Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
11.–15. Mai

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Basistransformation)

Die lineare Abbildung ϕ sei durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ gegeben. Wie sieht die Matrix A' aus, die ϕ bezüglich des um $\frac{\pi}{4}$ gedrehten Koordinaten-Kreuzs darstellt?

Aufgabe G14 (Determinanten)

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G15 (Determinantenberechnung)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, das heißt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$ gilt $a_{ij} = 0$.

Zeige, dass die Determinante von A das Produkt der Diagonalelemente ist, das heißt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(b) Bestimme die Determinanten der Matrizen $E_{jk}(\lambda)$, T_{jk} und $D_j(\lambda)$ aus Aufgabe G10, deren Multiplikation elementare Zeilenumformungen bewirken.

(c) Wie ändert sich die Determinante durch das Anwenden einer elementaren Zeilenumformung?

(d) Zeige, dass sich jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix D umformen läßt. Welche Zeilenumformungen werden dazu benötigt? Wie hängen $\det(D)$ und $\det(A)$ zusammen?

(e) Bestimme die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

indem du sie durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix umformst.

Aufgabe G16 (Matrixinversion)

(a) Berechne die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mittels Zeilenumformungen.

(b) Angenommen es ist nicht bekannt, ob eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist. Wie kann während der Matrixinversion durch Zeilenumformungen festgestellt werden, dass A nicht invertierbar ist?

Tipp: Betrachte als Beispiel Matrix A aus Aufgabe G14.

(c) In der Vorlesung wurden zwei Möglichkeiten zur Invertierung von Matrizen vorgestellt (siehe Satz VII.6.6 und Kapitel VII.8). Welche Methode erfordert im Allgemeinen weniger Rechenaufwand?

Hausübung

Aufgabe H14 (Elementare Zeilenumformungen) (2 Punkte)

Zeige, dass sich Vertauschen zweier Zeile einer Matrix durch eine Hintereinanderausführung der in Definition VII.7.1 eingeführten elementaren Zeilenumformungen bewerkstelligen läßt.

Aufgabe H15 (Determinanten von 2×2-Matrizen) (2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\det(A) = 0$. Zeige, dass einer der Spaltenvektoren ein skalares Vielfache des anderen Spaltenvektors ist.

Aufgabe H16 (Determinaten von Blockmatrizen) (2 Punkte)

Die Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ habe die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$.
Zeige, daß die Gleichung

$$\det(M) = \det(A)\det(C)$$

gilt.
Tipp: Betrachte die Transformation von M in eine obere Dreiecksmatrix mittels elementarer Zeilenoperationen.

Aufgabe H17 (Rechenaufwand der Determinantenberechnung) (0 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix ($n \in \mathbb{N}$). Wir haben zwei Methoden kennengelernt, um die Determinante von A zu berechnen: Entweder kann die rekursive Formel des Laplaceschen Entwicklungssatzes (Satz VII.6.3 im Skript) benutzt werden oder die Matrix wird mittels elementarer Zeilenoperationen in eine obere Dreiecksmatrix umgewandelt und anschließend das Produkt der Diagonaleinträge gebildet (falls eine ungerade Anzahl von Zeilenvertauschungen ausgeführt wurde, muß noch das Vorzeichen umgedreht werden) (siehe Aufgabe G15).

Bestimme jeweils für beide Verfahren die Anzahl der benötigten elementaren Rechenoperationen (Addition, Multiplikation, Division) im schlechtesten Fall. Hierbei kann die Multiplikation mit $(-1)^{i+j}$ im Laplaceschen Entwicklungssatz vernachlässigt werden.

Berechne jeweils die Anzahl der Rechenoperationen für $n = 2, 3, 5, 10$ und vergleiche.

Tipp: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$