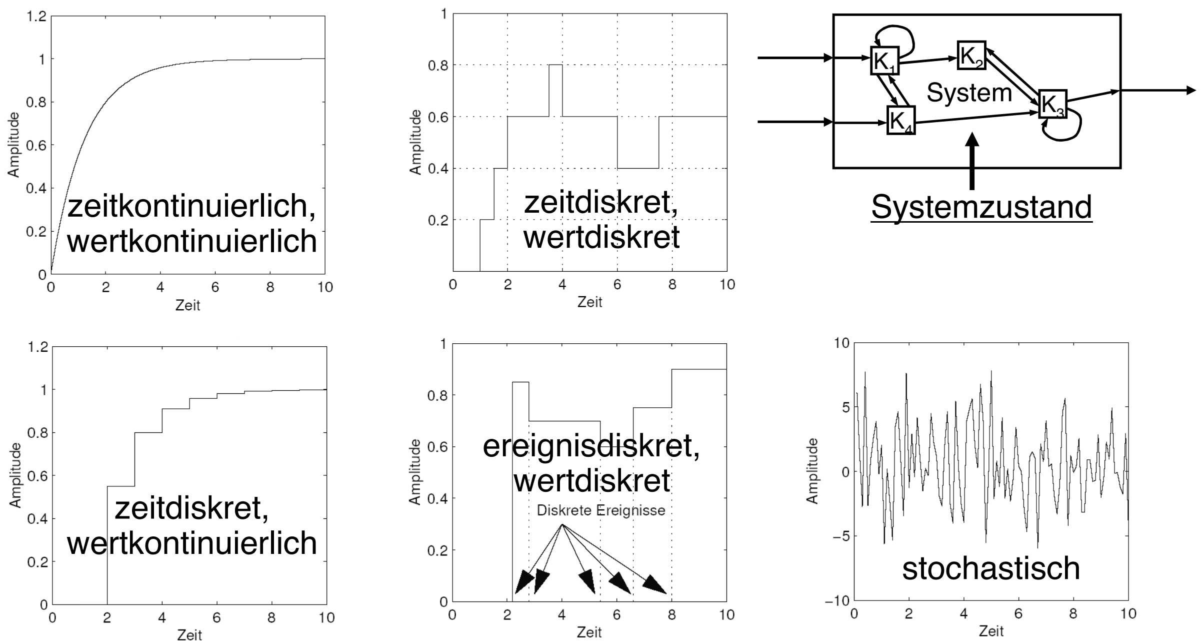


Prof. Dr. O. von Stryk (Damstadt)/Dr. A. Nägel (Frankfurt) 22.10.12
Grundlagen der Modellierung und Simulation (02) Winter 2012/13 8

1. Einführung

1.5 Klassifikation von Modellen:

Modellklassifikation: Art der Zustandsübergänge



Prof. Dr. O. von Stryk (Damstadt)/Dr. A. Nägel (Frankfurt) 22.10.12 10
Grundlagen der Modellierung und Simulation (02) Winter 2012/13

Foliensatz 1+2

2. Diskrete Modellierung und Simulation

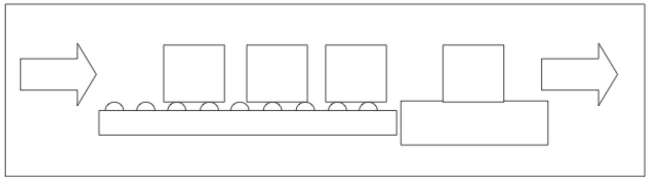
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 2

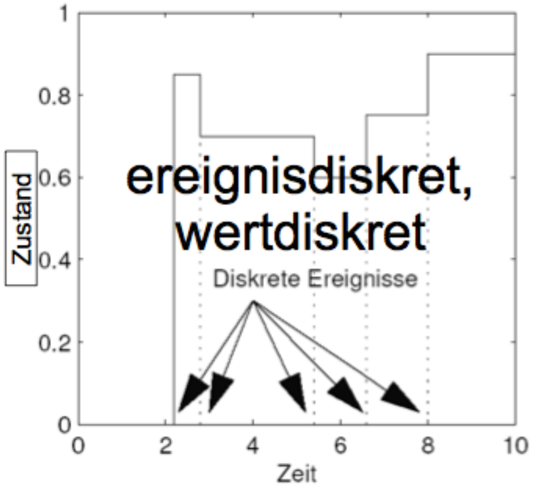
2.1 Einleitung und Grundbegriffe:

Diskrete Ereignissimulation (Discrete Event Simulation = DEVS)

- Anwendungsgebiete
  - Produktionssysteme
  - Verkehrssysteme
  - Wirtschaftssysteme
  - Informationssysteme



- Zielsetzungen
  - Kapazitätsauslegung
  - Systemauslastung
  - Störanalyse
  - Logistik

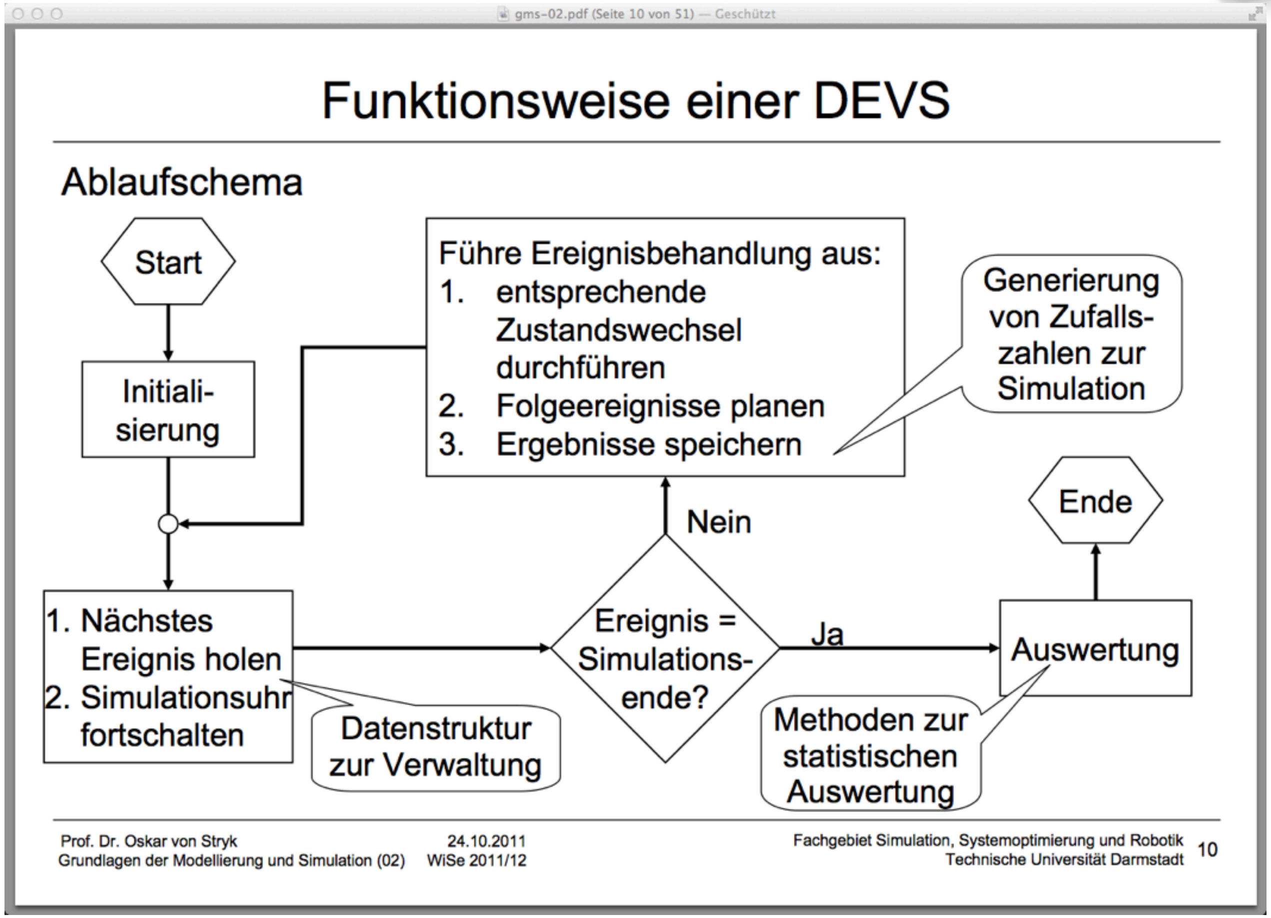


2. Diskrete Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 2

2.2 Funktionsweise einer DEVS:



2. Diskrete Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 2

2.2 Funktionsweise einer DEVS:

Übung 1.1

gms-02.pdf (Seite 12 von 51) — Geschützt

Zentraler Ereignisalgorithmus

Variablen:

Ereignisliste $L = \{ (t_1,E_1), (t_2,E_2), (t_3,E_3), \ldots \}$ mit $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots$

Simulationszeit t

Initialisierung:

$L := \{ (t_1,E_1) \}$; $t := 0$;	Startereignis, Uhr starten
InitializeSystem ;	systemspezifische Startwerte

Ereignisschleife:

while $t < t_{max}$	Zeitschleife
begin	
$t := t_1$; $E := E_1$;	Nächstes Ereignis
$L := L \setminus (t_1,E_1)$;	Ereignis aus Liste entfernen
EventRoutine(E) ;	Passende Ereignisbehandlung
sort (L) ;	Liste wieder aufsteigend sortieren
end ;	

Prof. Dr. Oskar von Stryk
Grundlagen der Modellierung und Simulation (02)
24.10.2011
WiSe 2011/12
Fachgebiet Simulation, Systemoptimierung und Robotik
Technische Universität Darmstadt
12

sim

2. Diskrete Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 2

2.3 Petrinetze:

- Eigenschaften
  - Gerichteter, bipartiter Graph
  - Zwei Knotentypen
    - „Plätze“ P (Zustände, passiv)
    - „Transitionen“ T (Ereignisse, aktiv)
  - Gerichtete Kanten A nur zwischen unterschiedlichen Knoten
  - „Markierungen“ M definieren den aktuellen Zustand
  - Kapazitäten K geben Beschränkungen an
- Petrinetztypen
  - Zeitdiskrete Modelle (Was passiert in welcher Sequenz?)
  - Zeitkontinuierliche Modelle (Wann tritt ein Ereignis auf?)

