Syntax und Semantik von Programmen 3

Modul 7 (v1.0)

Kanonikvorlesung: Foundations of Computing

Heiko Mantel

MAIS, TU Darmstadt, WS11/12

Motivation

Wie beweist man Aussagen über Programme formal?

- basierend auf der formal modellierten Syntax und Semantik
- Fortsetzung von Modul 6

Unterschiedliche Beweistechniken

- Fallunterscheidung (in Modul 6)
- Widerspruchsbeweis (in Modul 6)
- Strukturelle Induktion (in Modul 6)
- Induktion über Herleitungen (in diesem Modul)

Fokus dieses Moduls: Wie beweist man Eigenschaften von Programmiersprachen?

Übersicht: Modul 7

Termbeschreibungen von Herleitungen

Induktionsprinzip

- Induktion über Herleitungen

Deterministische Auswertung von Programmen

- Beweis mit Induktion über Herleitungen

Termbeschreibung von Regeln (1)

Definition

Ein **Regelterm** ist ein Ausdruck folgender Form:

$$\textbf{r-name}(\xi,(\xi_1,..,\xi_n))$$

wobei

- r-name — der Name der Regel,
- ξ — eine Grundinstanz eines Urteils ist und
- $(\xi_1,..,\xi_n)$ — eine endliche Liste von Grundinstanzen von Urteilen ist, die auch die leere Liste $()$ sein kann

Intuition

Sei σ ein beliebiger Zustand. Dann entspricht der Regelterm

$$r+(\langle 5+3,\sigma\rangle \Downarrow 8,\ (\langle 5,\sigma\rangle \Downarrow 4,\ \langle 3,\sigma\rangle \Downarrow 4))$$

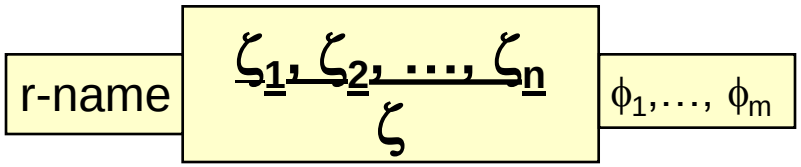
folgender Grundinstanz von r+:

$$\text{r+}\quad \frac{\langle 5,\sigma\rangle \Downarrow 4 \qquad \langle 3,\sigma\rangle \Downarrow 4}{\langle 5+3,\sigma\rangle \Downarrow 8} \quad 8 = 4+4$$

Termbeschreibung von Regeln (2)

Definition

Die durch eine Kalkülregel



repräsentierte Menge von Regeltermen ist definiert als

RTerme(r-name) = { r-name($\zeta\eta$,($\zeta_1\eta$,…,$\zeta_n\eta$))
| $\zeta\eta,\zeta_1\eta,\ldots,\zeta_n\eta$ enthalten keine Metavariablen
und $\phi_1\eta,\ldots,\phi_m\eta$ sind erfüllt }

Beispiel

Für die Kalkülregel r+ gilt zum Beispiel

- r+($\langle$5+3,$\sigma\rangle\Downarrow$8, ($\langle$5,$\sigma\rangle\Downarrow$5, $\langle$3,$\sigma\rangle\Downarrow$3)) $\in$ RTerme(r+)
- r+($\langle$5+3,$\sigma\rangle\Downarrow$8, ($\langle$5,$\sigma\rangle\Downarrow$4, $\langle$3,$\sigma\rangle\Downarrow$4)) $\in$ RTerme(r+)

aber

- r+($\langle$5+X,$\sigma\rangle\Downarrow$8, ($\langle$5,$\sigma\rangle\Downarrow$5, $\langle$X,$\sigma\rangle\Downarrow$3)) $\notin$ RTerme(r+), da der Ausdruck 5+X eine Metavariable enthält.

Termbeschreibung von Herleitungen (1)

Definition

Sei ξ eine Instanz eines Urteils ζ. Die **Herleitungen von ξ in einem Kalkül $\mathcal{K}$** (kurz: **$\mathcal{K}$-Herleitung von ξ**) sind induktiv definiert.

