Formale Modellierung 1

Modul 2 (v1.0)

Kanonikvorlesung: Foundations of Computing

Heiko Mantel

MAIS, TU Darmstadt, WS11/12

Formale Modellierung

Formalisierung eines informell beschriebenen Sachverhalts

In Modul 0, wurde ein Beispiel für ein formales Modell gegeben.

- **Wie kommt man systematisch auf ein solches formales Modell?**
- **Welche Konzepte verwendet man bei der Modellierung?**

Beispiel [aus Kastens, Kleine Büning: Modellierung]

Die EU-Kommission hat beschlossen, die Entscheidungsprozesse der EU mit formalen Methoden zu modellieren. Damit sollen drei Arbeitskreise befasst werden. An der Aktion beteiligen sich zunächst die Nationen Deutschland, Frankreich, Österreich und Spanien. Jede entsendet drei Delegierte. Die Arbeitskreise sollen so gebildet werden, dass in jedem Arbeitskreis jede Nation vertreten ist und dass unter Berücksichtigung der Fremdsprachenkenntnisse der Delegierten es in jedem Arbeitskreis eine gemeinsame Sprache gibt, die alle beherrschen.

Aufgabenstellung:

Die oben beschriebene Situation soll formal modelliert werden.

Übersicht: Modul 2

Systematisches Vorgehen bei der Modellierung

Konzepte zur formalen Modellierung

- ❑ Symbole
- ❑ Wertebereiche
- ❑ Kartesisches Produkt
- ❑ Potenzmenge
- ❑ Relationen
- ❑ Funktionen

Formale Modellierung von Anforderungen

Vorgehen bei der Modellierung

Systematisches Vorgehen

1. **Schritt:**
   Identifikation relevanter Dinge
2. **Schritt:**
   Modellierung der relevanten Dinge durch Symbole
3. **Schritt:**
   Strukturierung der Symbolmenge durch Wertebereiche
4. **Schritt:**
   Modellierung von Beziehungen durch Relationen
5. **Schritt:**
   Modellierung von Eigenschaften durch Funktionen
6. **Schritt:**
   Modellierung der Anforderungen durch Relationen

Übersicht: Modul 2

Systematisches Vorgehen bei der Modellierung

Konzepte zur formalen Modellierung

- Symbole
- Wertebereiche
- Kartesisches Produkt
- Potenzmenge
- Relationen
- Funktionen

Formale Modellierung von Anforderungen

Objekte und Subjekte (1)

1. Schritt: Identifikation relevanter Dinge

- Welche Substantive beschreiben relevante Subjekte/Objekte?

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Die EU-Kommission hat beschlossen, die Entscheidungsprozesse der EU mit formalen Methoden zu modellieren. Damit sollen **drei Arbeitskreise** befasst werden. An der Aktion beteiligen sich zunächst die Nationen **Deutschland**, **Frankreich**, **Österreich** und **Spanien**. Jede entsendet **drei Delegierte**. Die Arbeitskreise sollen so gebildet werden, dass in jedem Arbeitskreis jede Nation vertreten ist und dass unter Berücksichtigung der Fremdsprachenkenntnisse der Delegierten es in jedem Arbeitskreis eine gemeinsame **Sprache** gibt, die alle beherrschen.

- Deutschland, Frankreich, Österreich und Spanien
- Deutsch, Französisch und Spanisch
- drei Arbeitskreise
- drei Delegierte je Land

Objekte und Subjekte (2)

2. Schritt: Modellierung der relevanten Dinge

- Symbole werden verwendet, um Objekte/Subjekte zu modellieren.
- Für jedes Objekt/Subjekt wird ein anderes Symbol verwendet.
- Ansonsten ist man in der Wahl der Symbole frei. Es ist aber hilfreich, wenn die Symbole möglichst intuitiv gewählt werden.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

- **d** (für Deutschland), **f** (für Frankreich), **au** (für Österreich), **es** (für Spanien)
- **s-d** (für Deutsch), **s-f** (für Französisch), **s-es** (für Spanisch)
- **ak1** (1. Arbeitskreis), **ak2** (2. Arbeitskreis), **ak3** (3. Arbeitskreis)
- **d1**, **d2**, **d3** (für die drei deutschen Delegierten)
- **f1**, **f2**, **f3** (für die drei französischen Delegierten)
- **au1**, **au2**, **au3** (für die drei österreichischen Delegierten)
- **es1**, **es2**, **es3** (für die drei spanischen Delegierten)

Wertebereiche (1)

Definition

Ein **Wertebereich** ist eine Menge von Werten, die im Sinne eines Modells als gleichartig angesehen werden: Wo ein Wert eines Wertebereiches W gefordert wird, kann prinzipiell auch jedes andere Element aus W diese Rolle übernehmen.