Beispiel: Nachrichtenaustausch

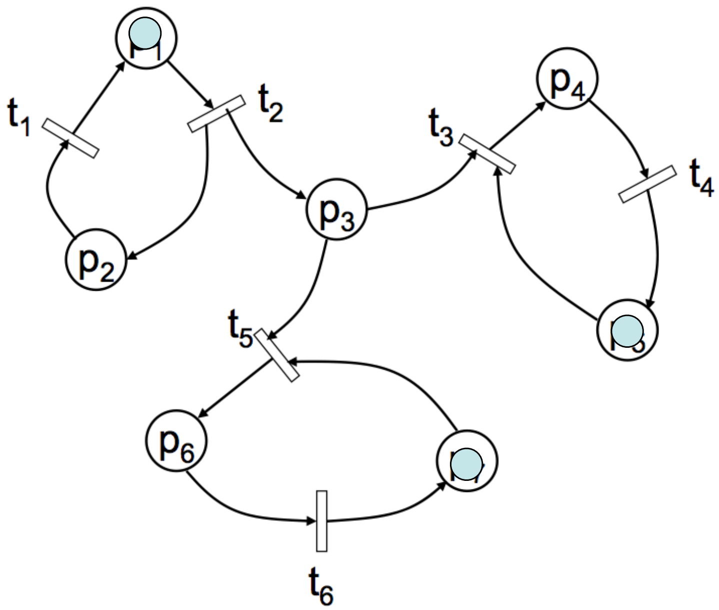
2. Diskrete Modellierung und Simulation

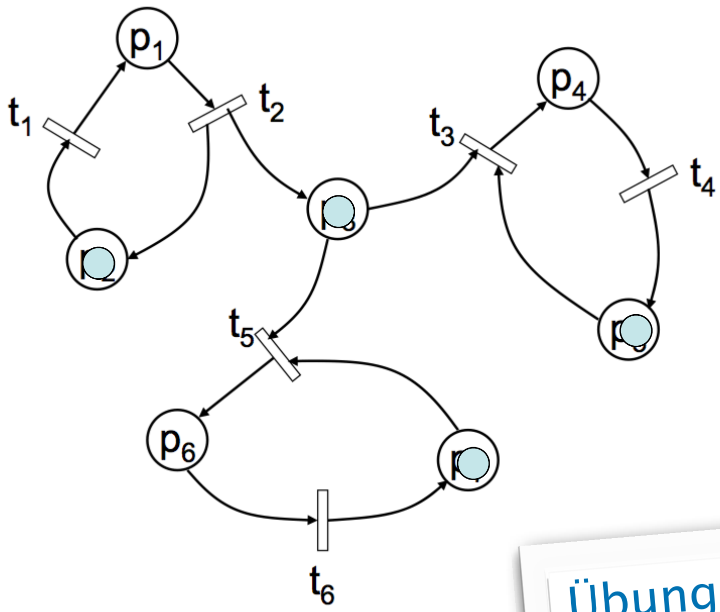
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 2

2.3 Petrinetze:

$$k = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$$





Übungen 1.2+1.3

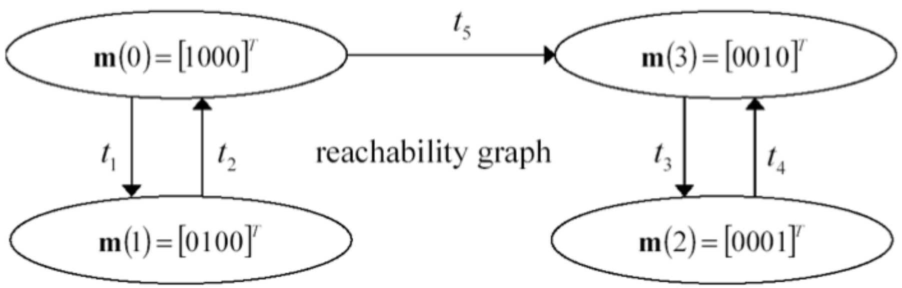
2. Diskrete Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 2

2.3 Petrinetze:

- Informationen
  - Erreichbarkeit: Zustände sind in einer endlichen Schaltfolge erreichbar
  - Beschränktheit: Kapazität ist limitiert
  - Verklemmung: Keine Transitionen mehr möglich
  - Lebendigkeit: Transition ist bei keiner Folgemarkierung mehr aktivierbar



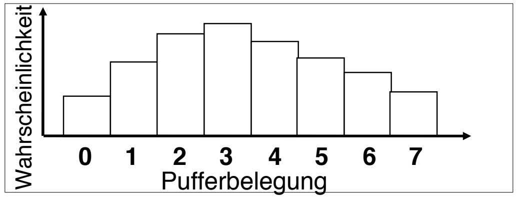
2. Diskrete Modellierung und Simulation

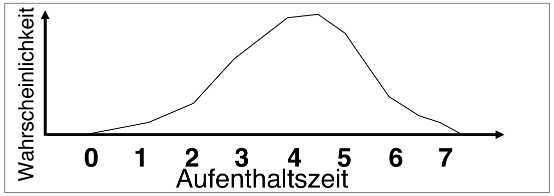
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 3

2.4 (Modellierung und) Simulation mit zufälligen Einflüssen:

- Grundlegende Begriffe
  - Verteilung (diskret/kontinuierlich)
  - Erwartungswert
  - Varianz
  - Schätzer für diese Größen





