# Einführung in Foundations of Computing WS 2011/12

## Modul 01: Aussagen- und Prädikatenlogik V1.0

Heiko Mantel

Technische Universität Darmstadt

# Zweck des Moduls 01

Dieses Modul bietet eine kompakte Einführung in die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik erster Stufe.

Beide Logiken werden in der Vorlesung FGDI II detaillierter eingeführt. Das Skriptum von FGDI II ist on-line verfügbar. (siehe Webseite zu dieser Vorlesung.)

Aussagen- und Prädikatenlogik werden in den weiteren Modulen dieser Vorlesung benötigt.

# Übersicht über Modul 01

## Aussagenlogik
- Syntax der Aussagenlogik
- Semantik der Aussagenlogik
- Endlichkeitssatz der Aussagenlogik
- Normalformen

## Prädikatenlogik erster Stufe
- Syntax der Prädikatenlogik
- Semantik der Prädikatenlogik
- Endlichkeitssatz der Prädikatenlogik

# Alphabet (Aussagenlogik)

## Definition (Alphabet der Aussagenlogik)

Das Alphabet der Aussagenlogik besteht aus folgenden Symbolen:

1. den Logikkonstanten `true` und `false`,
2. den Aussagenvariablen $A, B, C, \ldots$,
3. den *Junktoren* $\neg$ (Negation, gesprochen: „nicht“),
   $\vee$ (Disjunktion, gesprochen: „oder“),
   $\wedge$ (Konjunktion, gesprochen: „und“),
   $\Rightarrow$ (Implikation, gesprochen: „wenn ..., dann ...“),
   $\Leftrightarrow$ (Äquijunktion, gesprochen: „genau dann, wenn“)
4. und den Klammersymbolen ), (.

## Definition

Wir bezeichnen die Menge aller Aussagenvariablen mit $V$.

# Formeln (Aussagenlogik)

## Definition (aussagenlogische Formel)

Eine *aussagenlogische Formel* (AL-Formel) ist ein Ausdruck. Die Menge aller aussagenlogischer Formeln wird wie folgt induktiv definiert:

1. Die Logikkonstanten `true` und `false` sind AL-Formeln.
2. Jede Variable $A$ aus $V$ ist eine AL-Formel.
3. Ist $\alpha$ eine AL-Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine AL-Formel.
4. Sind $\alpha$ und $\beta$ AL-Formeln, so ist auch $(\alpha \vee \beta)$ eine AL-Formel.

## Definition

Wir bezeichnen die Menge der aussagenlogischen Formeln über Variablen aus $V$ mit $AL(V)$.

# Vereinfachte Schreibweisen (Aussagenlogik) (1)

## Notation

Wir führen weiterhin folgende Abkürzungen ein:

1. $(\alpha \wedge \beta)$ steht für $(\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))$,
2. $(\alpha \Rightarrow \beta)$ steht für $((\neg\alpha) \vee \beta)$,
3. $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ steht für $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$.

## Notation

Um Klammern zu sparen, wollen wir folgendes vereinbaren:

1. Die Präzedenzordnung von der stärksten Bindung zur schwächsten ist: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.
   $\Leftrightarrow$ hat die gleiche Präzedenz wie $\Rightarrow$.
2. $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ sind linksassoziativ.

In AL-Formeln können Klammernpaare weggelassen werden, solange die Formeln eindeutig, mithilfe obiger zwei Regeln, herleitbar sind.

# Vereinfachte Schreibweisen (Aussagenlogik) (2)

## Beispiele (für aussagenlogische Formeln unter Verwendung der notationellen Vereinfachungen der vorigen Folie)

Seien $A, B, C$ aus $V$.

1. Eine AL-Formel ist z.B. $(A \vee B)$, oder mit den Klammerregeln: $A \vee B$.
2. Aus der AL-Formel $((A \vee B) \vee C)$ wird mit den Klammerregeln: $A \vee B \vee C$.
3. Die Formel $((\neg(\neg((\neg A) \vee (\neg B)))) \vee C)$ lässt sich mit den Abkürzungen und den Klammerregel schreiben als $A \wedge B \Rightarrow C$.
4. Die Lesbarkeit kann durch die Abkürzungen und die Klammerregeln deutlich erhöht werden: aus $(\neg(\neg(\neg(\neg(A \vee (\neg B))) \vee C) \vee (\neg((\neg C) \vee (\neg(A \vee (\neg B)))))))$ wird $\neg A \wedge B \Leftrightarrow C$.