Verwendung

Wir verwenden Wertebereiche, um die Menge aller Symbole zu strukturieren. Hierfür werden Symbole als Werte betrachtet.

Möglichkeiten, Mengen anzugeben:

- **Aufzählung** aller Elemente (extensional)

  z.B. $\{ 1, 4, 9, 16, 25 \}$
- **Deklarative Bedingung**, (intensional)

  z.B. $\{ a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ist Quadratzahl und } a<30 \}$

Wertebereiche (2)

Russels Paradoxon

- Sei M die Menge aller Mengen, die M nicht enthalten, also die Menge $M = \{ x \mid M \notin x \}$.
- Frage: **Ist M ein Element von M oder nicht?**
  - Angenommen M sei ein Element von M, dann gilt $M \notin M$ nicht. Daher kann M kein Element von M sein – Widerspruch!
  - Angenommen M sei kein Element von M, dann gilt $M \notin M$. Daher muss M ein Element von M sein – Widerspruch!
- Alle möglichen Antworten führen zum Widerspruch, ein Paradoxon.

Konsequenzen von Russels Paradoxon

- Nicht jede Definition der Form $M = \{ .. \mid \phi \}$ führt zu einer Menge.
- Bei der intensionalen Definition einer Menge muss man aufpassen, dass die Menge wohldefiniert ist.

Wertebereiche (3)

Lösungsmöglichkeit (Russels Paradoxon)

Verwendet man in der Formel ϕ nur Begriffe, die bereits definiert wurden (insbesondere sollte das Symbol M nicht in ϕ auftauchen), so kann man sicher sein, dass die Menge M wohldefiniert ist.

Beispiel

Induktive Definition einer Familie von Mengen $(M(i))_{i \in \mathbb{N}}$, z.B.

- $\mathbf{M(1) := \{1\}}$
- $\mathbf{M(i) := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \in M(i-1) \vee k=i \}}$ falls i eine Quadratzahl ist
- $\mathbf{M(i) := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \in M(i-1) \}}$ falls i keine Quadratzahl ist

Beachte: auf der rechten Seite der Definition von **M(i)** werden nur Mengen mit einem kleineren Index verwendet, also Mengen, die schon definiert wurden. Daher ist die Menge M(i) für jedes $i \in \mathbb{N}$ wohldefiniert.

Wertebereiche (4)

3. Schritt: Strukturierung der Symbolmenge

- Für jeden Oberbegriff wird ein Wertebereich eingeführt.
- In der Wahl der Namen der Wertebereiche ist man frei.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

- Der Oberbegriff **„Nation“** wird durch folgende Menge modelliert:
  NATION = { d, f, au, es }
- Der Oberbegriff **„Sprachen“** wird wie folgt modelliert
  SPRACHE = { s-d, s-f, s-es }

Modellierung weiterer Oberbegriffe aus dem Szenario:

- **AKS = { ak1, ak2, ak3 }** für „Arbeitskreise“
- **D-DEL = { d1, d2, d3 }** für „deutsche Delegierte“
- **F-DEL = { f1, f2, f3 }** für „französische Delegierte“
- **AU-DEL = { au1, au2, au3 }** für „österreichische Delegierte“
- **ES-DEL = { es1, es2, es3 }** für „spanische Delegierte“

Vereinigung, Schnitt, Differenz

Definition

- Die **Vereinigung** zweier Mengen M und N ist die Menge
  $M\cup N$:= { a | $a\in M$ oder $a\in N$ }.
- Die **Schnittmenge** zweier Mengen M und N ist die Menge
  $M\cap N$:= { a | $a\in M$ und $a\in N$ }. Wenn $M\cap N=\{\}$ gilt, dann heißen die Mengen M und N **disjunkt**.
- Die **Differenz** zweier Mengen M und N ist die Menge
  $M\setminus N$:= { a | $a\in M$ und nicht $a\in N$ }.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