- Eine $\mathcal{K}$–Herleitung von ξ ist ein Term der Form
  - **r-name(ξ,($\mathcal{H}_1$,…,$\mathcal{H}_n$))** ,

  wobei
  - es in $\mathcal{K}$ eine Regel folgender Form gibt:

$$\text{r-name}\quad \frac{\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n}{\zeta}\quad \phi_1,\ldots,\ \phi_m$$

  - und es eine Substitution η gibt, so dass
    - $\xi=\zeta\eta$ und
    - $\phi_1\eta$, … und $\phi_m\eta$ erfüllt sind
    - $(\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_n)$ eine möglicherweise leere Liste von Herleitungen ist, so dass, für jedes $i\in\{1,..,n\}$, $\mathcal{H}_i$ eine Herleitung von $\zeta_i\eta$ ist.

Termbeschreibung von Herleitungen (2)

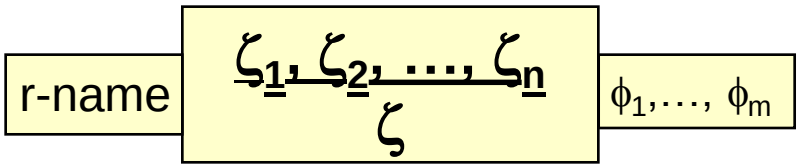
Definition

Seien $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_k$ Instanzen von Urteilen $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_k$. Eine **Herleitung von ξ aus $\xi_1, \ldots, \xi_k$ in einem Kalkül $\mathcal{K}$** (kurz: **$\mathcal{K}$-Herleitung von ξ aus $\xi_1, \ldots, \xi_k$**) ist entweder

- der Term ξ, wobei $\xi \in \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ gilt,

oder

- ein Term der Form **r-name(ξ,($\mathcal{H}_1$,…,$\mathcal{H}_n$))**, wobei
  - es in $\mathcal{K}$ eine Regel folgender Form gibt:



  - und es eine Substitution η gibt, so dass
    - $\xi = \zeta\eta$ und
    - $\phi_1\eta$, … und $\phi_n\eta$ erfüllt sind
    - $(\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_n)$ eine möglicherweise leere Liste von Herleitungen ist, so dass, für jedes $i \in \{1,..,n\}$, $\mathcal{H}_i$ eine Herleitung von $\zeta_i\eta$ aus $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ist.

Termbeschreibung von Herleitungen (3)

Notation

Wir schreiben

- $\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{K}} \xi$,

um auszudrücken, dass $\mathcal{H}$ eine $\mathcal{K}$-Herleitung von ξ ist, und

- $\vdash_{\mathcal{K}} \xi$,

um auszudrücken, dass ξ eine $\mathcal{K}$-Herleitung hat. Wenn sich der Kalkül $\mathcal{K}$ aus dem Kontext ergibt, so schreiben wir auch

- $\mathcal{H} \vdash \xi$ anstatt $\mathcal{H} \vdash_{\mathcal{K}} \xi$ und
- $\vdash \xi$ anstatt $\vdash_{\mathcal{K}} \xi$.

Notation

Die Menge aller $\mathcal{K}$-Herleitungen von ξ wird mit **$\mathrm{DER}_{\mathcal{K}}(\xi)$** bezeichnet. Ergibt sich $\mathcal{K}$ aus dem Kontext, so schreiben wir auch **$\mathrm{DER}(\xi)$**.

Notation

Die Menge aller $\mathcal{K}$-Herleitungen wird mit **$\mathrm{DER}_{\mathcal{K}}$** bezeichnet.

Nachtrag zu Modul 5

Notation

Für die Kalküle aus Modul 5 führen wir folgende Bezeichner ein:

- $\mathcal{A}$: der Kalkül zur Herleitung von Instanzen von $\langle a,\sigma\rangle \Downarrow n$
- $\mathcal{B}$: der Kalkül zur Herleitung von Instanzen von $\langle b,\sigma\rangle \Downarrow t$
- $\mathcal{C}$: der Kalkül zur Herleitung von Instanzen von $\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'$

Definition

Sei $\sigma \in \Sigma$ ein Zustand. Dann ist $\sigma[x\backslash n]$ der Zustand, der der Programmvariablen x den Wert n und jeder anderen Programmvariablen y den Wert $\sigma(y)$ zuordnet.

Übersicht: Modul 7

Termbeschreibungen von Herleitungen

Induktionsprinzip

- Induktion über Herleitungen

Deterministische Auswertung von Programmen

- Beweis mit Induktion über Herleitungen

Induktion über Herleitungen

Unser Ziel

- ein Induktionsprinzip über Herleitungen

Vorgehen

- Definition einer wohlfundierten Relation $\prec$ über Herleitungen
- Instantiierung der wohlfundierten Induktion mit $\prec$

Definition

Die Herleitungen $\mathscr{H}_1,\ldots,\mathscr{H}_n$ sind die **direkten Teilherleitungen** einer Herleitung r-name(ξ,($\mathscr{H}_1,\ldots,\mathscr{H}_n$)).