- Erzeugung von Zufallszahlen am Rechner
  - Diskrete gleichverteilte Zufallszahlen über lineare Kongruenzgeneratoren:

$$x_{k+1} := (a\, x_k + c) \bmod m$$

  - Kontinuierliche Zufallszahlen mit anderen Verteilungen über Transformation

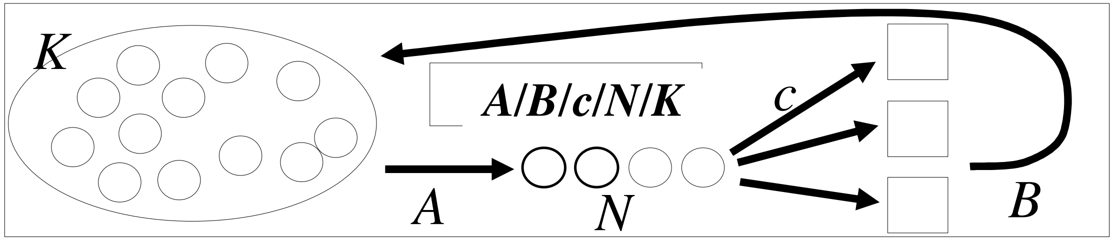
2. Diskrete Modellierung und Simulation

Foliensatz 3

2.4 (Modellierung und) Simulation mit zufälligen Einflüssen:

- Anwendung:

Allgemeines Warteschlangenmodell (2)



Bezeichnungen:

$\lambda = \mathrm{E}[A]$ ... (mittlere) Ankunftsrate
$\mu = \mathrm{E}[B]$ ... (mittlere) Bedienrate pro Station
$\sigma^2 = \mathrm{Var}[B]$... Streuung der Bedienrate

Ziel der Warteschlangentheorie:
Bestimmung der
Verteilung von $L(\infty)$

Zeitabhängige diskrete Zufallsvariable:
$L(t)$ ... Gesamtzahl der Kunden im System zur Zeit t

Langzeitverhalten ($t \to \infty$):
$L(t) \to L(\infty)$ stationäre Verteilung

Abgeleitete Größen:
L Erwartungswert von $L(\infty)$
ρ Langzeitausnutzung der Server
w Langzeitaufenthaltszeit im System

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

Foliensatz 4

3.1 Einleitung:

Systeme mit örtlich konzentrierten Zuständen werden durch gewöhnliche DGL (eine unabhängige Veränderliche) beschrieben

- Zeitlicher Verlauf der Schwingung einer Masse an einer Feder
- Zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung einer elektrischen Schaltung