- Der Wertebereich **DEL = D-DEL $\cup$ F-DEL $\cup$ AU-DEL $\cup$ ES-DEL** modelliert die Menge aller Delegierten.
- Für die Wertebereiche D-DEL und F-DEL gilt D-DEL$\cap$F-DEL={}. Die Wertebereiche D-DEL und F-DEL sind also disjunkt.
- Der Wertebereich DEL\D-DEL modelliert die Menge aller Delegierten ohne die drei deutschen Delegierten.

Teilmengen und Gleichheit

Definition

- Menge M ist eine **Teilmenge** einer Menge N (geschrieben **$M \subseteq N$**) genau dann wenn für jedes $a \in M$ auch $a \in N$ gilt.

Definition

- Eine Menge M ist **gleich** einer Menge N (geschrieben **$M = N$**) genau dann wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gelten.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

- Für die Wertebereiche D-DEL und DEL gilt D-DEL$\subseteq$DEL.

Kartesisches Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt zweier Mengen M und N** ist die Menge aller Paare bestehend aus einem Element aus M als erstem Element und einem Element aus N als zweiten Element, also die Menge **$M \times N$** $= \{ (m,n) \mid m \in M \text{ und } n \in N \}$.

Beispiel (Skat)

Die Mengen WERT und FARBE seien wie folgt definiert:

- **WERT** = { 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass }
- **FARBE** = { ♣, ♦, ♥, ♠ }

Dann kann man ein Kartenspiel durch folgende Menge modellieren:

- **SKAT-KARTEN = FARBE × WERT.**

Es gilt also z.B. (♣,8)∈SKAT-KARTEN und (♥,Ass)∈SKAT-KARTEN.

Mehrstellige Operationen (1)

Definition

Das **kartesische Produkt** $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i$ einer endlichen Folge $M_1,\ldots, M_n$ von Mengen ist die wie folgt rekursiv definierte Menge:

- $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i = \{()\}$ falls $n=0$
- $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i = M_1$ falls $n=1$
- $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i = \times_{i\in\{1,..,n-1\}}M_i \times M_n$ falls $n>1$

Die Elemente des kartesischen Produkts $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i$ heißen **n-Tupel**.

Notation (kartesische Produkte)

- Wir schreiben auch $\mathbf{M_1\times\ldots\times M_n}$ anstatt $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i$.
- Man schreibt $\mathbf{M^n}$ anstatt $\times_{i\in\{1,..,n\}}M_i$ falls $M_i=M$ für alle $i\in\{1..n\}$.

Notation (Tupel)

- Wir schreiben auch **(m1, m2, …, mn)** anstatt (((m1,m2),…),mn).

Mehrstellige Operationen (2)

Definition

Die **Vereinigung** $\cup_{i\in\{1,..,n\}}M_i$ und die **Schnittmenge** $\cap_{i\in\{1,..,n\}}M_i$ einer nicht leeren, endlichen Folge $M_1,\ldots, M_n$ von Mengen ist wie folgt definiert:

- $\cup_{i\in\{1,..,n\}}M_i = M_1$ falls $n=1$
- $\cup_{i\in\{1,..,n\}}M_i = \cup_{i\in\{1,..,n-1\}}M_i \cup M_n$ falls $n>1$
- $\cap_{i\in\{1,..,n\}}M_i = M_1$ falls $n=1$
- $\cap_{i\in\{1,..,n\}}M_i = \cap_{i\in\{1,..,n-1\}}M_i \cap M_n$ falls $n>1$

Notation

- Wir schreiben auch $\mathbf{M_1\cup\ldots\cup M_n}$ anstatt $\cup_{i\in\{1,..,n\}}M_i$.
- Wir schreiben auch $\mathbf{M_1\cap\ldots\cap M_n}$ anstatt $\cap_{i\in\{1,..,n\}}M_i$.