Definition

Wir definieren $\prec$ als zweistellige Relation auf Herleitungen durch

- $\mathscr{H}_i \prec \mathscr{H}$ genau dann wenn $\mathscr{H}_i$ eine direkte Teilherleitung von $\mathscr{H}$ ist.

Somit haben wir ein Induktionsprinzip für Herleitungen!

Aber, wie sieht das Induktionsprinzip für einen Kalkül aus?

Induktion über Herleitungen in $\mathcal{C}$ (1)

Beweisprinzip der Induktion über Herleitungen in $\mathcal{C}$

Sei P eine einstellige Relation über der Menge aller Herleitungen in $\mathcal{C}$. Wenn folgende Bedingungen gelten:

- $\forall \sigma \in \Sigma$: P(rsk($\langle$skip,$\sigma\rangle \rightarrow \sigma$, ()))
- $\forall \sigma \in \Sigma$: $\forall$x$\in$Loc: $\forall$a$\in$Aexp: $\forall$n$\in$N: $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{A}}(\langle a,\sigma\rangle \Downarrow n)$:
  P(r:=($\langle$x:=a,$\sigma\rangle \rightarrow \sigma$[x\n], ($\mathcal{H}$1))
- $\forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$: $\forall$c1,c2$\in$Com:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'')$: $\forall \mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c2,\sigma''\rangle \rightarrow \sigma')$:
  [(P($\mathcal{H}$1) $\wedge$ P($\mathcal{H}$2)) $\Rightarrow$ P(r;($\langle$c1;c2,$\sigma\rangle \rightarrow \sigma'$, ($\mathcal{H}$1, $\mathcal{H}$2)))]
- $\forall \sigma,\sigma' \in \Sigma$: $\forall$b$\in$Bexp: $\forall$c1,c2$\in$Com:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma\rangle \Downarrow$true): $\forall \mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma\rangle \rightarrow \sigma')$:
  [(P($\mathcal{H}$2)) $\Rightarrow$ P(rift($\langle$if b then c1 else c2 fi, $\sigma\rangle \rightarrow \sigma'$, ($\mathcal{H}$1, $\mathcal{H}$2)))]
- $\forall \sigma,\sigma' \in \Sigma$: $\forall$b$\in$Bexp: $\forall$c1,c2$\in$Com:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma\rangle \Downarrow$false): $\forall \mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c2,\sigma\rangle \rightarrow \sigma')$:
  [(P($\mathcal{H}$2)) $\Rightarrow$ P(riff($\langle$if b then c1 else c2 fi, $\sigma\rangle \rightarrow \sigma'$, ($\mathcal{H}$1, $\mathcal{H}$2)))]

Fortsetzung auf nächster Folie

Induktion über Herleitungen in $\mathcal{C}$ (2)

Beweisprinzip (Fortsetzung):

- $\forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$: $\forall b \in Bexp$: $\forall c1 \in Com$:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma\rangle \Downarrow true)$:
  $\forall \mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'')$: $\forall \mathcal{H}3 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle \text{while b do c1 od},\sigma''\rangle \rightarrow \sigma')$:
  $[(P(\mathcal{H}2) \wedge P(\mathcal{H}3)) \Rightarrow P(\text{ rwht}(\langle \text{while b do c1 od}, \sigma\rangle \rightarrow \sigma', (\mathcal{H}1,\mathcal{H}2,\mathcal{H}3)))]$
- $\forall \sigma \in \Sigma$: $\forall b \in Bexp$: $\forall c1 \in Com$:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma\rangle \Downarrow false)$:
  $P(\text{ rwhf}(\langle \text{while b do c1 od}, \sigma\rangle \rightarrow \sigma, (\mathcal{H}1)))$

dann gilt auch

- $\forall \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}$: $P(\mathcal{H})$

Übersicht: Modul 7

Termbeschreibungen von Herleitungen

Induktionsprinzip

- Induktion über Herleitungen

Deterministische Auswertung von Programmen

- Beweis mit Induktion über Herleitungen

Deterministische Berechnung (1)

Theorem

Für alle $c \in Com$ und alle Zustände σ, σ', σ'' gilt:
wenn $\langle c,\sigma\rangle \to \sigma'$ und $\langle c,\sigma\rangle \to \sigma''$ herleitbar sind, dann gilt $\sigma' = \sigma''$.