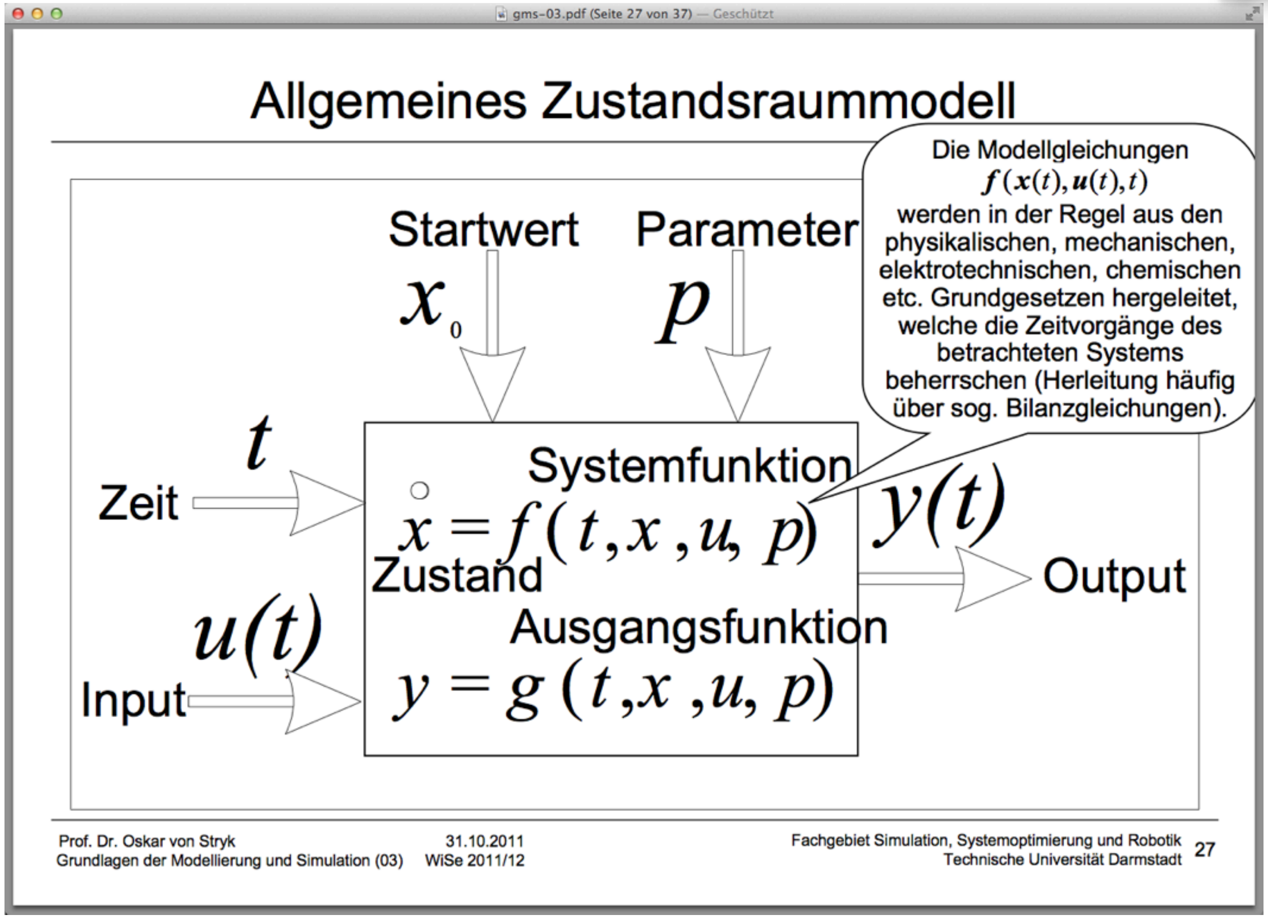
Systeme mit örtlich verteilten Zuständen werden durch partielle DGL (mehrere unabhängige Veränderliche) beschrieben

- Vorgänge in der Strömungsdynamik
- Verhalten von elektromagnetischen Feldern

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

Foliensatz 4

3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme:



3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.2 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme:

Transformation auf ein System 1. Ordnung $m\,\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t)$

- Jedes System von gewöhnlichen DGL n. Ordnung kann auf ein System 1. Ordnung transformiert werden

- Für höhere Zeitableitungen werden weitere Zustandsvariablen eingeführt

Transformation auf ein autonomes System $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,x_1(t) + 3\,x_2(t)\,t^2 \\ x_2(t) - \sqrt{t} \end{bmatrix}$

- Jedes nicht autonome System von DGL kann auf ein autonomes System von Differentialgleichungen transformiert werden

- Für die Zeitvariable wird eine weitere Zustandsgleichung eingeführt

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

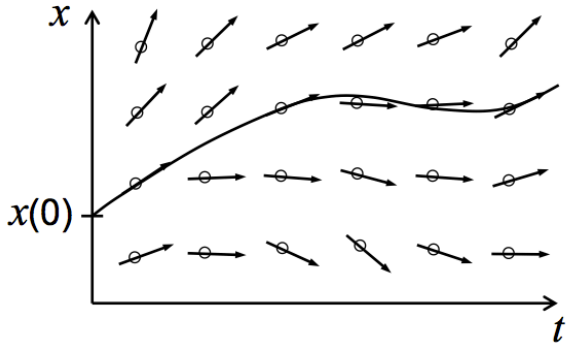
Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.1 Lösbarkeit:

- Lösung für eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung durch Richtungsfeld:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), t\right)$$



- Eindeutige Lösung für autonome Systeme von DGL 1. Ordnung mit Anfangswert:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t)\right), \; \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\left\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\right\| \leq L \left\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\right\| \text{ mit } L \geq 0$$

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.1 Gleichgewichtslösungen:

- Gleichgewichtslösung für autonome Systeme von DGL 1. Ordnung mit Anfangswert:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t)\right), \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}_s \text{ für } t \to \infty$$

- Lineare Systemdynamik:

$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_s = -\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}$ Eindeutige Lösung existiert, falls gilt $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

- Nichtlineare Systemdynamik:

$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{u}_s\right)$ Es können keine, genau eine, mehrere oder unendlich viele Lösungen existieren.