Endliche Folgen

Definition

Die **Menge aller nicht leeren, endlichen Folgen über einer Menge M** ist die wie folgt definierte Menge **M^+** $= \cup_{i \in \mathbb{N}, i>0} M^i$.

Definition

Die **Menge aller endlichen Folgen über M** ist die Menge **M^***$=M^+ \cup \{()\}$.

Notation

Wir benutzen die Symbole „**(**“ , „**)**“ , und „**,**“ (Komma) wie folgt:

- „**(**“ markiert den Anfang einer Folge.
- „**)**“ markiert das Ende einer Folge.
- „**,**“ wird benutzt, um die Elemente in einer Folge zu trennen.

Die leere Folge „**()**“ enthält keine Elemente.

Beispiel (Skat)

Für die Modellierung des Kartenspiels gilt z.B.:

- ((♣,8), (♥,Ass), (♥, Bube)) $\in$ SKAT-KARTEN$^+$.

Folgen können z.B. eingesetzt werden, um das Ablegen der Karten formal zu modellieren.

Potenzmengen

Definition

Die **Potenzmenge einer Menge M** ist die Menge aller Teilmengen von M, also die Menge $\mathcal{P}(M) = \{ N \mid N \subseteq M \}$.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Die Menge **SPRACH-MENGE** sei definiert als die Potenzmenge der Menge SPRACHE. Es gilt also

SPRACH-MENGE = { {},
{s-d}, {s-f}, {s-es},
{s-d, s-f}, {s-d, s-es}, {s-f, s-es},
{s-d, s-f, s-es} }

Elemente der Menge SPRACH-MENGE können, z.B. eingesetzt werden, um die tatsächlichen Fremdsprachenkenntnisse von Delegierten zu modellieren (siehe spätere Folie zu Relationen). Die Menge SPRACH-MENGE modelliert alle potentiell möglichen Fremdsprachenkenntnisse von Delegierten.

Relationen (1)

Definition

Eine **Relation über $M_1, \ldots, M_n$** ist eine Menge R von n-Tupeln aus dem Wertebereich $M_1 \times \ldots \times M_n$, d.h. $R \in \mathcal{P}(M_1 \times \ldots \times M_n)$.

Notation

- Anstatt $(s1, \ldots, sn) \in R$ schreiben wir auch **R(s1, …, sn)**.
- Ist die Relation R zweistellig, so schreiben wir anstatt $(s1,s2) \in R$ auch **s1 R s2**.

Verwendung

Wir verwenden Relationen, um Beziehungen zwischen Objekten und Subjekten zu modellieren. Gilt z.B. **$o < p$**, dann stehen die durch die Symbole o und p modellierten Objekte in der durch die Relation $<$ modellierten Beziehung.

Relationen (2)

4. Schritt: Modellierung von Beziehungen

- Für jede relevante Beziehung wird eine Relation eingeführt.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Die tatsächlichen Fremdsprachenkenntnisse der Delegierten können durch eine Relation **SPRACH-KOMPENTENZ $\subseteq$ DEL$\times$SPRACHE** modelliert werden. Bei der Definition einer solchen Relation ist darauf zu achten, dass **(v,s)$\in$SPRACH-KOMPENTENZ** genau dann gilt, **wenn der oder die durch das Symbol v modellierte Delegierte auch tatsächlich die durch das Symbol s modellierte Sprache beherrscht**.

Relationen (3)

Definition

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ heißt

- **reflexiv** genau dann wenn
  $R(x,x)$ für alle $x \in M$ gilt.
- **symmetrisch** genau dann wenn
  für alle $x,y \in M$ aus $R(x,y)$ folgt, dass auch $R(y,x)$ gilt.
- **asymmetrisch** genau dann wenn
  für alle $x,y \in M$ aus $R(x,y)$ folgt, dass $R(y,x)$ nicht gilt.
- **antisymmetrisch** genau dann wenn
  für alle $x,y \in M$ aus $R(x,y)$ und $R(y,x)$ folgt, dass $x=y$ gilt.
- **transitiv** genau dann wenn
  für alle $x,y,z \in M$ aus $R(x,y)$ und $R(y,z)$ folgt, dass $R(x,z)$ gilt.
- **alternativ** genau dann wenn
  für alle $x,y \in M$ $R(x,y)$ oder $R(y,x)$ gilt.