# Vereinfachte Schreibweisen (Aussagenlogik) (3)

## Bemerkung

Ausdrücke, die durch die Verwendung der Symbole $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und der Klammerregeln entstehen, sind streng genommen keine AL-Formeln. Nur die Ausdrücke, die der Definition auf Folie 6 genügen, sind AL-Formeln.

# Variablenbelegung (Aussagenlogik)

## Definition (Wahrheitswerte)

Die Menge der *Wahrheitswerten* ist $\{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$ (gesprochen: „wahr“ für $\mathfrak{w}$ und „falsch“ für $\mathfrak{f}$).

Unter Verwendung der Wahrheitswerte wird den AL-Formeln eine Bedeutung zugeordnet.

## Definition (Belegung)

Eine *Belegung* ist eine totale Funktion $\mathfrak{I} : V \to \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$.

Alternativ werden Belegungen auch *Bewertungen* oder *Interpretationen* genannt.

# Semantik von Formeln (Aussagenlogik) (1)

## Definition (Belegung von Formeln)

Für jede Belegung $\mathfrak{I}$ definieren wir eine totale Funktion, die jeder AL-Formel einen Wahrheitswert zuordnet:

$$\cdot^{\mathfrak{I}} : AL(V) \to \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\},$$

wobei

1. $\mathtt{true}^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt,
2. $\mathtt{false}^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt,
3. $A^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}(A)$ gilt für $A$ aus $V$,
4. $(\neg\alpha)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt, genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt,
5. $(\neg\alpha)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt, genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt,
6. $(\alpha \vee \beta)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt, genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ und $\beta^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt,
7. $(\alpha \vee \beta)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt, genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ und $\beta^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ beide gelten.

# Semantik von Formeln (Aussagenlogik) (2)

## Illustration

Die Semantik der Junktoren $\neg$ und $\vee$, sowie $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ wird durch folgende *Wahrheitstafel* illustriert:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\neg\alpha$ | $\alpha \vee \beta$ | $\alpha \wedge \beta$ | $\alpha \Rightarrow \beta$ | $\alpha \Leftrightarrow \beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ |
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$. |

# Semantik von Formeln (Aussagenlogik) (3)

### Beispiel

Wenn die Aussagenvariablen $A$ und $B$ die Aussagen

$A$ „Es regnet“, und

$B$ „die Straße ist nass“

modellieren, dann modelliert $A \Rightarrow B$ die Aussage „wenn es regnet, dann ist die Straße nass“.

# Modellbeziehung (Aussagenlogik)

## Definition (Modellbeziehung)

1. Eine Belegung $\mathfrak{I}$ *erfüllt* eine Formel $\alpha$ genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt.
2. Eine Belegung $\mathfrak{I}$ *erfüllt* eine Formelmenge $\Phi$, genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ für alle $\alpha$ aus $\Phi$ gilt.

Alternativ sagt man dann auch $\mathfrak{I}$ *ist Modell von* $\alpha$ bzw. $\mathfrak{I}$ *ist Modell von* $\Phi$ (oder $\alpha$ *gilt bei* $\mathfrak{I}$ bzw. $\Phi$ *gilt bei* $\mathfrak{I}$) und schreibt: $\mathfrak{I} \models \alpha$ bzw. $\mathfrak{I} \models \Phi$.

# Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit (Aussagenlogik) (1)

## Definition

1. Eine Formel $\alpha$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \alpha$ für mindestens eine Belegung $\mathfrak{I}$ gilt.
2. Eine Formel $\alpha$ heißt *allgemeingültig*, genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \alpha$ für jede Belegung $\mathfrak{I}$ gilt.