Beweis

- Es genügt zu zeigen, dass
  $\forall c \in Com: \forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma:$
  $\forall \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma'): \forall \mathcal{H}' \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma''): \sigma' = \sigma''$
- Diese Aussage ist äquivalent zu
  $\forall \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}: \forall c \in Com: \forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma:$
  $[\, \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma') \Rightarrow \forall \mathcal{H}' \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma''): \sigma' = \sigma'' \,]$
- Wir beweisen letztere Aussage per Induktion über $\mathcal{H}$, wobei
  $P(\mathcal{H}) = \forall c \in Com: \forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma:$
  $[\, \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma') \Rightarrow \forall \mathcal{H}' \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma''): \sigma' = \sigma'' \,]$

Deterministische Berechnung (2)

Beweis (Fortsetzung)

Fall $\forall \sigma^* \in \Sigma$: P(rsk($\langle$skip,$\sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^*$, ()))

- Es ist zu zeigen, dass
  $\forall \sigma^* \in \Sigma$: $\forall c \in Com$: $\forall \sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma$:
  $[rsk(\langle skip,\sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^*,()) \in DER(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma') \Rightarrow \forall \mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma''): \sigma'' = \sigma']$
- Seien $c \in Com$ und $\sigma^*, \sigma, \sigma', \sigma'' \in \Sigma$ beliebig.
- Aus $rsk(\langle skip,\sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^*,()) \in DER(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma')$ folgt, dass c=skip und $\sigma = \sigma' = \sigma^*$.
- Sei $\mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'')$ beliebig.
- Die einzige Regel, in deren Konklusion skip vorkommt, ist rsk.
- Daher muss $\mathcal{H}' = rsk(\langle skip,\sigma\rangle \rightarrow \sigma,())$ gelten, und somit gilt $\sigma'' = \sigma$.
- Also gilt auch $\sigma'' = \sigma = \sigma'$.

Beachte: Diese zwei Schritte werden wir in den nachfolgenden Fällen abkürzen.

Deterministische Berechnung (3)

Beweis (Fortsetzung)

Fall r:=

- Es ist zu zeigen, dass
  $\forall \sigma^* \in \Sigma$: $\forall x \in Loc$: $\forall a \in Aexp$: $\forall n \in N$: $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{A}}(\langle a,\sigma^* \rangle \Downarrow n)$:
  $\forall c \in Com$: $\forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$:
  $[\, r:=(\langle x:=a,\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^*[x\backslash n],(\mathcal{H}1)) \in DER(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma')$
  $\Rightarrow \forall \mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma''): \sigma'' = \sigma' \,]$
- Seien $\sigma^*,\sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$, $c \in Com$, $x \in Loc$, $a \in Aexp$, $n \in N$ und $\mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{A}}(\langle a,\sigma^* \rangle \Downarrow n)$ beliebig.
- Die Herleitung ist $r:=(\langle x:=a,\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^*[x\backslash n],(\mathcal{H}1))$ und somit gelten: $c = x:=a$, $\sigma=\sigma^*$ und $\sigma'=\sigma^*[x\backslash n]$.
- Sei $\mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma'')$ beliebig.
- Nur in der Konklusion der Regel r:= kommt eine Zuweisung vor.
- Daher muss $\mathcal{H}' = r:=(\langle x:=a,\sigma \rangle \rightarrow \sigma[x\backslash m],(\mathcal{H}1'))$ gelten, wobei $\mathcal{H}1' \in DER_{\mathcal{A}}(\langle a,\sigma \rangle \Downarrow m)$ gilt.
- Da die Auswertung von Ausdrücken in Aexp deterministisch ist (siehe Theorem in Modul 6), muss $m=n$ gelten.
- Also gilt auch $\sigma'' = \sigma[x\backslash m] = \sigma[x\backslash n] = \sigma^*[x\backslash n] = \sigma'$.