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.3 Jacobi-Matrix:

gms-04.pdf (Seite 3 von 31)

3.3.3 Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix der rechten Seite $\boldsymbol{f}:\Re^n \rightarrow \Re^n$ von

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}$$

hinsichtlich der Zustandsvariablen $\boldsymbol{x}$ ist definiert als:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Berechnungsmöglichkeiten:

- analytisch (exakt): „von Hand“ oder mit Formelmanipulationsprogrammen (z.B. Mathematica, Maple)
- numerisch (approximativ)

Prof. Dr. Oskar von Stryk 07.11.2011 Fachgebiet Simulation, Systemoptimierung und Robotik
Grundlagen der Modellierung und Simulation (04) WiSe 2011/12 Technische Universität Darmstadt 3

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

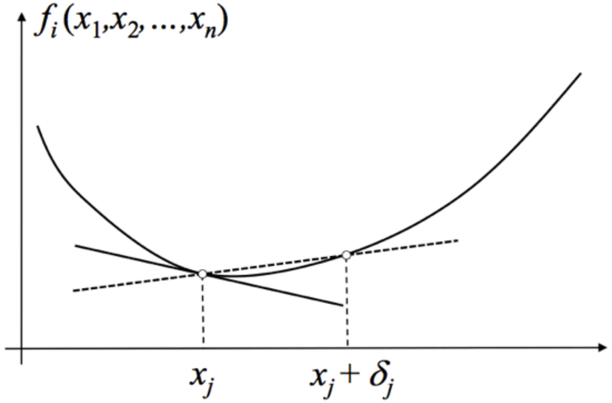
Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.3 Jacobi-Matrix:

gms-04.pdf (Seite 4 von 31)

Veranschaulichung



$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{\delta_j \to 0} \frac{1}{\delta_j} \Big(f_i(x_1, \ldots, x_j + \delta_j, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \Big)$$

Prof. Dr. Oskar von Stryk 07.11.2011 Fachgebiet Simulation, Systemoptimierung und Robotik
Grundlagen der Modellierung und Simulation (04) WiSe 2011/12 Technische Universität Darmstadt 4

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.3 Jacobi-Matrix:

- Numerische Approximation:

  Vorwärtsdifferenzenquotienten $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} \approx \frac{1}{\delta_j} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_j \delta_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \right) \text{ mit } \delta_j = \epsilon \left(1 + |x_j|\right)$

- Symbolisches Differenzieren:

  Algorithmische Anwendung von Ableitungsregeln wie Ketten- und Produkt-Regel

- Automatisches Differenzieren:

  Spezieller Algorithmus zur Umformung von Programm-Code zur Auswertung der Jacobi-Matrix

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.4 Linearisierung um die Ruhelage:

- Betrachtung des Zustands $\boldsymbol{x}(t)$ um die Ruhelage $\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{u}_s$
- Herleitung durch Taylor-Entwicklung bis zum linearen Term
- Hyper-Fläche der wird durch eine Hyper-Tangentialebene approximiert:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{u}_s}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \Delta\boldsymbol{x} + \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{u}_s}}_{\boldsymbol{B}} \cdot \Delta\boldsymbol{u}$$