3. Eine Formelmenge $\Phi$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$ für mindestens eine Belegung $\mathfrak{I}$ gilt.
4. Eine Formelmenge $\Phi$ heißt *allgemeingültig*, genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$ für jede Belegung $\mathfrak{I}$ gilt.

# Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit (Aussagenlogik) (2)

## Beispiele

Seien $A$ und $B$ aus $V$.

1. Die Formel $A \Rightarrow B$ ist durch die Belegung $\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{I}(B) = \mathfrak{w}$ erfüllbar.
2. Die Formel $A \vee \neg A$ ist allgemeingültig.
3. Die Formel $A$ ist nicht allgemeingültig, sie ist für $\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{f}$ nicht erfüllt.

## Lemma

*Die Begriffe erfüllbar und allgemeingültig sind dual zueinander, denn es gilt:*
$\alpha$ *allgemeingültig genau dann, wenn* $\neg\alpha$ *nicht erfüllbar.*

# Semantische Folgerungsbeziehung (Aussagenlogik) (1)

Wir wollen von einer Folgerungsbeziehung sprechen wenn die Wahrheit einer Aussage die Wahrheit einer anderen erzwingt.

## Definition (Semantische Folgerung)

Seien $\Phi$ eine AL-Formelmenge und $\alpha$ eine AL-Formel. Gilt für jede Belegung $\mathfrak{I}$, für die $\mathfrak{I} \models \Phi$ gilt, auch $\mathfrak{I} \models \alpha$, dann sagt man: *aus* $\Phi$ *folgt* $\alpha$ und schreibt: $\Phi \models \alpha$.

## Notation

Für $\emptyset \models \alpha$ schreiben wir $\models \alpha$.
Für $\{\alpha\} \models \beta$ schreiben wir $\alpha \models \beta$.

## Lemma

*Die Folgerungsbeziehung lässt sich auf Erfüllbarkeit reduzieren:*
$\Phi \models \alpha$ *genau dann, wenn* $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ *nicht erfüllbar.*

# Semantische Folgerungsbeziehung (Aussagenlogik) (2)

**Lemma**

*Sind $\alpha$ und $\beta$ AL-Formeln, dann gilt:*

1. $\emptyset \models \beta$ *genau dann, wenn* $\beta$ *allgemeingültig,*
2. $\alpha \models \beta$ *genau dann, wenn* $\alpha \Rightarrow \beta$ *allgemeingültig,*

# Semantische Folgerungsbeziehung (Aussagenlogik) (3)

## Beispiel (Modus Ponens)

Sei $\alpha = A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Anhand der Wahrheitstafel

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \wedge (A \Rightarrow B)$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ |
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ |
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ |
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ |

sehen wir, dass $\alpha$ allgemeingültig ist. Wir können jetzt mit dem Lemma schließen, dass wenn wir eine Belegung $\mathfrak{I}$ haben mit $\mathfrak{I} \models A \wedge (A \Rightarrow B)$, dann auch $\mathfrak{I} \models B$ gilt.

# Endlichkeitssatz (Aussagenlogik)

## Theorem

*Für jede Formelmenge* $\Phi \subseteq AL(V)$ *gilt:*
*Die Formelmenge* $\Phi$ *ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *erfüllbar ist.*

## Beweis.

Siehe z.B. [3] Kapitel XI, §4, Beweis von Satz 4.5. □

## Korollar

*Für jede Formelmenge* $\Phi \subseteq AL(V)$ *und jede AL-Formel* $\psi$ *gilt:*
$\Phi \models \psi$ *genau dann, wenn für eine endliche Teilmenge* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *gilt:* $\Phi_0 \models \psi$.

## Bemerkung

Ist eine unendliche, nicht erfüllbare Formelmenge $\Phi$ gegeben, so folgt aus dem Endlichkeitsatz, dass es eine endliche, nicht erfüllbare Formelmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt.

# Semantische Äquivalenz (Aussagenlogik)

## Definition (semantische Äquivalenz)

Zwei AL-Formeln $\alpha$ und $\beta$ heißen *semantisch äquivalent*, genau dann, wenn für alle Belegungen $\mathfrak{I}$ gilt: $\alpha^{\mathfrak{I}} = \beta^{\mathfrak{I}}$. Wir schreiben: $\alpha \approx \beta$.