Deterministische Berechnung (4)

Beweis (Fortsetzung)

Fall r;

- Es ist zu zeigen, dass
  $\forall \sigma^*,\sigma^{*\prime},\sigma^{*\prime\prime} \in \Sigma: \forall c1,c2 \in Com:$
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime\prime}): \forall \mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c2,\sigma^{*\prime\prime} \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime}):$
  $[\ (P(\mathcal{H}1) \wedge P(\mathcal{H}2)) \Rightarrow P(\ r;(\ \langle c1;c2,\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime},\ (\mathcal{H}1,\ \mathcal{H}2)))\ ]$
  für $P(\mathcal{H}) = \forall c \in Com: \forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma:$
  $[\ \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma')\ \Rightarrow\ \forall \mathcal{H}' \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma''): \sigma' = \sigma''\ ]$
- Seien $\sigma^*,\sigma^{*\prime},\sigma^{*\prime\prime},\sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$, $c1,c2,c \in Com$, $\mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime\prime})$ und $\mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c2,\sigma^{*\prime\prime} \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime})$ beliebig.
- Die Herleitung ist $r;(\ \langle c1;c2,\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime},\ (\mathcal{H}1,\ \mathcal{H}2))$ und somit gelten:
  $c = c1;c2$, $\sigma = \sigma^*$ und $\sigma' = \sigma^{*\prime}$.
- Sei $\mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma'')$ beliebig.
- Nur in der Konklusion der Regel r; kommt sequentielle Komposition vor.
- Daher muss $\mathcal{H}' = r;(\ \langle c1;c2,\sigma \rangle \rightarrow \sigma'',\ (\mathcal{H}1',\ \mathcal{H}2'))$ gelten, wobei
  $\mathcal{H}1' \in DER(\langle c1,\sigma \rangle \rightarrow \sigma''')$ und $\mathcal{H}2' \in DER(\langle c2,\sigma''' \rangle \rightarrow \sigma'')$ für ein $\sigma''' \in \Sigma$.
- Aus $P(\mathcal{H}1)$, $\mathcal{H}1 \in DER(\langle c1,\sigma \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime\prime})$, $\mathcal{H}1' \in DER(\langle c1,\sigma \rangle \rightarrow \sigma''')$ folgt $\sigma''' = \sigma^{*\prime\prime}$.
- Aus $P(\mathcal{H}2)$, $\mathcal{H}2 \in DER(\langle c2,\sigma^{*\prime\prime} \rangle \rightarrow \sigma^{*\prime})$, $\mathcal{H}2' \in DER(\langle c2,\sigma^{*\prime\prime} \rangle \rightarrow \sigma'')$ folgt $\sigma'' = \sigma^{*\prime}$.
- Also gilt $\sigma'' = \sigma^{*\prime} = \sigma'$.

Deterministische Berechnung (5)

Beweis (Fortsetzung)

Fall rift

…

Fall riff

…

Siehe Übungsblatt und Musterlösung

Deterministische Berechnung (6)

Beweis (Fortsetzung)

Fall rwhf

- Es ist zu zeigen, dass
  $\forall \sigma^* \in \Sigma$: $\forall b \in Bexp$: $\forall c1 \in Com$:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma^* \rangle \Downarrow false)$:
  [P(rwhf($\langle$while b do c1 od, $\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^*$, ($\mathcal{H}1$))]
  für P($\mathcal{H}$) = $\forall c \in Com: \forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$:
  [$\mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma') \Rightarrow \forall \mathcal{H}' \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma'') : \sigma' = \sigma''$]
- Seien $\sigma^*, \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$, $b \in Bexp$, $c1,c \in Com$ und $\mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma^* \rangle \Downarrow false)$ beliebig.
- Die Herleitung ist rwhf($\langle$while b do c1 od, $\sigma^* \rangle \rightarrow \sigma^*$, ($\mathcal{H}1$)) und somit gelten: c = while b do c1 od, $\sigma = \sigma^*$ und $\sigma' = \sigma^*$.
- Sei $\mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma \rangle \rightarrow \sigma'')$ beliebig.
- Da die Auswertung von Ausdrücken in Bexp deterministisch ist (siehe Theorem in Modul 6), ist $\langle b,\sigma^* \rangle \Downarrow true$ nicht herleitbar.
- Es muss also $\mathcal{H}'$ = rwhf($\langle$while b do c1 od, $\sigma \rangle \rightarrow \sigma$, ($\mathcal{H}1'$))
  gelten, wobei $\mathcal{H}1' \in DER(\langle b,\sigma^* \rangle \Downarrow false)$, und somit gilt $\sigma'' = \sigma$.
- Somit gilt $\sigma'' = \sigma = \sigma^* = \sigma'$.