Relationen (4)

Definition

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation** wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Quasiordnung** wenn sie reflexiv und transitiv ist.

Definition

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Ordnung** (oder auch **partielle Ordnung**) wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Definition

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **totale Ordnung** (oder auch **lineare Ordnung**) wenn sie alternativ, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Konvention

Vereinfachung

Im folgenden schreiben und sprechen wir z.B. anstatt
„der/die durch das Symbol v modellierte Delegierte"
verkürzend auch **„der Delegierte v"**.
Man beachte, dass die zweite Formulierung nur eine Kurzform für die erste ist, denn v ist ja ein Symbol und kein Delegierter.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Im Beispiel auf der vorhergehenden Folie würden wir statt

- „… Bei der Definition einer solchen Relation ist darauf zu achten, dass (v,s)∈SPRACH-KOMPENTENZ genau dann gilt, wenn der oder die **durch das Symbol v modellierte Delegierte** auch tatsächlich die **durch das Symbol s modellierte Sprache** beherrscht."

folgendes schreiben:

- „… Bei der Definition einer solchen Relation ist darauf zu achten, dass (v,s)∈SPRACH-KOMPENTENZ genau dann gilt, wenn der oder die **Delegierte v** auch tatsächlich die **Sprache s** beherrscht."

Funktionen (1)

Definition

Eine **Funktion f von D nach B** ist eine Relation über $D \times B$, wobei es für jedes $d \in D$ höchstens ein $b \in B$ mit $(d,b) \in f$ geben darf. Die Menge D heißt **Definitionsbereich** von f, und die Menge B heißt **Bildbereich** von f. Die Menge aller Funktionen von D nach B wird mit $\mathbf{D \rightharpoonup B}$ bezeichnet.

Definition

Eine Funktion f heißt **totale Funktion** wenn es für jedes $d \in D$ ein $b \in B$ gibt, so dass $(d,b) \in f$ gilt. Die Menge aller totalen Funktionen von D nach B wird mit $\mathbf{D \to B}$ bezeichnet.

Notation

- Man schreibt auch **f(d)** für r falls $(d,r) \in f$ und $\mathbf{f(d)\uparrow}$ falls es kein $r \in R$ gibt, so dass $(d,r) \in f$.
- Anstatt $f \in D \rightharpoonup B$ bzw. $f \in D \to B$ schreibt man auch $\mathbf{f:D \rightharpoonup B}$ bzw. $\mathbf{f:D \to B}$.

Verwendung

Wir verwenden Funktionen, um Attribute von Objekten und Subjekten zu modellieren. Gilt z.B. **f(d)=b**, dann hat das Attribut **f** von Objekt **d** die Ausprägung **b**.

Funktionen (2)

5. Schritt: Modellierung von Attributen

- Für jedes relevante Attribut wird eine Funktion eingeführt.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Wir modellieren die Nationalitäten von Delegierten durch eine totale Funktion **nationalität: DEL→NATION**. Die Funktion ordnet einem Delegierten v wie folgt eine Nationalität zu:

- **nationalität(v) = d** falls $v \in$ D-DEL
- **nationalität(v) = f** falls $v \in$ F-DEL
- **nationalität(v) = au** falls $v \in$ AU-DEL
- **nationalität(v) = es** falls $v \in$ ES-DEL

Funktionen (3)

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Die Zuordnung der Delegierten zu den drei Arbeitskreisen wird durch eine totale Funktion **zuordnung: AKS→$\mathscr{P}$(DEL)** modelliert. Um eine gegebene Zuordnung von Delegierten formal zu modellieren, definiert man die Funktion **zuordnung** so, dass der Wert der Funktion für einen Arbeitskreis **ak** die Menge aller Delegierten ist, die diesem Arbeitskreis zugeordnet sind.

Beachte

Unsere Modellierung erlaubt, dass z.B.

- ein Delegierter mehreren Arbeitskreisen zugeordnet wird;
- ein Delegierter keinem Arbeitskreis zugeordnet wird;
- Arbeitskreise unterschiedlich viele Delegierte haben;
- manche Arbeitskreise gar keine Delegierten haben.