## Beispiele

1. Es gilt $\texttt{true} \approx A \vee \neg A$.
2. Es gilt $\alpha \Rightarrow \beta \approx \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$.

# Normalformen (Aussagenlogik) (1)

## Definition (Literal)

Ein *Literal* ist eine AL-Formel, die entweder die Form $A$ oder $\neg A$ hat, wobei $A$ aus $V$ ist.

## Definition (Konjunktive Normalform)

Eine Formel, die eine Konjunktion über Disjunktionen von Literalen ist, heißt in *Konjunktiver Normalform* (kurz *KNF*).

## Definition (Disjunktive Normalform)

Eine Formel, die eine Disjunktion über Konjunktionen von Literalen ist, heißt in *Disjunktiver Normalform* (kurz *DNF*).

# Normalformen (Aussagenlogik) (2)

### Beispiele

1. Die Formel $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee D)$ ist in KNF.
2. Die Formel $(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C \wedge D)$ ist in DNF.
3. Die Formel $\neg(A \vee B) \wedge B \wedge C$ ist weder in KNF noch in DNF.

### Theorem

*Für jede AL-Formel gibt es semantisch äquivalente AL-Formeln in KNF und DNF.*

### Beweis.

Siehe z.B. [3] Kapitel XI, §4, Beweis zu Satz 4.7. $\square$

# Alphabet (Prädikatenlogik) (1)

## Definition (Alphabet der Prädikatenlogik)

Ein Alphabet der Prädikatenlogik erster Stufe besteht aus folgenden Symbolen:

1. den Logikkonstanten `true` und `false`,
2. den Termvariablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$,
3. den *Junktoren* $\neg$ (Negation, gesprochen: „nicht“),
   $\vee$ (Disjunktion, gesprochen: „oder“),
   $\wedge$ (Konjunktion, gesprochen: „und“),
   $\Rightarrow$ (Implikation, gesprochen: „wenn ..., dann ...“),
   $\Leftrightarrow$ (Äquijunktion, gesprochen: „genau dann, wenn“),
4. den Klammersymbolen ), ( und dem Punkt .,

...

# Alphabet (Prädikatenlogik) (2)

## Definition (Alphabet der Prädikatenlogik (Fortsetzung))

5. den Quantoren $\exists$ (Existensquantor, gesprochen: „es gibt“),
   $\forall$ (Allquantor, gesprochen: „für alle“),
6. dem Gleichheitszeichen $\equiv$ (gesprochen: „gleich“),
7. den Termkonstanten $k_0, k_1, k_2, \ldots$ und
8. für jedes $n \geq 1$
   8.1 eine Menge $P_n$ aus $n$-stelligen Relationssymbolen,
   8.2 eine Menge $F_n$ aus $n$-stelligen Funktionssymbolen.

## Definition

Wir bezeichnen die Menge aller Termvariablen mit $V$ und die Menge aller Termkonstanten mit $K$.

# Signatur und PL-Terme (Prädikatenlogik)

## Definition (Signatur)

Ein Tupel $\big(K, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ heißt *Signatur*, wobei $K$, $F_n$ und $P_n$ wie auf der letzten Folie definiert sind.

## Definition (PL-Terme)

Ein *prädikatenlogischer Term* (PL-Term) ist ein Ausdruck. Für eine Signatur $\big(K, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ ist die Menge der PL-Terme wie folgt induktiv definiert:

1. Jedes $v$ aus $V$ ist ein PL-Term.
2. Jedes $k$ aus $K$ ist ein PL-Term.
3. Sind $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ PL-Terme und $f$ aus $F_n$, dann ist auch $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein PL-Term.

## Definition

Wir bezeichnen die Menge der PL-Terme über der Signatur $\Sigma$ mit $PLT(\Sigma)$.