Deterministische Berechnung (7)

Beweis (Fortsetzung)

Fall rwht

- Es ist zu zeigen, dass
  $\forall \sigma^*,\sigma^{*\prime},\sigma^{*\prime\prime} \in \Sigma$: $\forall b \in Bexp$: $\forall c1 \in Com$:
  $\forall \mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma^*\rangle \Downarrow true)$:
  $\forall \mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^{*\prime\prime})$: $\forall \mathcal{H}3 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle$while b do c1 od$,\sigma^{*\prime\prime}\rangle \rightarrow \sigma^{*\prime})$:
  $[(P(\mathcal{H}2) \wedge P(\mathcal{H}3)) \Rightarrow P(\text{ rwht}(\langle$while b do c1 od$, \sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^{*\prime}, (\mathcal{H}1,\mathcal{H}2,\mathcal{H}3)))]$
  für $P(\mathcal{H}) = \forall c \in Com: \forall \sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$:
  $[\ \mathcal{H} \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma') \Rightarrow \forall \mathcal{H}' \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma''): \sigma' = \sigma''\ ]$
- Seien $\sigma^*,\sigma^{*\prime},\sigma^{*\prime\prime},\sigma,\sigma',\sigma'' \in \Sigma$, $b \in Bexp$, $c1,c \in Com$, $\mathcal{H}1 \in DER_{\mathcal{B}}(\langle b,\sigma^*\rangle \Downarrow true)$, $\mathcal{H}2 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle c1,\sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^{*\prime\prime})$ und $\mathcal{H}3 \in DER_{\mathcal{C}}(\langle$while b do c1 od$,\sigma^{*\prime\prime}\rangle \rightarrow \sigma^{*\prime})$ beliebig.
- Die Herleitung ist rwht$(\langle$while b do c1 od$, \sigma^*\rangle \rightarrow \sigma^{*\prime}, (\mathcal{H}1,\mathcal{H}2,\mathcal{H}3))$ und somit gelten: c = while b do c1 od, $\sigma=\sigma^*$ und $\sigma'=\sigma^{*\prime}$.
- Sei $\mathcal{H}' \in DER(\langle c,\sigma\rangle \rightarrow \sigma'')$ beliebig.
- Da die Auswertung von Ausdrücken in Bexp deterministisch ist (siehe Theorem in Modul 6), ist $\langle b,\sigma^*\rangle \Downarrow$false nicht herleitbar.

Deterministische Berechnung (8)

Beweis (Fortsetzung)

Fall rwht (Fortsetzung)

- Daher muss $\mathcal{H}' = \text{rwht}(\langle \text{while b do c1 od}, \sigma\rangle \to \sigma'', (\mathcal{H}1', \mathcal{H}2', \mathcal{H}3'))$ gelten, wobei $\mathcal{H}1' \in \text{DER}(\langle b, \sigma\rangle \Downarrow \text{true})$, $\mathcal{H}2' \in \text{DER}(\langle c1, \sigma\rangle \to \sigma'')$ und $\mathcal{H}3' \in \text{DER}(\langle \text{while b do c1 od}, \sigma''\rangle \to \sigma'')$ für ein $\sigma'' \in \Sigma$.
- Aus $P(\mathcal{H}2)$, $\mathcal{H}2 \in \text{DER}(\langle c1, \sigma\rangle \to \sigma^*)$ und $\mathcal{H}2' \in \text{DER}_{\mathcal{C}}(\langle c1, \sigma\rangle \to \sigma'')$ folgt $\sigma'' = \sigma^*$.
- Aus $P(\mathcal{H}3)$, $\mathcal{H}3 \in \text{DER}(\langle \text{while b do c1 od}, \sigma^*\rangle \to \sigma^*)$ und $\mathcal{H}3' \in \text{DER}(\langle \text{while b do c1 od}, \sigma^*\rangle \to \sigma'')$ folgt $\sigma'' = \sigma^*$.
- Also gilt $\sigma'' = \sigma^* = \sigma'$. **qed**

Übung:

- Welche Probleme treten auf, wenn man versucht, dass Theorem mit struktureller Induktion über Com zu beweisen?

Rückblick

Einige wesentliche Lernziele dieses Moduls

- Beherrschung elementarer Verifikationstechniken:
  - … Fortsetzung von Modul 6 …
  - Induktion über Herleitungen in einem Kalkül
- Fähigkeit verschiedene Repräsentationen von Herleitungen zu verwenden (Termrepräsentation, Baumrepräsentation)

Literatur

Glynn Winskel

The Formal Semantics of Programming Languages; Kapitel 2, 3, 4
The MIT Press, 1993.