Unsere Modellierung ist sehr allgemein. Wir werden später sehen, wie man Einschränkungen an zulässige Zuordnungen modellieren kann (siehe 6. Schritt).

Funktionen (4)

Definition

Eine **Konstante aus M** ist eine totale Funktion **$c:\{()\}\to M$**, also eine Funktion, deren Definitionsbereich nur das leere Tupel enthält. Konstanten werden auch als **nullstellige Funktionen** bezeichnet.

Definition

Eine Funktion $f \in D \rightharpoonup R$ heißt

- **surjektiv** genau dann wenn
  es für jedes $y \in R$ ein $x \in D$ gibt, so dass $f(x)=y$ gilt.
- **injektiv** genau dann wenn
  für alle $x,y \in D$ aus $f(x)=f(y)$ folgt, dass $x=y$ gilt.
- **bijektiv** genau dann wenn
  f sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

Abschluss der Modellierung (1)

Was haben wir bereits modelliert?

- Oberbegriffe Nationen, Sprachen, Arbeitskreise und Delegierte
  Wertebereiche: **NATION**, **SPRACHE**, **AKS**, **DEL**
- Potentielle Sprachkenntnisse der Delegierten
  Wertebereich: **SPRACH-MENGE**
- Tatsächliche Sprachkenntnisse der Delegierten
  Relation: **SPRACH-KOMPETENZ**
- Nationalität der Delegierten
  Funktion: **nationalität**
- Zuordnung der Delegierten zu Arbeitskreisen
  Funktion: **zuordnung**

Was müssen wir noch modellieren?

Die Anforderung an die Zuordnung von Delegierten

- Jede Nation ist in jedem Arbeitskreis vertreten.
- In jedem Arbeitskreis gibt es eine gemeinsame Sprache.

Abschluss der Modellierung (2)

Beachte

- Die Wertebereiche **NATION**, **SPRACHE**, **AKS**, **DEL** und **SPRACH-MENGE** sowie die Funktion **nationalität** wurden konkret definiert .
- Hingegen wurden die Relation **SPRACH-KOMPETENZ** und die Funktion **zuordnung** nicht definiert, sondern es wurden nur die Wertebereiche angegeben, über denen diese zu definieren sind, nämlich **DEL×SPRACHE** und **AKS→$\mathcal{P}$(DEL)**.

Die konkrete Definition der Relation **SPRACH-KOMPETENZ** und der Funktion **zuordnung** hängen vom gegebenen Szenario ab. Da wir allgemeine Aussagen über beliebige Szenarios formulieren wollen, lassen wir die Definitionen offen.

Annahme

Auf den folgenden Folien nehmen wir an, dass die Relation **SPRACH-KOMPETENZ** und die Funktion **zuordnung** gegeben seien.

Übersicht: Modul 2

Systematisches Vorgehen bei der Modellierung

Konzepte zur formalen Modellierung

- Symbole
- Wertebereiche
- Kartesisches Produkt
- Potenzmenge
- Relationen
- Funktionen

Formale Modellierung von Anforderungen

Modellierung von Anforderungen (1)

6. Schritt: Modellierung der Anforderungen

- Anforderungen werden wiederum durch Relationen beschrieben.

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Die erste Anforderung an die Zuordnung zu Arbeitskreisen ist, dass jede Nation in jedem Arbeitskreis vertreten ist. Um diese Bedingung zu modellieren, führen wir die folgende Hilfsfunktion ein:

- **nationalitäten : AKS$\rightarrow \mathcal{P}$(NATION)**
- **nationalitäten(ak) = { nationalität(v) | v$\in$zuordnung(ak) }**

Zur Modellierung der Anforderung führen wir folgende Relation ein:

- **ANFORDERUNG1 $\subseteq$ AKS$\rightarrow\mathcal{P}$(DEL)**
- **zuordnung $\in$ ANFORDERUNG1** genau dann wenn
  für alle ak$\in$AKS gilt { d, f, au, es } $\subseteq$ nationalitäten(ak).