# Formeln (Prädikatenlogik)

## Definition (PL-Formeln)

Sei $\Sigma := \big(K, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ eine Signatur. Eine *prädikatenlogische Formel* (PL-Formel) erster Stufe ist ein Ausdruck. Die Menge der PL-Formeln über $\Sigma$ ist wie folgt induktiv definiert:

1. `true` und `false` sind PL-Formeln.
2. Sind $t_1, \ldots, t_n$ aus $PLT(\Sigma)$ und $P$ aus $P_n$, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine PL-Formel.
3. Sind $t_1$ und $t_2$ aus $PLT(\Sigma)$, dann ist $t_1 \equiv t_2$ eine PL-Formel.
4. Ist $\alpha$ eine PL-Formel, dann ist auch $(\neg\alpha)$ eine PL-Formel.
5. Sind $\alpha$ und $\beta$ PL-Formeln, dann ist auch $(\alpha \vee \beta)$ eine PL-Formel.
6. Ist $v$ aus $V$ und $\alpha$ eine PL-Formel, dann ist auch $(\exists v.\, \alpha)$ eine PL-Formel.

# Vereinfachte Schreibweisen (Prädikatenlogik)

## Definition

Wir bezeichnen die Menge der PL-Formeln über der Signatur $\Sigma$ mit $PL(\Sigma)$.

## Notation

1. Für $(\neg(\alpha \equiv \beta))$ schreiben wir auch $(\alpha \not\equiv \beta)$.
2. $(\forall v.\, \alpha)$ steht als Abkürzung für $(\neg(\exists v.\, (\neg\alpha)))$.
3. Es gelten auch die gleiche Präzedenzordnung und Assoziativität wie in der Aussagenlogik (siehe Folie 7), wobei $\exists$ und $\forall$ stärker binden als alle Junktoren.
4. Wir verwenden die Symbole $\wedge$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ analog zur Aussagenlogik (siehe Folie 7).

# Bindungsbereich der Quantoren (Prädikatenlogik) (1)

## Definition (Bindungsbereich)

1. Der Existenzquantor $\exists$ (oder der Allquantor $\forall$) hat in der Formel $\exists v.\, \alpha$ (oder in $\forall v.\, \alpha$) den Bindungsbereich $\alpha$.

   Alternativ sagt man auch das Vorkommen von $v$ ist in $\exists v.\, \alpha$ (oder $\forall v.\, \alpha$) *gebunden*.
2. Steht $v$ in keinem Bindungsbereich eines Quantors, dann heißt das Vorkommen von $v$ *frei*.
3. Eine PL-Formel $\alpha$ ohne freie Variablen heißt *geschlossen*.

# Bindungsbereich der Quantoren (Prädikatenlogik) (2)

Beispiele

1. In der PL-Formel $\exists v_0.(v_1 \not\equiv v_0)$ ist das Vorkommen der Variabel $v_0$ gebunden und das Vorkommen der Variablen $v_1$ ist frei.
2. Die PL-Formel $\exists v_0.\exists v_1.(v_1 \not\equiv v_0)$ ist geschlossen.
3. In der PL-Formel $\underline{v_0} \vee \exists v_0.(v_0 \equiv \underline{v1})$ sind die unterstrichenen Vorkommen der Variablen frei, die verbleibenden gebunden. Durch geeignete Umbenennung der Variablen kann vermieden werden, daß $v_0$ sowohl frei, als auch gebunden vorkommt.

# Strukturen (Prädikatenlogik) (1)

## Definition (Struktur)

Sei $\Sigma = \big(K, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ eine Signatur. Eine $\Sigma$-*Struktur* $\mathfrak{A}$ ist ein Paar $(T, \mathfrak{a})$ aus einer nichtleeren Menge $T$ und einer Abbildung $\mathfrak{a}$ die für jedes $n \geq 1$

1. jeder Konstanten $k$ aus $K$ ein Element $a$ aus $T$,
2. jedem $f$ aus $F_n$ eine $n$-stellige Funktion über $T$,
3. jedem $P$ aus $P_n$ eine $n$-stellige Relation über $T$ zuordnet.

## Definition

Die nichtleere Menge $T$ einer $\Sigma$-Struktur $(T, \mathfrak{a})$ heißt *Grundbereich* (oder *Trägermenge*).