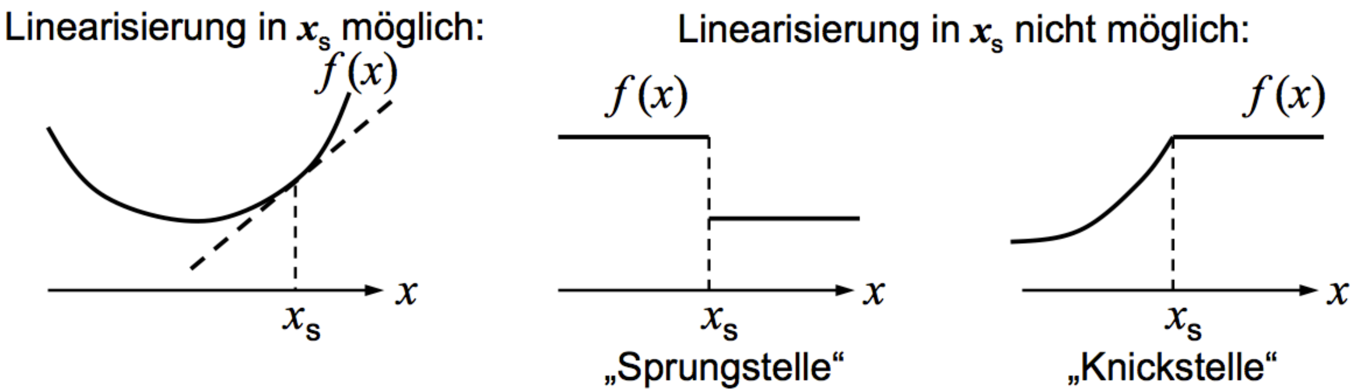
3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Folienssatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.4 Linearisierung um die Ruhelage:



3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.5 Lösung von $\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A} \cdot \Delta\boldsymbol{x}$:

- Für die Vektor-DGL $\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A} \cdot \Delta\boldsymbol{x}$ liefert der Expnentialansatz

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c} \cdot e^{\lambda\, t} \text{ mit } \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$$

- Das damit definierte Eigenwertproblem hat die charakteristische Gleichung

$$\det(\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$

mit im Allgemeinen n Lösungen λ_i mit $i = 1, ..., n$, den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$

3. Zeitkontinuierliche Modellierung und Simulation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Foliensatz 4

3.3 Modellanalyse:

3.3.5 Lösung von $\dot{\Delta\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A} \cdot \Delta\boldsymbol{x}$:

- Bei einfachen Eigenwerten lautet die allgemeine, komplexe Lösung

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

- Bei mehrfachen Eigenwerten muss ein Fundamentalsystem über die Bestimmung der Hauptvektoren hergeleitet werden

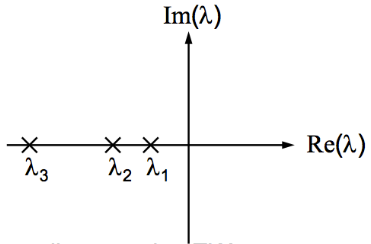
- Bei komplexen Eigenwerten ist die Lösung eine Linearkombination der realen und der imaginären Teillösungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

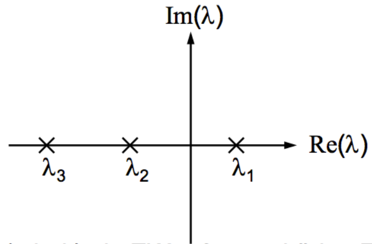
Foliensatz 4+5

3.3 Modellanalyse:

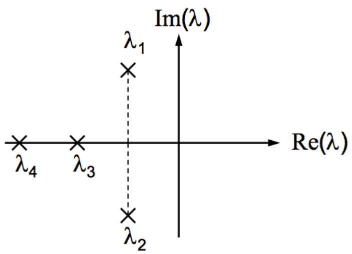
3.3.6 Stabilität:



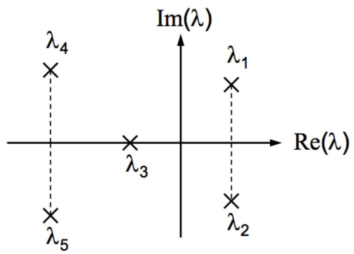
reelle, negative EWe:
⇒ aperiodische Dämpfung, stabiles System



(mind.) ein EW > 0: zugehörige Eigenbewegung wächst mit t gegen ∞
⇒ instabiles System



konjugiert komplexe EWe mit $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$:
⇒ gedämpfte Oszillation, stabiles System



konjugiert komplexe EWe mit $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$:
⇒ ungedämpfte Oszillation, instabiles System

3.3.7 Beispiel: Wettrüsten