Modellierung von Anforderungen (2)

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Die zweite Anforderung an die Zuordnung zu Arbeitskreisen ist, dass es in jedem Arbeitskreis eine gemeinsame Sprache geben muss. Für die Modellierung führen wir folgende Hilfsfunktionen ein:

- **spricht : DEL→SPRACH-MENGE**
- **spricht(v) = { s∈SPRACHE | (v,s)∈SPRACH-KOMPETENZ }**

und

- **gemeinsame-sprachen : AKS→SPRACH-MENGE**
- **gemeinsame-sprachen(ak) = $\bigcap_{v \in zuordnung(ak)}$spricht(v)**

Zur Modellierung der Anforderung führen wir folgende Relation ein:

- **ANFORDERUNG2 ⊆ AKS→$\mathcal{P}$(DEL)**
- **zuordnung ∈ ANFORDERUNG2** genau dann wenn **für alle ak∈AKS gilt gemeinsame-sprachen(ak) ≠ {}**.

Beachte

Die Funktion **spricht** ist aus **DEL→$\mathcal{P}$(SPRACHE)**, da **DEL→SPRACHE** nicht zur Modellierung geeignet ist. Ein Delegierter kann ja mehr als eine Sprache sprechen.

Modellierung von Anforderungen (3)

Beispiel (Arbeitskreise der EU)

Mit Hilfe der beiden Relationen lässt sich nun leicht modellieren, wann eine Zuordnung zulässig ist. Dazu führen wir wiederum eine Relation über dem Funktionenraum für Zuordnungen ein:

- **ZULÄSSIG $\subseteq$ AKS$\rightarrow\mathcal{P}$(DEL)**
- **zuordnung $\in$ ZULÄSSIG**
  genau dann wenn **zuordnung $\in$ ANFORDERUNG1**
  und
  zuordnung $\in$ ANFORDERUNG2
  gelten.

Hiermit ist die Modellierung des Beispiels abgeschlossen.

Weitere Anforderungen (1)

Es gibt viele andere Anforderungen, die man modellieren kann.

- Im folgenden illustrieren wir das an zwei Beispielen.

Beispiel (Erweiterung: Arbeitskreise der EU)

Eine weitere mögliche Anforderung an die Zuordnung von Delegierten wäre, **dass kein Delegierter in mehr als einem Arbeitskreis sein darf**. Diese Anforderung lässt sich wie folgt modellieren:

- **ANFORDERUNG3 $\subseteq$ AKS$\rightarrow\mathcal{P}$(DEL)**
- **zuordnung $\in$ ANFORDERUNG3** genau dann wenn
  für alle ak,ak‘$\in$AKS gilt
  wenn zuordnung(ak)$\cap$zuordnung(ak‘) $\neq$ {} dann ak=ak‘.

Weitere Anforderungen (2)

Beispiel (Erweiterung: Arbeitskreise der EU)

Die Anforderung, **dass jeder Delegierter mindestens einem Arbeitskreis angehören muss**, lässt sich wie folgt modellieren:

- **ANFORDERUNG4** $\subseteq$ **AKS**$\rightarrow\mathcal{P}$**(DEL)**
- **zuordnung** $\in$ **ANFORDERUNG4** genau dann wenn **es für jedes v**$\in$**DEL mindestens ein ak**$\in$**AKS gibt, so dass v**$\in$**zuordnung(ak)** .

Rückblick

Einige wesentliche Lernziele dieses Moduls

- Wie kann ich systematisch vorgehen, um ein informell beschriebenes Szenario formal zu beschreiben?
- Welche mathematischen Konzepte kann ich zur formalen Modellierung verwenden?
- Wie setze ich diese mathematischen Konzepte ein?

Systematisches Vorgehen

1. **Schritt:** Identifikation relevanter Dinge
2. **Schritt:** Modellierung der relevanten Dinge durch Symbole
3. **Schritt:** Strukturierung der Symbolmenge durch Wertebereiche
4. **Schritt:** Modellierung von Beziehungen durch Relationen
5. **Schritt:** Modellierung von Eigenschaften durch Funktionen
6. **Schritt:** Modellierung der Anforderungen durch Relationen

Literatur

Uwe Kastens, Hans Kleine Büning

Modellierung – Grundlagen und formale Methoden; Kapitel 2
Hanser Verlag, 2008, 2. Auflage (oder 1. Auflage von 2005).