# Strukturen (Prädikatenlogik) (2)

## Beispiel (Arithmetik)

Sei die Signatur $\Sigma = \big(\{0,1\}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ gegeben,

wobei $F_2 = \{+,\cdot\}$ und $F_i = \emptyset$ für $i \neq 2$, und
$P_2 = \{<\}$ und $P_i = \emptyset$ für $i \neq 2$.

Die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathfrak{a})$ zur Signatur $\Sigma$,

wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist,
den Konstanten 0 bzw. 1 die Zahlen Null bzw. eins
durch $\mathfrak{a}$ zugeordnet wird,
$\mathfrak{a}(+)$ die Addition,
$\mathfrak{a}(\cdot)$, die Multiplikation und
$\mathfrak{a}(<)$ die Kleinerrelation auf den natürlichen Zahlen ist,

bezeichnet man als *Struktur der Arithmetik der natürlichen Zahlen*.

# Strukturen (Prädikatenlogik) (3)

## Beispiel (Wortmonoid)

Sei die Signatur $\Sigma = \big(\{\epsilon\}, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ gegeben,

wobei $F_2 = \{\circ\}$ und $F_n = \emptyset$ für $n \neq 2$, und
$P_n = \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sei $A$ ein Alphabet. Die Struktur $\mathcal{W} = (A^*, \mathfrak{a})$,

wobei $A^*$ die Menge aller Worte über $A$ modelliert,
$\mathfrak{a}(\epsilon)$ das leeren Wort ist und
$\mathfrak{a}(\circ)$ die Konkatenation zweier Worte ist.

bezeichnet man als *Struktur des Wortmonoids*.

# Interpretation (Prädikatenlogik) (1)

## Definition (Belegung, Interpretation)

Sei $\Sigma$ eine Signatur. Eine *Belegung* in der $\Sigma$-Struktur $\mathfrak{A} = (T, \mathfrak{a})$ ist eine totale Funktion $\beta : V \to T$.

Eine $\Sigma$-*Interpretation* $\mathfrak{I}$ ist ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ aus einer $\Sigma$-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung $\beta$.

# Interpretation (Prädikatenlogik) (2)

**Bemerkung (Warnung!)**

$\Sigma$-Interpretationen bilden eine formale Welt in eine andere formale Welt ab. Die Interpretationen in Modul 0 und Modul 2 bilden eine formale Welt in eine informelle ab.

# Semantik von Termen (Prädikatenlogik)

## Definition (Interpretation der PL-Terme)

Sei $\Sigma = \big(K, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ eine Signatur. Für jede $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I} = ((T, \mathfrak{a}), \beta)$ definieren wir eine totale Funktion, die jedem PL-Term ein Element aus $T$ zuordnet:

$$\cdot^{\mathfrak{I}} : PLT(\Sigma) \to T$$

wobei

1. $v^{\mathfrak{I}} := \beta(v)$ gilt für $v$ aus $V$,
2. $k^{\mathfrak{I}} := \mathfrak{a}(k)$ gilt für $k$ aus $K$,
3. $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{I}} := \big(\mathfrak{a}(f)\big)(t_1^{\mathfrak{I}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{I}})$ gilt für die PL-Terme $t_1$, ..., $t_n$ und für $f_n$ aus $F_n$.

# Substitution (Prädikatenlogik)

**Notation**

Sei $v$ aus $V$ und $x$ aus $T$, dann definieren wir:

$$\beta[v \mapsto x](w) := \begin{cases} \beta(w) & \text{für } w \neq v, \\ x & \text{für } w = v. \end{cases}$$

Ferner definieren wir $\mathfrak{I}[v \mapsto x] := (\mathfrak{A}, \beta[v \mapsto x])$ für die Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.

# Semantik von Formeln (Prädikatenlogik) (1)

## Definition (Interpretation der PL-Formeln)

Sei $\Sigma = \big(K, (F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ eine Signatur. Für jede $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I} = ((T, \mathfrak{a}), \beta)$ definieren wir eine totale Funktion, die jeder PL-Formel einen Wahrheitswert zuordnet:

$$\cdot^{\mathfrak{I}} : PL(\Sigma) \to \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$$

wobei

1. $\texttt{true}^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt,
2. $\texttt{false}^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt,
3. $P(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt genau dann, wenn $\big(\mathfrak{a}(P)\big)(t_1^{\mathfrak{I}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{I}}) = \mathfrak{w}$ für $t_1, \ldots, t_n$ aus $PLT(\Sigma)$ gilt,
4. $P(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt genau dann, wenn $\big(\mathfrak{a}(P)\big)(t_1^{\mathfrak{I}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{I}}) = \mathfrak{f}$ für $t_1, \ldots, t_n$ aus $PLT(\Sigma)$ gilt,
5. $(t_1 \equiv t_2)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt genau dann, wenn $t_1^{\mathfrak{I}} = t_2^{\mathfrak{I}}$ gilt,
6. $(t_1 \equiv t_2)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt genau dann, wenn $t_1^{\mathfrak{I}} = t_2^{\mathfrak{I}}$ nicht gilt,

# Semantik von Formeln (Prädikatenlogik) (2)

## Definition (Interpretation der PL-Formeln (Fortsetzung))

7. $(\neg\alpha)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt,
8. $(\neg\alpha)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt,
9. $(\alpha \vee \beta)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ und $\beta^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt,
10. $(\alpha \vee \beta)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ und $\beta^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ beide gelten,
11. $(\exists v\, \alpha)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt genau dann, wenn es mindestens ein $x$ aus $T$ gibt, mit $\alpha^{\mathfrak{I}[v \mapsto x]} = \mathfrak{w}$,
12. $(\exists v\, \alpha)^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{f}$ gilt genau dann, wenn es kein $x$ aus $T$ gibt, mit $\alpha^{\mathfrak{I}[v \mapsto x]} = \mathfrak{w}$.

# Modellbeziehung (Prädikatenlogik) (1)

### Bemerkung

Die Modellbeziehung $\models$ und die Folgerungsbeziehung $\models$ der Prädikatenlogik, sowie die Begriffe *erfüllbar* und *allgemeingültig* sind für eine Signatur $\Sigma$ analog zur Aussagenlogik definiert.

### Definition (Modellbeziehung)

1. Eine $\Sigma$-Interpretation *erfüllt* eine Formel $\alpha$ genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ gilt.
2. Eine $\Sigma$-Interpretation *erfüllt* eine Formelmenge $\Phi$ genau dann, wenn $\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{w}$ für alle $\alpha$ aus $\Phi$ gilt.

Alternativ sagt man dann auch $\mathfrak{I}$ *ist Modell von* $\alpha$ bzw. $\mathfrak{I}$ *ist Modell von* $\Phi$ (oder $\alpha$ *gilt bei* $\mathfrak{I}$ bzw. $\Phi$ *gilt bei* $\mathfrak{I}$) und schreibt: $\mathfrak{I} \models \alpha$ bzw. $\mathfrak{I} \models \Phi$.

# Modellbeziehung (Prädikatenlogik) (2)

## Beispiele

1. Sei $\alpha_1 = \exists v_1.\exists v_2.\exists v_3.(v_1 \not\equiv v_2 \wedge v_1 \not\equiv v_3 \wedge v_2 \not\equiv v_3)$. Ein Modell von $\alpha_1$ hat einen Grundbereich mit mindestens drei verschiedenen Elementen, es gilt z.B. $(\mathcal{N}, \beta) \models \alpha_1$, wobei $\beta$ eine beliebige Belegung ist.
2. Sei $\alpha_2 = \forall v_1.\forall v_2.(v_1 \not\equiv v_0 \wedge v_2 \not\equiv v_0 \Rightarrow f(v_1, v_2) \not\equiv v_0)$. Ein Modell von $\alpha_2$ ist zum Beispiel $(\mathcal{W}, \beta)$, wobei $\beta(v_0) := \epsilon$ und $f := \circ$.
3. Sei $\Sigma$ die Signatur, die nur ein zweistelliges Funktionssymbol $\cap$ und keine Konstanten und keine Relationssymbole hat.

   Die $\Sigma$-Struktur $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}(\cap)$ der Schnitt zweier Mengen ist, und die Belegung $\beta(v_0) = \emptyset$ ist kein Modell von $\alpha_2$.

# Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit (Prädikatenlogik)

## Definition

1. Eine Formel $\alpha$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \alpha$ für eine $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt.
2. Eine Formel $\alpha$ heißt *allgemeingültig*, genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \alpha$ für jede $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt.
3. Eine Formelmenge $\Phi$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$ für eine $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt.
4. Eine Formelmenge $\Phi$ heißt *allgemeingültig*, genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$ für jede $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt.

## Theorem (Löwenheim und Skolem)

*Jede erfüllbare PL-Formel ist über einem abzählbaren Grundbereich erfüllbar.*

## Beweis.

Siehe z.B. [3] Kapitel VI, §1, Beweis von Satz 1.1.

# Semantische Folgerungsbeziehung (Prädikatenlogik)

## Definition (semantische Folgerung)

Seien $\Sigma$ eine Signatur und $\Phi$ eine PL-Formelmenge und $\beta$ eine PL-Formeln. Gilt für jede $\Sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}$, für die $\mathfrak{I} \models \Phi$ gilt, auch $\mathfrak{I} \models \beta$, dann sagt man: *aus $\Phi$ folgt $\beta$*, und schreibt: $\Phi \models \beta$.

## Notation

Für $\{\alpha\} \models \beta$ schreiben wir $\alpha \models \beta$.
Für $\emptyset \models \beta$ schreiben wir $\models \beta$.

# Äquivalenzbegriffe (Prädikatenlogik) (1)

## Definition (semantische Äquivalenz)

Zwei PL-Formeln $\alpha$ und $\beta$ heißen *semantisch äquivalent*, genau dann, wenn für alle $\Sigma$-Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\alpha^{\mathfrak{I}} = \beta^{\mathfrak{I}}$. Wir schreiben: $\alpha \approx \beta$.

## Definition (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

Zwei PL-Formeln $\alpha$ und $\beta$ heißen *erfüllbarkeitsäquivalent* genau dann, wenn $\alpha$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\beta$ erfüllbar ist. Wir schreiben: $\alpha \approx_{\mathsf{sat}} \beta$. (Dabei steht sat für *satisfiability* (engl. für Erfüllbarkeit).)

# Äquivalenzbegriffe (Prädikatenlogik) (2)

**Beispiel**

Sei $\Sigma = (\emptyset, (F_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_n)_{n \in \mathbb{N}})$, wobei $F_n = \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$, $P_1 = \{P\}$ und $P_n = \emptyset$ für $n \neq 1$. Die Formeln $\forall v_0.P(v_0)$ und $\forall v_0.\neg P(v_0)$ sind erfüllbarkeitsäquivalent, aber nicht semantisch äquivalent.

**Lemma**

*Sind zwei Formeln $\alpha$ und $\beta$ semantisch äquivalent, so sind sie auch erfüllbarkeitsäquivalent.*

**Bemerkung**

Erfüllbarkeitsäquivalenz ist also ein schwächerer Äquivalenzbegriff als semantische Äquivalenz.

# Endlichkeitssatz (Prädikatenlogik)

Wie auch in der Aussagenlogik gilt auch in der Prädikatenlogik der Endlichkeitssatz.

**Theorem**

*Sei $\Sigma$ eine Signatur. Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq PL(\Sigma)$ gilt: Die Formelmenge $\Phi$ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.*

**Korollar**

*Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq PL(\Sigma)$ und jede PL-Formel $\psi$ gilt: $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn aus einer endlichen Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ folgt: $\Phi_0 \models \psi$.*

**Beweis.**

Siehe z.B. [3], Kapitel VI, §2, Satz 2.1. $\square$

# Literatur


1. Martin Otto, Formale Grundlage der Informatik II, Skript
   `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/lehrmaterial/SS2008/FGI_II/Skript/ALnotes.pdf` und
   `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/lehrmaterial/SS2008/FGI_II/Skript/FOnotes.pdf`
2. Uwe Kastens, Hans Kleine Büning,
   Modellierung - Grundlagen und formale Methoden
   Hanser, 2. Aufl 2008
3. H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas,
   Einführung in die mathematische Logik
   Spektrum, 5. Aufl. 2007